2.6 Analytické vyjadrenie kužeľosečiek

Kužeľosečky sú **analytické (geometrické) krivky**, t. j. sú to krivky, ktoré sú vyjadrené analytickými rovnicami.
Ak kužeľosečka leží v rovine ***xy***: $z = 0$, tak môže byť vyjadrená napr.

- parametricky: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$,
- implicitne: $F(x, y) = 0$.

Veta: Nech je v rovine ***xy***: $z = 0$ daná rovnica

$$\mathbf{A}x^2 + \mathbf{B}xy + \mathbf{C}y^2 + \mathbf{D}x + \mathbf{E}y + \mathbf{F} = \mathbf{0}, \qquad (1)$$

kde A, B, C, D, E, F sú ľubovoľné reálne čísla a nech trojica (A, B, C) je rôzna od (0, 0, 0). Táto rovnica môže vyjadrovať kružnicu, elipsu, hyperbolu, parabolu, dve rôznobežky, dve rovnobežky, jeden bod, alebo prázdnu množinu.

K rovnici (1) prislúcha práve jeden determinant **I** a jeden determinant **J**:

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{vmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{vmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{vmatrix}$$

Veta: Ak je kužeľosečka, určená rovnicou (1), neprázdna množina bodov, tak

- pre $\mathbf{I} \neq 0$ a $\mathbf{J} > 0$ je to kružnica alebo elipsa,
- pre $\mathbf{I} \neq 0$ a $\mathbf{J} < 0$ je to hyperbola,
- pre $\mathbf{I} \neq 0$ a $\mathbf{J} = 0$ je to parabola,

- pre $\mathbf{I} = 0$ a $\mathbf{J} < 0$ sú to dve rôznobežky,
- pre $\mathbf{I} = 0$ a $\mathbf{J} = 0$ sú to dve rovnobežky,
- pre $\mathbf{I} = 0$ a $\mathbf{J} > 0$ je to jeden bod.

Príklad 2.9: Daná je rovnica kužeľosečky: $\boldsymbol{x^2 + 6xy + y^2 + 10x - 2y - 9 = 0}$. Určte typ kužeľosečky.

Postup:

Podľa označenia koeficientov v rovnici (1): $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
platí: A = 1, B = 6, C = 1, D = 10, E = –2, F = –9.

1. Určíme ľubovoľný bod kužeľosečky: bod $[0, 1+\sqrt{10}\,]$ leží na kužeľosečke, t. j. kužeľosečka je neprázdna množina bodov.

2. Vypočítame determinant **I**, ktorý prislúcha k rovnici kužeľosečky:

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= 1.1.(-9) + 3.(-1).5 + 5.3.(-1) - 5.1.5 - 1.(-1).(-1) - 3.3.(-9) = 16$$

3. Determinant **I** ≠ 0, t. j. je to regulárna kužeľosečka.

4. Vypočítame determinant **J**, ktorý prislúcha k rovnici kužeľosečky:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 3.3 = -8$$

5. Determinant **J** < 0, t. j. rovnica vyjadruje hyperbolu.

Regulárna kužeľosečka s osami rovnobežnými so súradnicovými osami

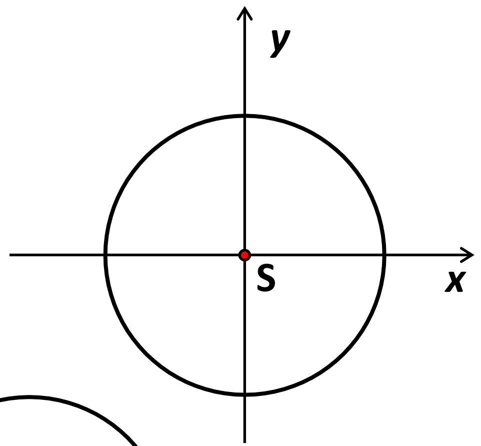
Ak má rovnica regulárnej kužeľosečky v rovine ***xy***: $z = 0$ tvar

$$\mathbf{A}x^2 + \mathbf{C}y^2 + \mathbf{D}x + \mathbf{E}y + \mathbf{F} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

tak osi kužeľosečky sú rovnobežné so súradnicovými osami ***x***, ***y***.

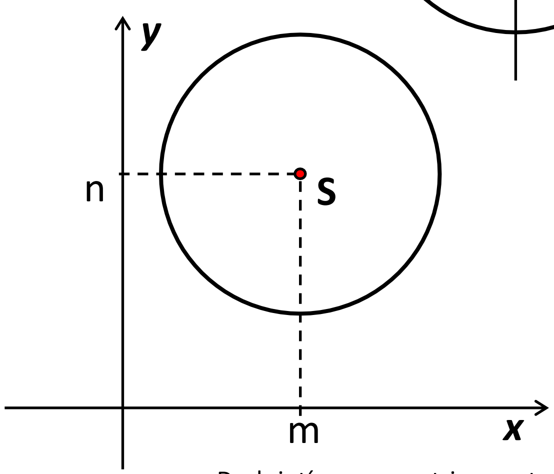
- Rovnicu (2) môžeme upraviť na tvar, z ktorého jednoducho určíme typ kužeľosečky, jej stred a vrcholy.
- Tieto rovnice nazývame všeobecné rovnice a sú uvedené v nasledujúcej časti. Okrem toho sú uvedené aj parametrické rovnice týchto kužeľosečiek.

Kružnica



Kružnica so stredom **S**[0,0] a polomerom r, r > 0:

- všeobecná rovnica: $x^2 + y^2 = r^2$,
- parametrické rovnice: $x = r.\cos t$,
  $y = r.\sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.



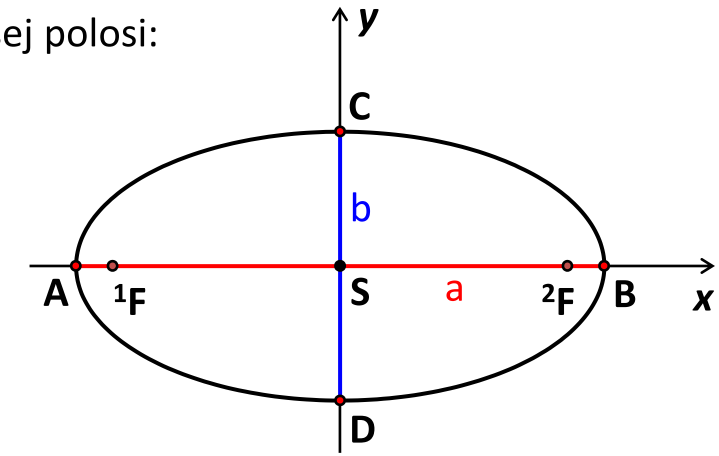
Kružnica so stredom **S**[m,n] a polomerom r, r > 0:

- všeobecná rovnica: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$,
- parametrické rovnice: $x = m + r.\cos t$,
  $y = n + r.\sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Elipsa

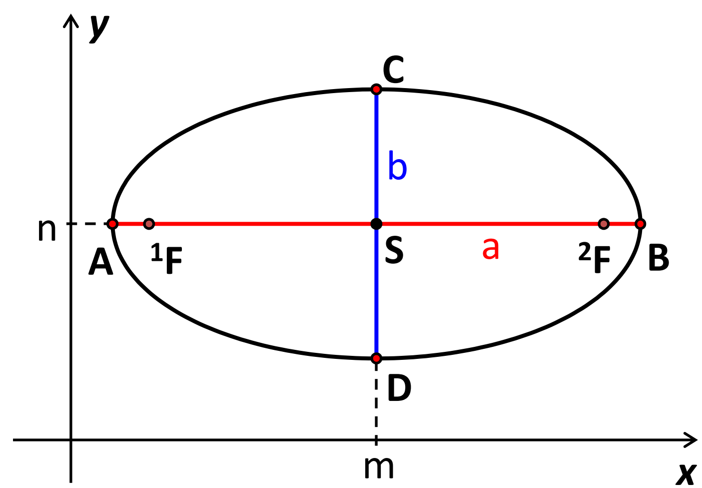
Elipsa so stredom **S**[0,0], $^{1}\boldsymbol{o} = \boldsymbol{x}$ a dĺžkami a, b hlavnej a vedľajšej polosi:

- všeobecná rovnica: $\dfrac{x^2}{\mathrm{a}^2} + \dfrac{y^2}{\mathrm{b}^2} = 1,$
- parametrické rovnice: $x = \mathrm{a.cos\ t},$
  $y = \mathrm{b.sin\ t}, \qquad \mathrm{t} \in \langle 0, 2\pi \rangle.$



Elipsa so stredom **S**[m,n], $^{1}\boldsymbol{o} \parallel \boldsymbol{x}$ a dĺžkami a, b hlavnej a vedľajšej polosi:

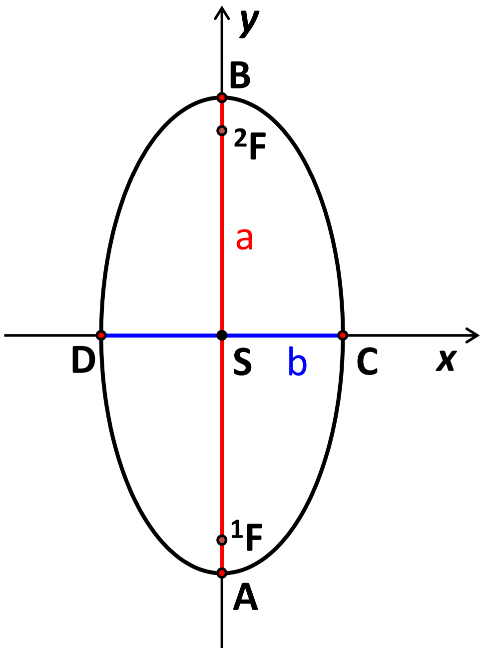
- všeobecná rovnica: $\dfrac{(x-\mathrm{m})^2}{\mathrm{a}^2} + \dfrac{(y-\mathrm{n})^2}{\mathrm{b}^2} = 1,$
- parametrické rovnice: $x = \mathrm{m} + \mathrm{a.cos\ t},$
  $y = \mathrm{n} + \mathrm{b.sin\ t}, \qquad \mathrm{t} \in \langle 0, 2\pi \rangle.$



Elipsa

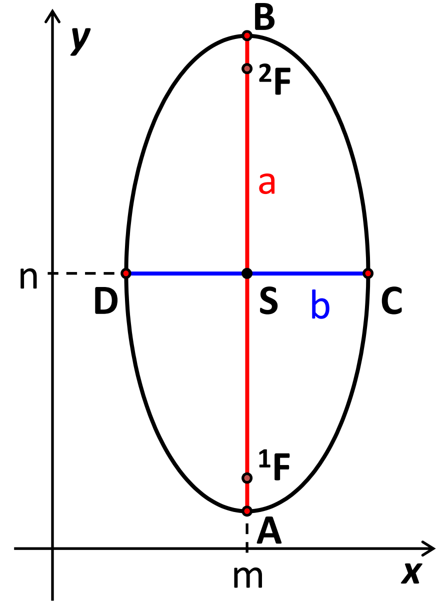
Elipsa so stredom **S**[0,0], $^{1}\boldsymbol{o} = \boldsymbol{y}$ a dĺžkami a, b hlavnej a vedľajšej polosi:

- všeobecná rovnica: $$\frac{x^2}{\mathrm{b}^2}+\frac{y^2}{\mathrm{a}^2}=1,$$
- parametrické rovnice: x = b.cos t,
  y = a.sin t, t ∈ < 0, 2π >.



Elipsa so stredom **S**[m,n], $^{1}\boldsymbol{o} \parallel \boldsymbol{y}$ a dĺžkami a, b hlavnej a vedľajšej polosi:

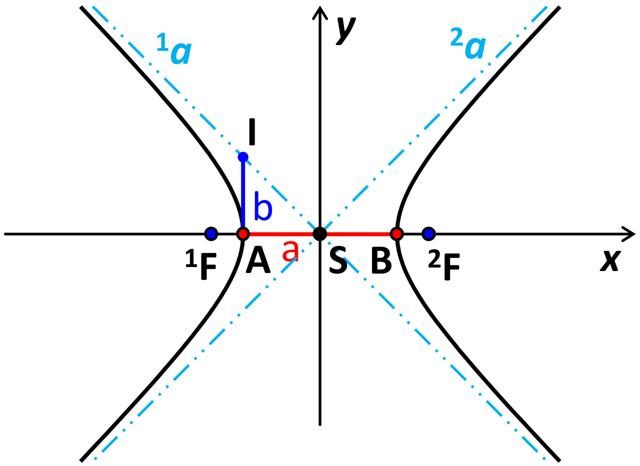
- všeobecná rovnica: $$\frac{(x-\mathrm{m})^2}{\mathrm{b}^2}+\frac{(y-\mathrm{n})^2}{\mathrm{a}^2}=1,$$
- parametrické rovnice: x = m + b.cos t,
  y = n + a.sin t, t ∈ < 0, 2π >.



Hyperbola

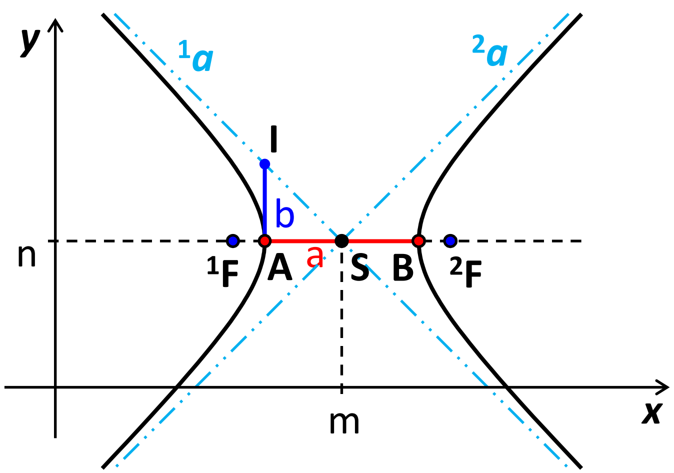
Hyperbola so stredom **S**[0,0], $^1\boldsymbol{o} = \boldsymbol{x}$ a dĺžkami a, b hlavnej a vedľajšej polosi:

- všeobecná rovnica: $\dfrac{x^2}{\mathrm{a}^2} - \dfrac{y^2}{\mathrm{b}^2} = 1,$
- parametrické rovnice: $x = \mathrm{a}/\cos t,$
  $y = \mathrm{b}.\mathrm{tg}\, t,$
  $t \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2).$



Hyperbola so stredom **S**[m,n], $^1\boldsymbol{o} \parallel \boldsymbol{x}$ a dĺžkami a, b hlavnej a vedľajšej polosi:

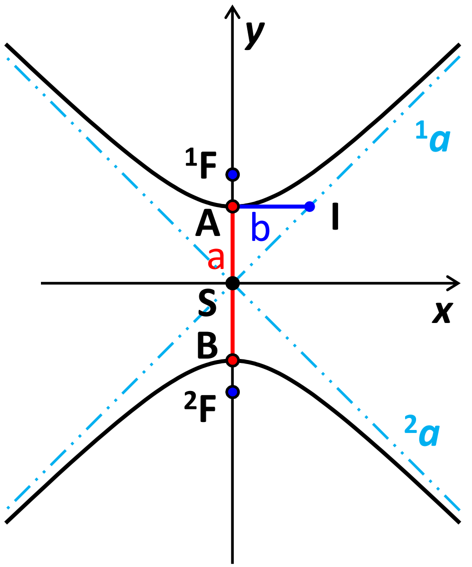
- všeobecná rovnica: $\dfrac{(x-\mathrm{m})^2}{\mathrm{a}^2} - \dfrac{(y-\mathrm{n})^2}{\mathrm{b}^2} = 1,$
- parametrické rovnice: $x = \mathrm{m} + \mathrm{a}/\cos t,$
  $y = \mathrm{n} + \mathrm{b}.\mathrm{tg}\, t,$
  $t \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2).$



Hyperbola

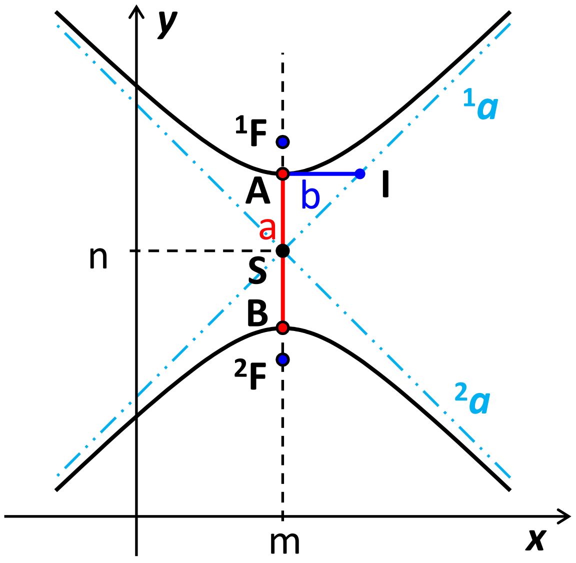
Hyperbola so stredom **S**[0,0], $^{1}\boldsymbol{o} = \boldsymbol{y}$ a dĺžkami a, b hlavnej a vedľajšej polosi:

- všeobecná rovnica: $\dfrac{x^2}{\mathrm{b}^2} - \dfrac{y^2}{\mathrm{a}^2} = -1,$
- parametrické rovnice: x = b.tg t,
  y = a/cos t,
  t ∈ (-π/2, π/2) ∪ (π/2, 3π/2).



Hyperbola so stredom **S**[m,n], $^{1}\boldsymbol{o} \parallel \boldsymbol{y}$ a dĺžkami a, b hlavnej a vedľajšej polosi:

- všeobecná rovnica: $\dfrac{(x-\mathrm{m})^2}{\mathrm{b}^2} - \dfrac{(y-\mathrm{n})^2}{\mathrm{a}^2} = -1,$
- parametrické rovnice: x = m + b.tg t,
  y = n + a/cos t,
  t ∈ (-π/2, π/2) ∪ (π/2, 3π/2).

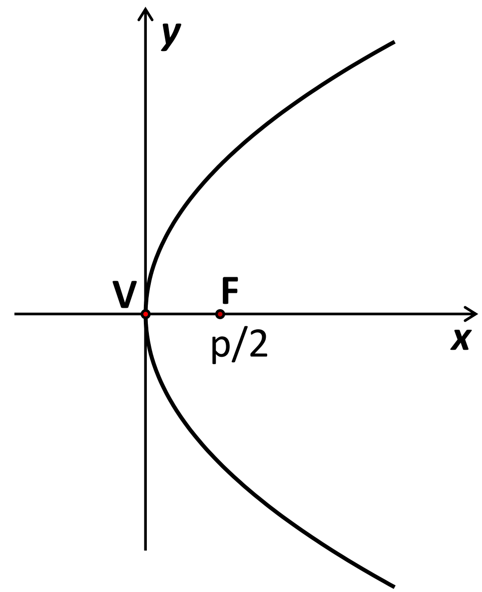


Parabola

Parabola s vrcholom **V**[0,0], ohniskom **F**[p/2,0] a ***o*** = ***x***:

- všeobecná rovnica: $y^2 = 2px$,
- parametrické rovnice: $x = t^2/(2p)$,

  $y = t, \qquad t \in R.$

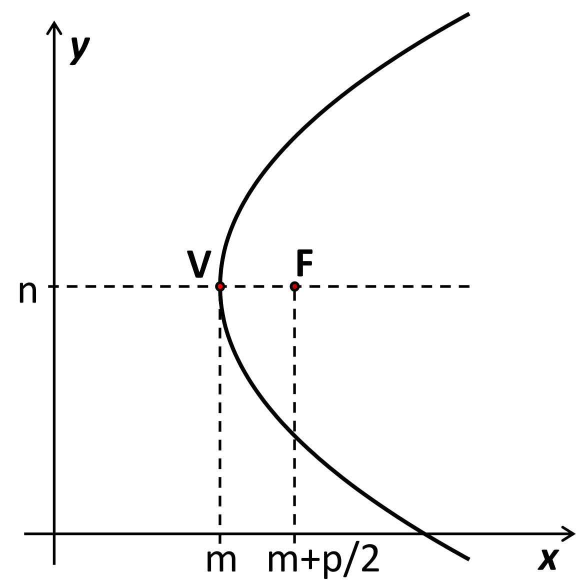


Parabola s vrcholom **V**[m,n], ohniskom **F**[m + p/2,n] a ***o*** ∥ ***x***:

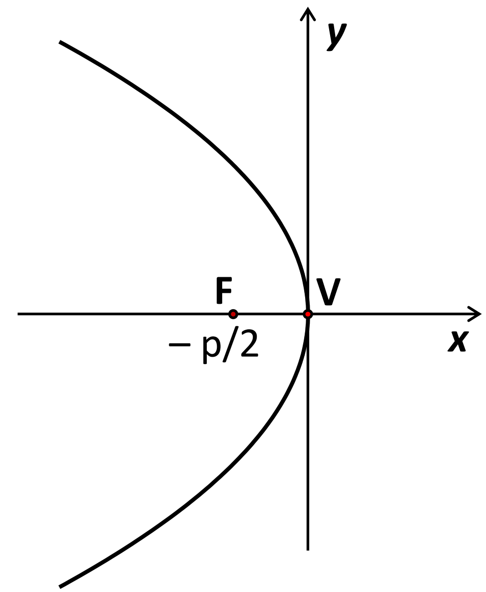
- všeobecná rovnica: $(y - n)^2 = 2p(x - m)$,
- parametrické rovnice:

$$x = \frac{(t-n)^2 + 2pm}{2p},$$

$$y = t, \qquad t \in R.$$



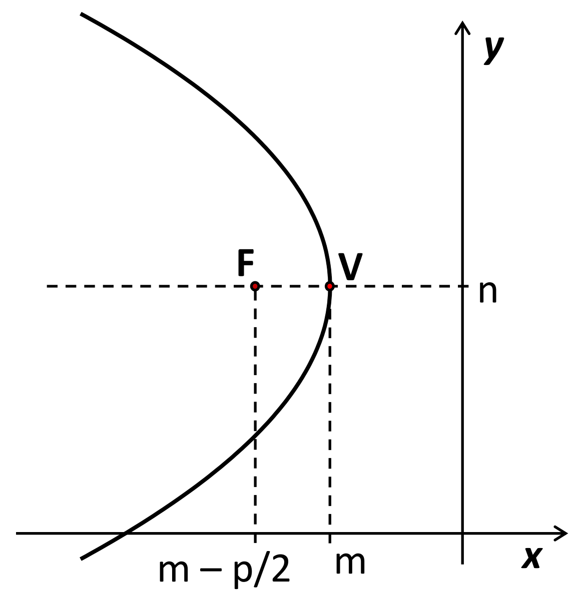
Parabola



Parabola s vrcholom **V**[0,0], ohniskom **F**[– p/2,0] a ***o*** = ***x***:

- všeobecná rovnica: $y^2 = -2px$,
- parametrické rovnice: $x = -t^2/(2p)$,

  $y = t$, $t \in R$.



Parabola s vrcholom **V**[m,n], ohniskom **F**[m – p/2,n] a ***o*** ∥ ***x***:

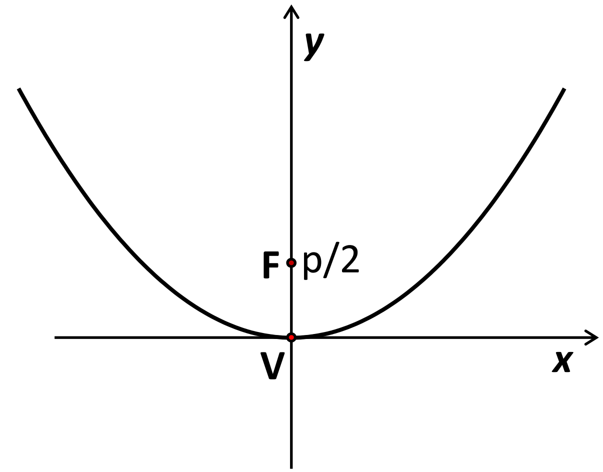
- všeobecná rovnica: $(y - n)^2 = -2p(x - m)$,
- parametrické rovnice:

$$x = \frac{-(t-n)^2 + 2pm}{2p},$$

$$y = t, \qquad t \in R.$$

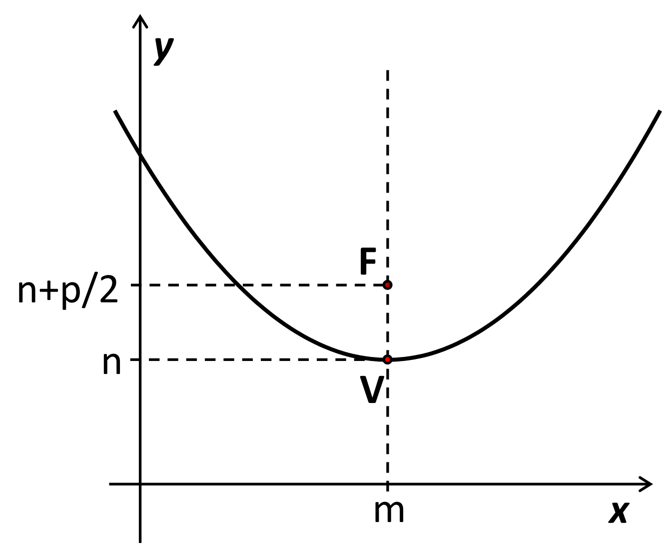
Parabola

Parabola s vrcholom **V**[0,0], ohniskom **F**[0,p/2] a ***o*** = ***y***:



- všeobecná rovnica: $x^2 = 2py$,
- parametrické rovnice: $x = t$,
  $y = t^2/(2p)$, $t \in R$.

Parabola s vrcholom **V**[m,n], ohniskom **F**[m,n + p/2] a ***o*** ∥ ***y***:



- všeobecná rovnica: $(x - m)^2 = 2p(y - n)$,
- parametrické rovnice:

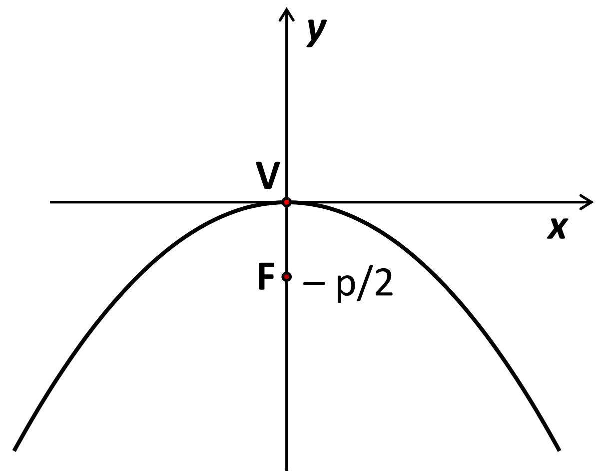
$$x = t,$$
$$y = \frac{(t - m)^2 + 2pn}{2p}, \qquad t \in R.$$

Parabola

Parabola s vrcholom **V**[0,0], ohniskom **F**[0, – p/2] a ***o*** = ***y***:

- všeobecná rovnica: $x^2 = -\,2py$,
- parametrické rovnice: $x = t$,

  $y = -\,t^2/(2p)$, $t \in R$.

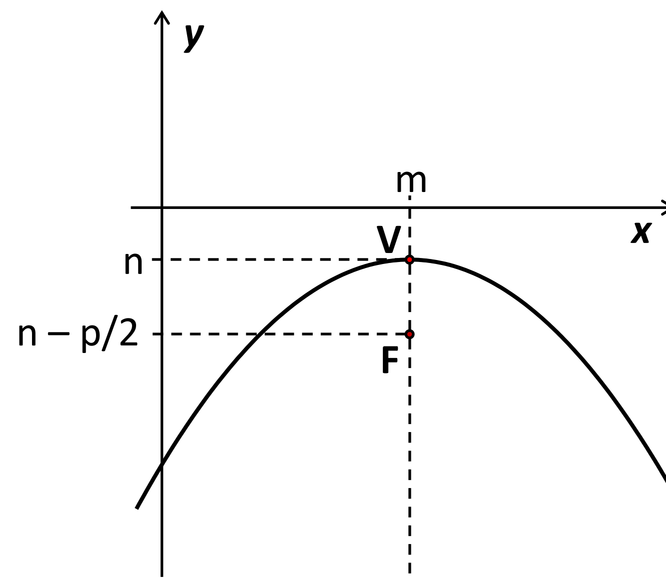


Parabola s vrcholom **V**[m,n], ohniskom **F**[m,n – p/2] a ***o*** ∥ ***y***:

- všeobecná rovnica: $(x - m)^2 = -\,2p(y - n)$,
- parametrické rovnice:

$$x = t,$$

$$y = \frac{-\,(t-m)^2 + 2pn}{2p}, \qquad t \in R.$$



Príklad 2.10: Daná je rovnica kužeľosečky: $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0}$. Určte typ kužeľosečky.

Postup:

Podľa označenia koeficientov v rovnici (1): $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
platí: A = 1, B = 0, C = 1, D = –6, E = 2, F = 6.

1. Určíme ľubovoľný bod kužeľosečky: bod $[3+\sqrt{3}\,, 0]$ leží na kužeľosečke, t. j. kužeľosečka je neprázdna množina bodov.
2. Vypočítame determinant **I**, ktorý prislúcha k rovnici kužeľosečky:

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1.1.6 + 0.1.(-3) + (-3).0.1 - (-3).1.(-3) - 1.1.1 - 0.0.6 = -4$$

3. Determinant **I** ≠ 0, t. j. je to regulárna kužeľosečka.
4. Vypočítame determinant **J**, ktorý prislúcha k rovnici kužeľosečky:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 0.0 = 1$$

5. Determinant **J** > 0, t. j. rovnica vyjadruje kružnicu alebo elipsu.

Príklad 2.10: Daná je rovnica kužeľosečky: $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0}$. Určte typ kužeľosečky.

Postup:

6. Rovnicu kužeľosečky upravíme na tvar, podľa ktorého upresníme typ kužeľosečky a určíme jej stred.

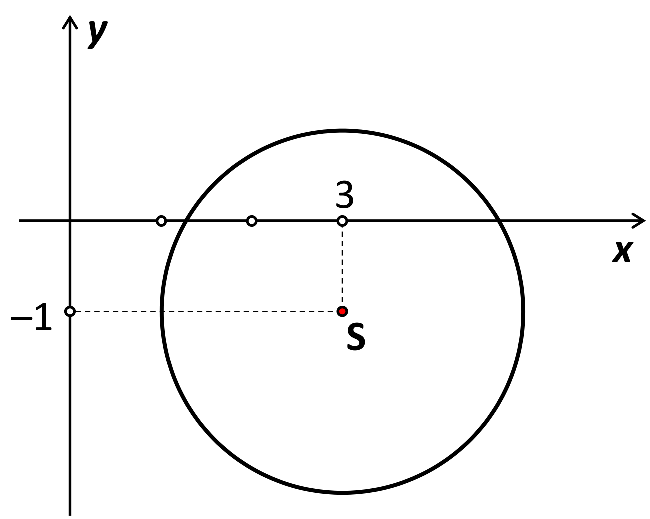
$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$

$(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) + 6 = 0$

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) + 6 - 9 - 1 = 0$

$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$

Rovnica vyjadruje kružnicu so stredom **S**[3, –1] a polomerom r = 2.



Cvičenie: Daná je rovnica kužeľosečky. Určte typ kužeľosečky.

a) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 6 = 0$

b) $y^2 + 3x + 2y - 14 = 0$

c) $x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 8 = 0$

d) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 5 = 0$

e) $9x^2 - 4y^2 + 36x + 24y - 36 = 0$

f) $2x^2 - 12xy - 7y^2 + 8x + 6y = 0$

g) $x^2 - 2xy + 1 = 0$

h) $xy - 1 = 0$

i) $5x^2 - xy - 4y^2 - 30x + 12y + 40 = 0$

j) $x^2 - 2xy + y^2 + x - y - 6 = 0$

k) $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$