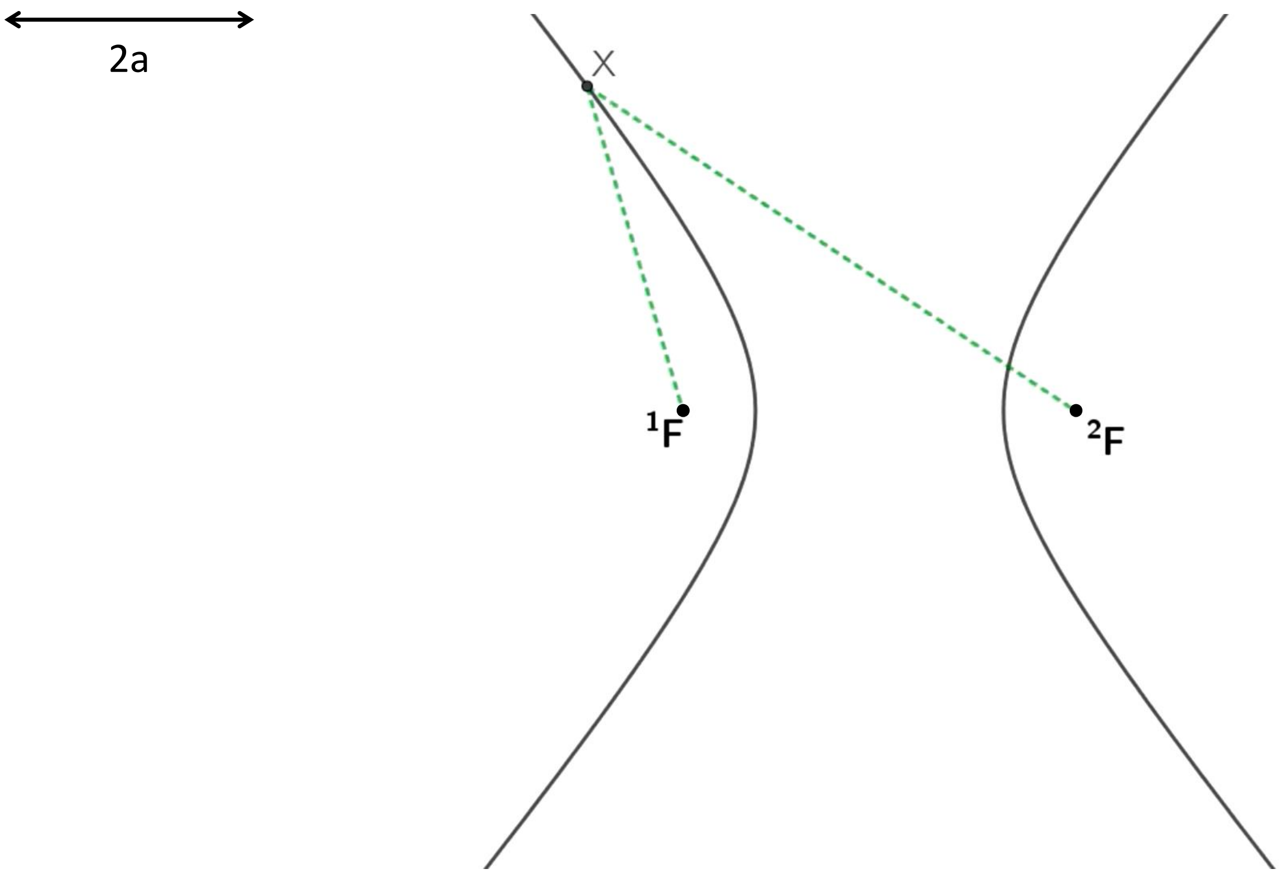
2.3 Hyperbola

Definícia: **Hyperbola** je množina všetkých bodov v rovine $\mathbf{E^2}$, ktorých absolútna hodnota rozdielu vzdialeností od dvoch rôznych bodov je konštantná a je menšia ako vzdialenosť týchto bodov.

- Dva rôzne body sa nazývajú **ohniská hyperboly** a označíme ich $\mathbf{{}^1F}$, $\mathbf{{}^2F}$.
- Absolútnu hodnotu rozdielu vzdialeností označíme 2a.

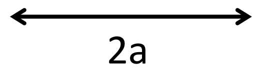
- Symbolický zápis: Hyperbola = $\{\forall \mathbf{X} \in \mathbf{E^2};\ \big|\,|\mathbf{X}\,{}^1\mathbf{F}| - |\mathbf{X}\,{}^2\mathbf{F}|\,\big| = 2a,\ 0 < 2a < |{}^1\mathbf{F}\,{}^2\mathbf{F}|\}$

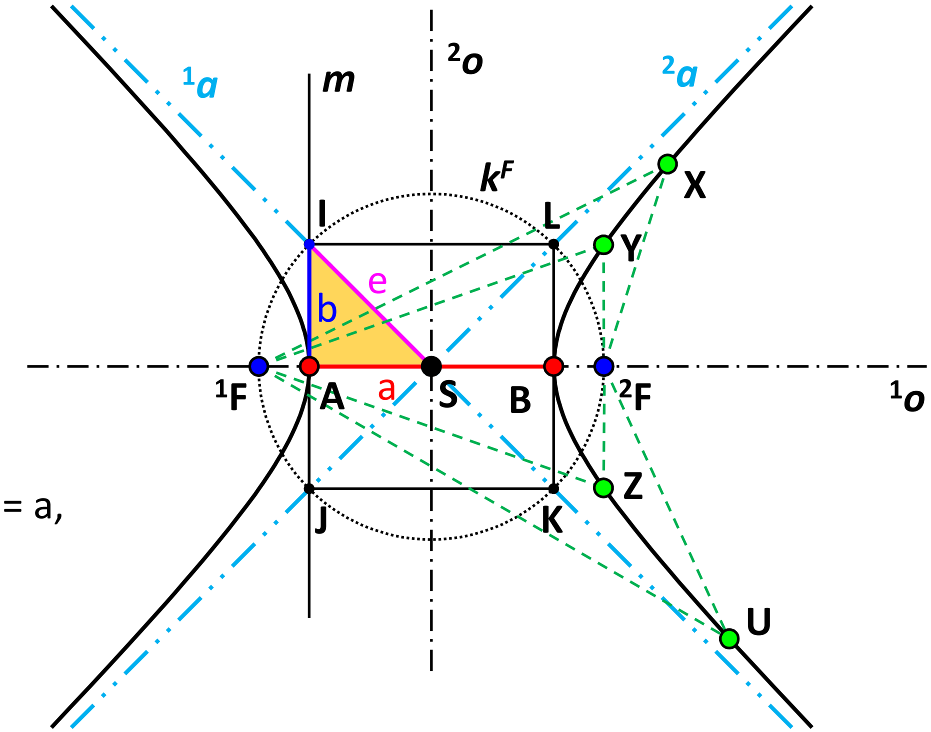


Pre ďalšie spustenie videa prejdite myšou na obrázok a kliknite na prehrávanie

Definícia: Hyperbola je množina všetkých bodov v rovine $\mathbf{E}^2$, ktorých absolútna hodnota rozdielu vzdialeností od dvoch rôznych bodov je konštantná a je menšia ako vzdialenosť týchto bodov.

Hyperbola = $\{\forall \mathbf{X} \in \mathbf{E}^2;\ ||\mathbf{X}\,{}^1\mathbf{F}| - |\mathbf{X}\,{}^2\mathbf{F}|| = 2a,\ 0 < 2a < |{}^1\mathbf{F}\,{}^2\mathbf{F}|\}$





Základné pojmy a označenia:

- hlavná os hyperboly: ${}^1\mathbf{F}{}^2\mathbf{F} = {}^1\boldsymbol{o}$,
- vedľajšia os hyperboly: os úsečky ${}^1\mathbf{F}{}^2\mathbf{F} = {}^2\boldsymbol{o}$,
- stred hyperboly: $\mathbf{S} = {}^1\boldsymbol{o} \cap {}^2\boldsymbol{o}$,

- vrcholy **A**, **B** hyperboly: $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in {}^1\boldsymbol{o}$, $|\mathbf{AS}| = |\mathbf{BS}| = a$,

- charakteristický obdĺžnik **IJKL**:
  - $\boldsymbol{m}$; $\mathbf{A} \in \boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{m} \perp {}^1\boldsymbol{o}$,
  - $\boldsymbol{k}^F$; $\boldsymbol{k}^F(\mathbf{S}, r = |\mathbf{S}{}^1\mathbf{F}|)$,
  - $\boldsymbol{m} \cap \boldsymbol{k}^F = \{\mathbf{I}, \mathbf{J}\}$,
- asymptoty hyperboly: ${}^1\boldsymbol{a} = \mathbf{SI}$, ${}^2\boldsymbol{a} = \mathbf{SJ}$,

- a – dĺžka hlavnej polosi hyperboly, $a = |\mathbf{AS}| = |\mathbf{BS}|$,
- b – dĺžka vedľajšej polosi hyperboly, $b = |\mathbf{AI}|$,
- e – excentricita hyperboly, $e = |{}^1\mathbf{FS}| = |{}^2\mathbf{FS}|$,
- **ΔSAI** – charakteristický trojuholník hyperboly, platí $e^2 = a^2 + b^2$.

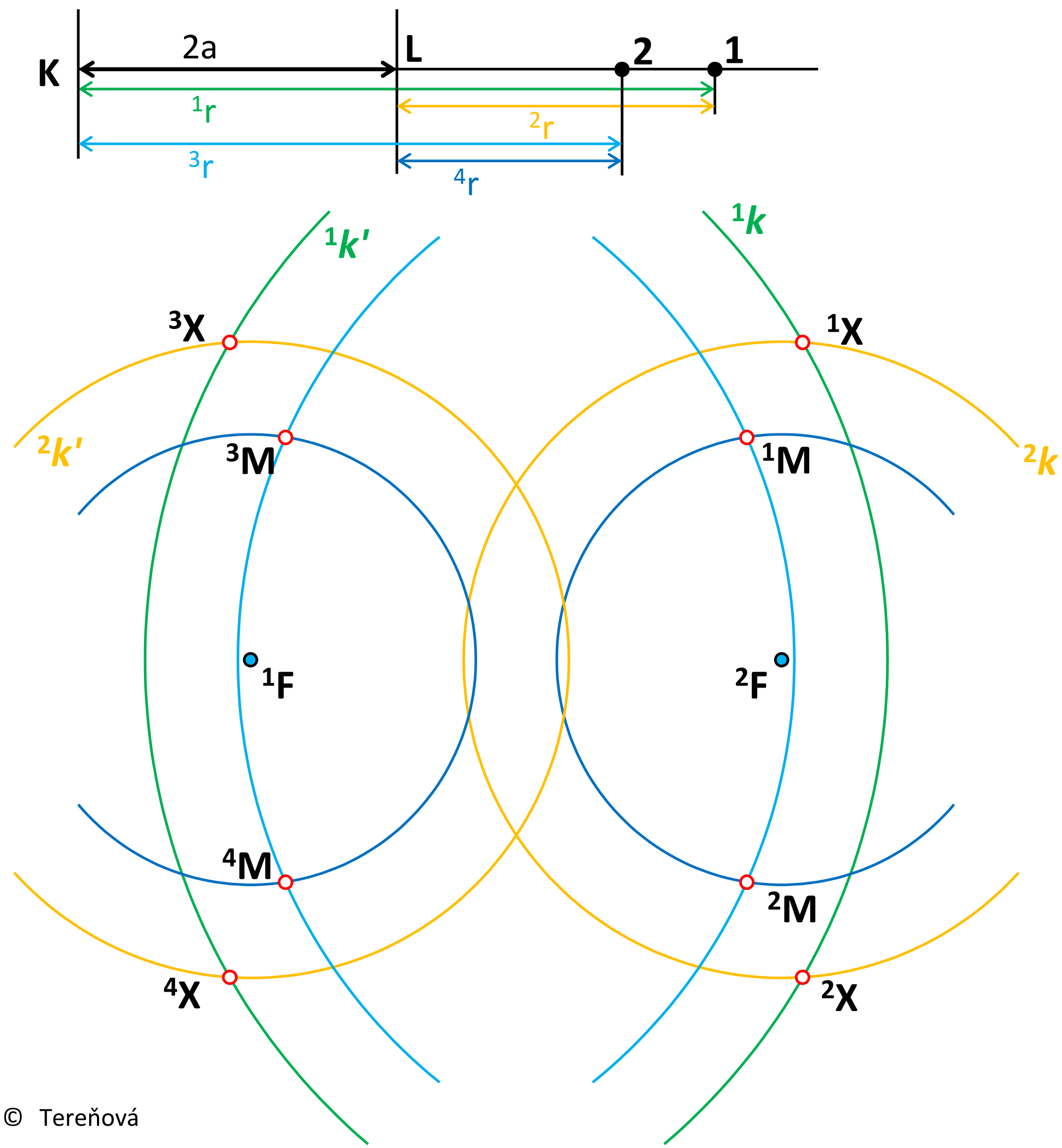
Súmernosť hyperboly

Hyperbola je súmerná:

- podľa svojej hlavnej osi,
- podľa svojej vedľajšej osi,
- podľa svojho stredu.

Ohnisková konštrukcia bodov hyperboly

Príklad 2.3: Hyperbola je daná ohniskami $^{1}\mathbf{F}$, $^{2}\mathbf{F}$ a dĺžkou 2a, $0 < 2a < |{}^{1}\mathbf{F}\,{}^{2}\mathbf{F}|$. Zostrojte body hyperboly.



$|\mathbf{KL}| = 2a$

Postup:

1. Bod **1**; $\mathbf{1} \in \mathbf{KL}$, ľubovoľný bod mimo úsečky **KL**, pre ktorý platí:
   $|\mathbf{K1}| > ½\,(|{}^{1}\mathbf{F}\,{}^{2}\mathbf{F}| - 2a)$,
   $|\mathbf{L1}| > ½\,(|{}^{1}\mathbf{F}\,{}^{2}\mathbf{F}| - 2a)$.
2. Dĺžky ^{1}r, ^{2}r; $|\mathbf{K1}| = {}^{1}r$, $|\mathbf{L1}| = {}^{2}r$, platí: $|{}^{1}r - {}^{2}r| = 2a$.
3. Kružnica $^{1}\boldsymbol{k}$; $^{1}\boldsymbol{k}({}^{1}\mathbf{F}, {}^{1}r)$.
4. Kružnica $^{2}\boldsymbol{k}$; $^{2}\boldsymbol{k}({}^{2}\mathbf{F}, {}^{2}r)$.
5. Body hyperboly: $^{1}\boldsymbol{k} \cap {}^{2}\boldsymbol{k} = \{{}^{1}\mathbf{X}, {}^{2}\mathbf{X}\}$.

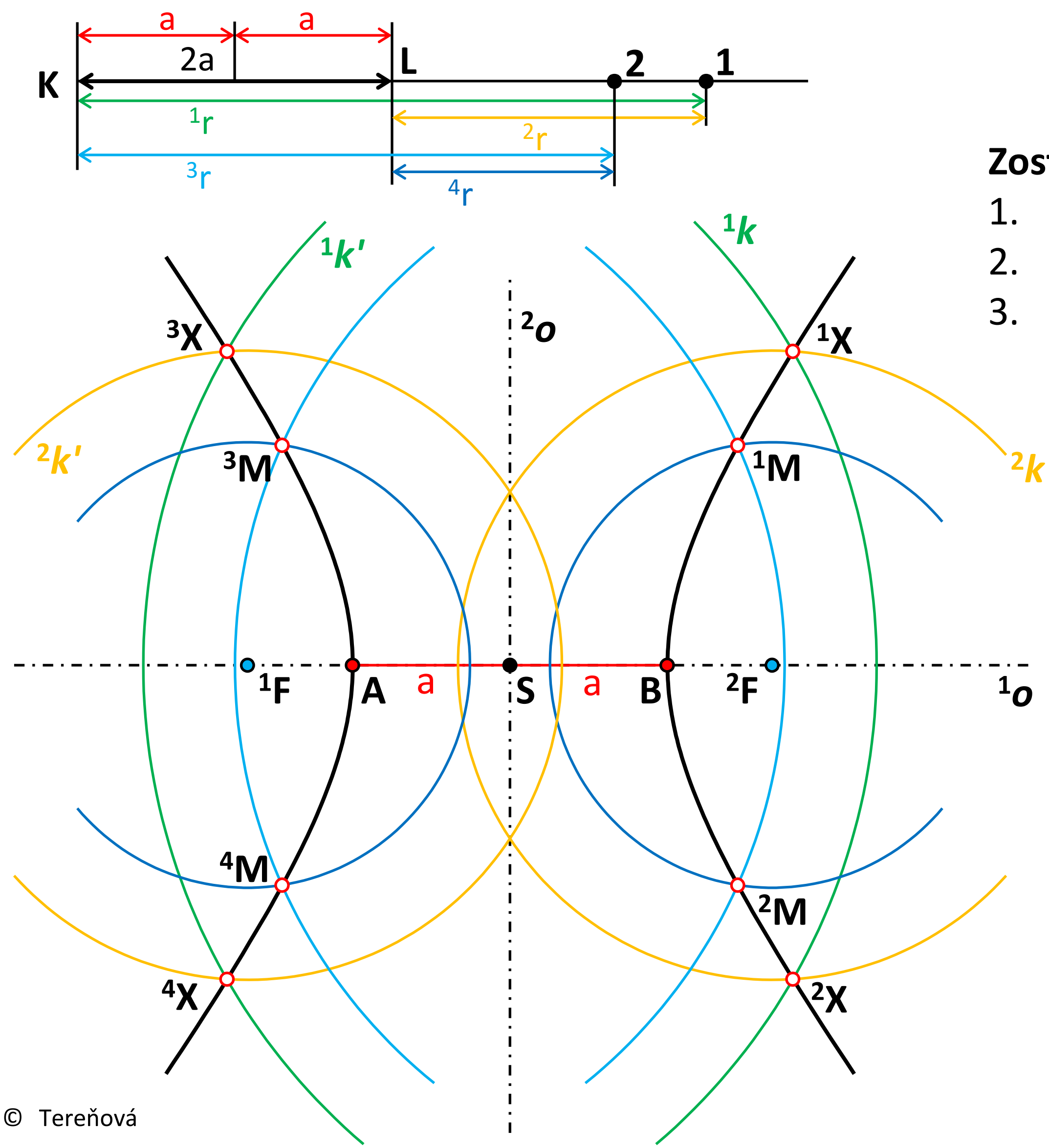
Pomocou dĺžok ^{1}r, ^{2}r môžeme zostrojiť ďalšie dva body hyperboly:

5. Kružnica $^{1}\boldsymbol{k}'$; $^{1}\boldsymbol{k}'\,({}^{2}\mathbf{F}, {}^{1}r)$.
6. Kružnica $^{2}\boldsymbol{k}'$; $^{2}\boldsymbol{k}'\,({}^{1}\mathbf{F}, {}^{2}r)$.
7. Body hyperboly: $^{1}\boldsymbol{k}' \cap {}^{2}\boldsymbol{k}' = \{{}^{3}\mathbf{X}, {}^{4}\mathbf{X}\}$.

Poznámka: *Ďalšie body hyperboly zostrojíme pomocou ľubovoľného bodu* **2** $\in$ **KL**. *Na obrázku sú zostrojené body* $^{1}\mathbf{M}$, $^{2}\mathbf{M}$, $^{3}\mathbf{M}$, $^{4}\mathbf{M}$ *hyperboly.*

Ohnisková konštrukcia bodov hyperboly

Príklad 2.3: Hyperbola je daná ohniskami ^{1}**F**, ^{2}**F** a dĺžkou 2a, 0 < 2a < |^1**F** ^{2}**F**|. Zostrojte body hyperboly.



|**KL**| = 2a

Zostrojíme osi hyperboly a stred hyperboly:

1. ^{1}**F**^{2}**F** = ^{1}***o*** – hlavná os hyperboly.
2. Os úsečky ^{1}**F**^{2}**F** = ^{2}***o*** – vedľajšia os hyperboly.
3. **S** = ^{1}***o*** ∩ ^{2}***o*** – stred hyperboly.

Zostrojíme vrcholy hyperboly:

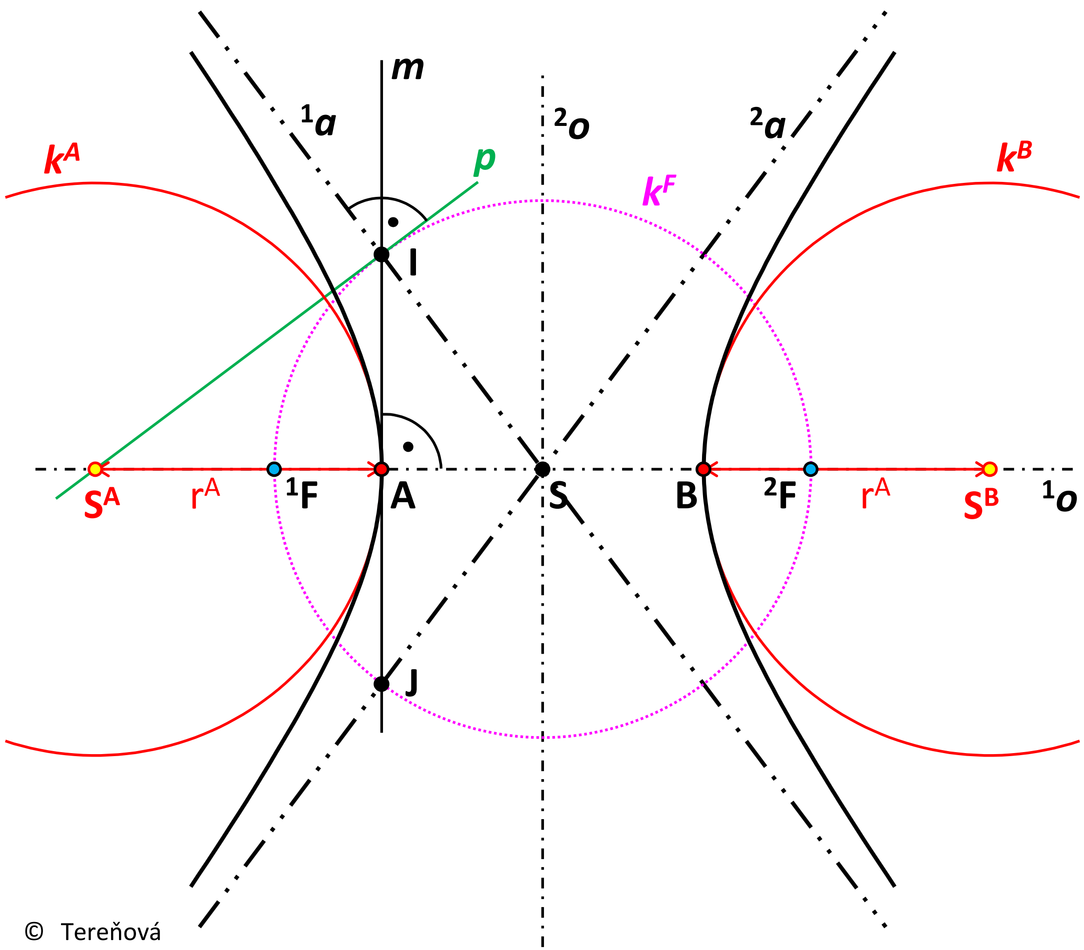
1. Body **A**, **B** – vrcholy hyperboly;
   A, **B** ∈ ^{1}***o***, |**AS**| = |**BS**| = a.

Poznámka: *Body* **A** *a* **B** *sú body hyperboly, lebo spĺňajú definíciu hyperboly.*

Poznámka: *Na iné zobrazenie* hyperboly *môžeme zostrojiť asymptoty hyperboly a oskulačné kružnice vo vrcholoch hyperboly (pozri nasledujúci príklad).*

Asymptoty hyperboly a oskulačné kružnice vo vrcholoch hyperboly

Príklad 2.4: Dané sú ohniská $^1\mathbf{F}$, $^2\mathbf{F}$ a vrcholy **A**, **B** hyperboly. Zostrojte asymptoty hyperboly a oskulačné kružnice vo vrcholoch hyperboly.



Postup:

Zostrojíme asymptoty hyperboly:

1. Priamka $\boldsymbol{m}$; $\mathbf{A} \in \boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{m} \perp {}^1\boldsymbol{o}$.
2. Kružnica $\boldsymbol{k^F}$; $\boldsymbol{k^F}$ ($\mathbf{S}$, r = e = $|\mathbf{S}^1\mathbf{F}|$).
3. Priesečníky priamky $\boldsymbol{m}$ a kružnice $\boldsymbol{k^F}$; $\boldsymbol{m} \cap \boldsymbol{k^F} = \{\mathbf{I}, \mathbf{J}\}$.
4. $^1\boldsymbol{a} = \mathbf{SI}$, $^2\boldsymbol{a} = \mathbf{SJ}$ – asymptoty hyperboly.

Zostrojíme oskulačné kružnice vo vrcholoch hyperboly:

1. Priamka $\boldsymbol{p}$; $\mathbf{I} \in \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p} \perp {}^1\boldsymbol{a}$.
2. $\boldsymbol{p} \cap {}^1\boldsymbol{o} = \mathbf{S^A}$ – stred oskulačnej kružnice vo vrchole **A**.
3. $\boldsymbol{k^A}$ ($\mathbf{S^A}$, $r^A = |\mathbf{S^A A}|$) – oskulačná kružnica vo vrchole **A**.
4. Oskulačnú kružnicu vo vrchole **B** zostrojíme využitím súmernosti hyperboly podľa jej stredu **S**.

Poznámka: *Hyperbola sa dotýka oskulačných kružníc* $\boldsymbol{k^A}$, $\boldsymbol{k^B}$ *zvonku. Hyperbola sa nachádza iba v jednom uhle svojich asymptôt.*