MATEMATIKA I.
Lineárna algebra a analytická geometria

Návody k cvičeniam pre odbory VSVH a STOP

Andrea Stupňanová, Alexandra Šipošová

STU
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ
UNIVERZITA V BRATISLAVE

MATEMATIKA I.
Lineárna algebra a analytická geometria

Návody k cvičeniam pre odbory VSVH a STOP

Andrea Stupňanová, Alexandra Šipošová

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
2014

Recenzenti: doc. RNDr. Robert Jajcay, PhD.
Mgr. Štefan Gyürki, PhD.

ISBN 978-80-227-4295-5

Mgr. Andrea Stupňanová, PhD. – Ing. Alexandra Šipošová, PhD.

MATEMATIKA I. LINEÁRNA ALGEBRA A ANALYTICKÁ GEOMETRIA
Návody k cvičeniam pre odbory VSVH a STOP

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v Nakladateľstve STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2014.

Edícia skrípt

Rozsah 141 strán, 21 obrázkov, 20,25AH, 20,460 VH, 1. vydanie,
edičné číslo 5820, vydané v elektronickej forme;
umiestnenie na http://www.svf.stuba.sk

Schválila Edičná rada Stavebnej fakulty STU v Bratislave.

85 – 268 – 2014

ISBN 978-80-227-4295-5

Úvod

Tieto skriptá sú učebnou pomôckou pri štúdiu predmetu Matematika 1 v bakalárskom štúdiu na Stavebnej fakulte Slovenskej technickej univerzity v Bratislave. Hoci sú svojou náplňou prispôsobené prednáškam na študijných odboroch STOP a VSVH (Stavby na tvorbu a ochranu prostredia a Vodné hospodárstvo a vodné stavby), aj študenti iných odborov môžu v nich nájsť užitočného pomocníka.

Náplň predmetu Matematika 1 pre odbory STOP a VSVH sa skladá z dvoch relatívne samostatných celkov, ktoré tvoria Lineárna algebra a analytická geometria a Základy diferenciálneho počtu funkcie jednej premennej. Skriptá, ktoré máte pred sebou, sú zamerané na prvý celok. Sú rozdelené na 6 kapitol. Každá kapitola obsahuje riešenia vzorových príkladov, po ktorých nasledujú cvičenia (s výsledkami) na samostatnú prácu študentov.

Skriptá v žiadnom prípade nemôžu a ani nechcú nahradiť prednášky. Hoci v jednotlivých kapitolách pripomíname základné pojmy (a v prvých dvoch aj podrobne rozoberáme riešenia sústav lineárnych rovníc), študent tu nenájde príslušnú matematickú teóriu. Naopak, skriptá sú určené na uľahčenie získania praktických zručností pri riešení príkladov. Sú koncipované ako doplnok ku cvičeniam v predmete Matematika 1.

Veríme, že skriptá budú vhodnou pomôckou pre samostatnú prípravu študentov na semestrálne testy a na skúšku.

Na záver si dovoľujeme poďakovať prof. RNDr. Jozefovi Širáňovi, DrSc. za odborné rady a doc. RNDr. Róbertovi Jajcayovi, PhD. a Mgr. Štefanovi Gyürkimu, PhD. za starostlivé prečítanie materiálu a za pripomienky, ktoré prispeli k zlepšeniu tohoto textu.

Obsah

Kapitola 1

Sústavy lineárnych rovníc 1

V prvých dvoch kapitolách sa budeme venovať metódam riešenia sústav lineárnych rovníc v reálnych číslach. Z výsledkov lineárnej algebry vieme, že môžu nastať tri možnosti: Lineárna sústava

a.) má jedno riešenie;
b.) nemá žiadne riešenie;
c.) má nekonečne veľa riešení.

V tejto kapitole sa budeme zaoberať sústavami lineárnych rovníc, ktoré sú "jednoduchšie" v tom zmysle, že majú buď jediné riešenie, alebo riešenie nemajú. Metódu riešenia sa budeme učiť priamo na príkladoch.

Pri riešení sústav lineárnych rovníc budeme systematicky používať nasledujúci fakt:

Množina riešení sústavy lineárnych rovníc sa nezmení aplikovaním ktorejkoľvek operácie **O1**, **O2**, **O3**, kde

O1 je výmena poradia dvoch rovníc,

O2 je vynásobenie jednej z rovníc akoukoľvek nenulovou konštantou,

O3 je pripočítanie nejakého násobku jednej rovnice k inej rovnici.

Príklad č. 1. Vyriešme nasledujúcu sústavu rovníc o troch neznámych:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 4z & = & -12 \\ x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

Riešenie: Obvykle je výhodné mať v ľavom hornom rohu sústavy v prvej rovnici, v našom prípade pri neznámej x, koeficient 1. Ak to tak nie je, vždy máme viacero spôsobov, ako toho dosiahnuť. Prvou a najjednoduchšou možnosťou je vymeniť prvú rovnicu za druhú. Ďalšou možnosťou by bolo vynásobiť prvú rovnicu číslom 1/2, ale tým by sme si v prvom riadku vytvorili zlomky. Zlomkom sa pri výpočtoch budeme snažiť vyhnúť v čo najväčšej miere, preto v riešení príkladu pokračujeme výmenou prvých dvoch rovníc.

Sústavu si teda použitím operácie **O1** prepíšeme do ekvivalentného tvaru:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & -12 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

Naším ďalším cieľom bude upraviť sústavu do takého tvaru, aby v druhej a tretej rovnici už nefigurovala neznáma x. Dosiahneme to pripočítaním vhodného násobku prvej rovnice k druhej a tretej rovnici. Vidíme, že na mieste pri neznámej x v druhej rovnici sa nachádza konštanta 2 a v tretej rovnici konštanta 3. Takže stačí, ak prvú rovnicu vynásobíme najskôr číslom (-2) a pripočítame k druhej rovnici a následne číslom (-3) a pripočítame k tretej rovnici. Tým eliminujeme x v oboch rovniciach.

Po vykonaní vyššie popísaných úprav, čiže dvojnásobným použitím operácie **O3**, dostávame ekvivalentnú, ale zredukovanú sústavu rovníc:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ & & y & + & 2z & = & -2 \\ & & 7y & - & z & = & 16 \end{array}$$

Po eliminácii neznámej x pokračujeme ďalej v eliminácii druhej neznámej y v tretej rovnici. Keďže pri neznámej y v druhej rovnici už koeficient 1 máme, naším ďalším cieľom je, aby v tretej rovnici už neznáma y nefigurovala. Dosiahneme to pripočítaním (-7)-násobku druhej rovnice k tretej rovnici. Touto operáciou **O3** získame zredukovanú sústavu rovníc, ktorá je ekvivalentná s pôvodnou sústavou:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ & & y & + & 2z & = & -2 \\ & & & - & 15z & = & 30 \end{array}$$

Nakoniec upravíme sústavu tak, aby koeficient 1 figuroval aj pri neznámej z v tretej rovnici. Stačí vydeliť poslednú rovnicu číslom (-15), čiže použiť operáciu **O2**:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ & & y & + & 2z & = & -2 \\ & & & & z & = & -2 \end{array}$$

Pri pohľade na tento zredukovaný tvar sústavy vidíme, že sme vypočítali neznámu z, ktorej hodnota je (-2). Teraz už len stačí, aby sme hodnotu $z = -2$ dosadili do druhej rovnice, odkiaľ už ľahko vypočítame neznámu y, ktorej hodnota je 2. Napokon dosadíme do prvej rovnice hodnoty za $y = 2$ a $z = -2$ a vyjadríme si poslednú neznámu x, ktorej hodnota je 1.

Riešenie sústavy môžeme vypočítať aj iným, univerzálnejším spôsobom, ktorého výhody uvidíte v kapitole 2.

Tentoraz sa zameriame na poslednú rovnicu sústavy. Opäť pripočítavame násobky jednej rovnice k ďalším dvom, len postupujeme opačným smerom. Naším cieľom je eliminovať neznámu z v prvej a druhej rovnici. Najprv poslednú rovnicu vynásobíme koeficientom (-2) a pripočítame k druhej rovnici, čiže použijeme operáciu **O3**.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ & & y & & & = & 2 \\ & & & & z & = & -2 \end{array}$$

Podobne použijeme operáciu **O3** k eliminácii neznámej z v prvej rovnici, čiže pripočítame (-1)-násobok poslednej rovnice k prvej rovnici.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & & = & -3 \\ & & y & & & = & 2 \\ & & & & z & = & -2 \end{array}$$

Zostáva nám už len odstrániť neznámu y v prvej rovnici. V poslednom kroku opäť použijeme operáciu **O3** tak, že pripočítame 2-násobok druhej rovnice k prvej rovnici, a tým eliminujeme aj poslednú neznámu y. Dostávame výslednú sústavu rovníc:

$$\begin{array}{rrrcr} x & & & = & 1 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & -2 \end{array}$$

Týmto posledným krokom sme zobrazili všetky riešenia. Naša sústava má jediné riešenie, a to $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$. O správnosti výsledku sa môžeme presvedčiť dosadením riešenia do pôvodnej sústavy lineárnych rovníc. Ak sa pravá strana rovnice bude rovnať ľavej strane vo všetkých troch rovniciach sústavy, úloha je vyriešená správne.

Pozrime sa opäť na celý postup výpočtu. Vidíme, že podstatné sú len koeficienty pri x, y, z a hodnoty na pravých stranách rovníc. Preto teraz zhrnieme celý postup riešenia predchádzajúcej sústavy v dvoch stĺpcoch. V ľavom stĺpci budeme sústavu riešiť rovnako,

ako sme to urobili vyššie. V pravom stĺpci budeme všetky operácie vykonávať len na tabuľke, ktorá bude usporiadaná rovnako, ako rovnice, ale bude obsahovať len koeficienty a hodnoty na pravých stranách. Inak povedané, tabuľku na pravej strane dostaneme z našej sústavy vynechaním neznámych x, y, z, pričom znamienko "=" nahradíme rovnou zvislou čiarou. To znamená, že čísla v prvom stĺpci tabuľky sú koeficienty pri x, v druhom stĺpci sú koeficienty pri y, v treťom stĺpci sú koeficienty pri z, a v stĺpci za čiarou sú pravé strany rovníc. Vždy majme na pamäti, že riadky tabuľky zodpovedajú rovniciam a stĺpce zodpovedajú jednotlivým neznámym a pravým stranám.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 4z & = & -12 \\ x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 4 & -12 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

V predošlom texte sme uviedli tri princípy postupnej eliminácie neznámych x, y, z, pomocou operácií **O1 - O3** na rovniciach sústavy. Tieto operácie zodpovedajú nasledujúcim operáciám na "tabuľke" a nazývame ich elementárne riadkové operácie (ERO):

ERO 1: Výmena poradia dvoch riadkov.

ERO 2: Vynásobenie jedného riadku nenulovou konštantou.

ERO 3: Pripočítanie násobku jedného riadku k inému riadku.

Sústavy teda riešime postupným aplikovaním elementárnych riadkových operácií a je úplne jedno, či to robíme na sústavách rovníc alebo na "tabuľkách". V lineárnej algebre táto "tabuľka" má svoje meno a nazýva sa **rozšírená matica sústavy**. Pustime sa teda do ilustrácie predchádzajúceho riešenia na sústave rovníc (vľavo) a na rozšírenej matici sústavy (vpravo).

1. krok: výmena poradia rovníc **(O1)**

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & = & -12 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

1. krok: výmena poradia riadkov **(ERO1)**

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 4 & -12 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

2. krok: pripočítanie (-2)-násobku prvej rovnice k druhej **(O3)**

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ & & y & + & 2z & = & -2 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

2. krok: pripočítanie (-2)-násobku prvého riadku k druhému **(ERO3)**

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

3. krok: pripočítanie (-3)-násobku prvej rovnice k druhej **(O3)**

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ & & y & + & 2z & = & -2 \\ & & 7y & - & z & = & 16 \end{array}$$

3. krok: pripočítanie (-3)-násobku prvého riadku k druhému **(ERO3)**

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & 16 \end{array}\right)$$

4. krok: pripočítanie (-7)-násobku prvej rovnice k druhej **(O3)**

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ & & y & + & 2z & = & -2 \\ & & & - & 15z & = & 30 \end{array}$$

4. krok: pripočítanie (-7)-násobku prvého riadku k druhému **(ERO3)**

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -15 & 30 \end{array}\right)$$

5. krok: delíme tretiu rovnicu číslom (-15) **(O2)**

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ & & y & + & 2z & = & -2 \\ & & & & z & = & -2 \end{array}$$

5. krok: delíme tretí riadok číslom (-15) **(ERO2)**

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

6. krok: pripočítanie (-2)-násobku tretej rovnice k druhej **(O3)**

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -5 \\ & & y & & & = & 2 \\ & & & & z & = & -2 \end{array}$$

6. krok: pripočítanie (-2)-násobku tretieho riadku k druhému **(ERO3)**

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

7. krok: pripočítanie (-1)-násobku tretej rovnice k prvej **(O3)**

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & -3 \\ & & y & & & = & 2 \\ & & & & z & = & -2 \end{array}$$

7. krok: pripočítanie (-1)-násobku tretieho riadku k prvému **(ERO3)**

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

8. krok: pripočítanie 2-násobku druhej rovnice k prvej **(O3)**

$$\begin{array}{rrrcr} x & & & = & 1 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & -2 \end{array}$$

8. krok: pripočítanie 2-násobku druhého riadku k prvému **(ERO3)**

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Vidíme, že sústava má jediné riešenie $x = 1,\ y = 2,\ z = -2$, a to nezávisle na spôsobe zápisu, či už ako sústava troch rovníc o troch neznámych alebo v "tabuľkovej" forme. □

Príklad č. 2. Vyriešme pre zmenu sústavu štyroch rovníc o štyroch neznámych:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & -2 \\ 3x & + & 3y & & & - & t & = & 6 \\ 2x & + & y & + & z & & & = & 5 \\ x & + & 2y & + & 2z & - & t & = & 4 \end{array}$$

Riešenie:

Krok č. 1: Teraz si už prepíšeme sústavu rovníc do "tabuľkovej" formy, čiže pomocou rozšírenej matice sústavy.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Krok č. 2: V ľavom hornom rohu máme na mieste neznámej x konštantu 1, čo nám vyhovuje. Začneme elimináciou prvkov v stĺpci pod "jednotkou". Ak pripočítame (-3)-násobok prvého riadku k druhému riadku, touto operáciou **(ERO3)** získame nulu v druhom riadku na prvej pozícii.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -7 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Krok č. 3: Pokračujeme ďalej v eliminácii prvkov v prvom stĺpci pod vedúcou jednotkou pripočítaním (-2)-násobku prvého riadku k tretiemu riadku, teda použijeme operáciu **(ERO3)**. Týmto krokom získame nulu aj v treťom riadku na prvej pozícii.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 3 & -4 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Krok č. 4: Ďalším krokom bude pripočítanie (-1)-násobku prvého riadku k štvrtému riadku. Týmto krokom **(ERO3)** vynulujeme aj poslednú hodnotu v prvom stĺpci.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 3 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

Krok č. 5: Teraz sa pozrieme na pozíciu neznámej y v druhom riadku tabuľky. Vidíme tam konštantu (-3). Ako sme už spomenuli, chceli by sme tam mať konštantu 1 a pod jednotkou elementárnymi riadkovými operáciami získať v stĺpci pod jednotkou nuly. Môžeme to dosiahnuť dvomi spôsobmi. Prvou možnosťou je vydeliť druhý riadok číslom (-3), aby sme získali jednotku, a potom pripočítať 3-násobok druhého riadku k tretiemu riadku. Druhou možnosťou je pripočítať (-1)-násobok druhého riadku k tretiemu riadku, a tak eliminovať konštantu na pozícii neznámej y. Prvá možnosť je nevýhodná, lebo by sme už v tomto štádiu riešenia sústavy zaviedli zlomky a ťažšie by sa nám s nimi počítalo pri nasledujúcich operáciách. Druhá možnosť je teda pre nás výhodnejšia. Jednotku na druhej pozícii v druhom riadku dostaneme úpravami v niektorom z ďalších krokov. Takže pripočítame (-1)-násobok druhého riadku k tretiemu riadku operáciou **(ERO3)** a dostaneme pod pozíciou neznámej y nulu.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

Krok č. 6: Vidíme, že na pozícii tretej neznámej z v treťom riadku tabuľky je číslo 0. My ale chceme, aby tam bol nenulový koeficient. Získame ho použitím operácie **(ERO1)**, čiže výmenou tretieho a štvrtého riadku tabuľky.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -7 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Teraz sa zameriame na posledný riadok tabuľky. Našou úlohou je eliminovať konštanty v stĺpci nad neznámou t.

Krok č. 7: Začneme elimináciou v treťom riadku. Stačí pripočítať štvrtý riadok k tretiemu, čiže aplikovať operáciu **(ERO3)**.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -7 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Krok č. 8: Teraz už môžeme vydeliť tretí a štvrtý riadok číslom 3, a tým získame konštantu 1 na pozíciách neznámej z a t. Čiže z matematického pohľadu ide o dvojnásobné použitie operácie **(ERO2)**.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -7 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Krok č. 9: V tomto kroku pripočítame 7-násobok štvrtého riadku k tretiemu riadku, a tým vynulujeme hodnotu na pozícii neznámej t v tomto riadku (operácia **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Krok č. 10: Ešte potrebujeme vynulovať poslednú nenulovú hodnotu v stĺpci nad neznámou t, a preto opäť použijeme operáciu **(ERO3)**, čiže pripočítame (-2)-násobok posledného riadku k prvému riadku.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Krok č. 11: Pokračujeme elimináciou hodnôt v stĺpci nad neznámou z, čiže nad koeficientom 1 v treťom riadku. Pripočítame (-3)-násobok tretieho riadku k druhému (operácia **(ERO3)**), čím vynulujeme koeficient nad touto vedúcou jednotkou v tomto riadku.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Krok č. 12: Podobne použitím operácie **(ERO3)** eliminujeme aj poslednú hodnotu v stĺpci nad neznámou z, a to pripočítaním tretieho riadku k prvému.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Zostáva nám ešte získať jednotku na pozícii neznámej y v druhom riadku a nad jednotkou získať nulu.

Krok č. 13: Najprv vydelíme druhý riadok číslom (-3), (použijeme **(ERO2)**). Doteraz sme sa úspešne zlomkom vyhýbali, ale v tomto kroku inú možnosť nemáme.

$$\left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Krok č. 14: V poslednom kroku pripočítame (-2)-násobok druhého riadku k prvému riadku (**(ERO3)**), čím v stĺpci nad neznámou y dostaneme nulu.

$$\left(\begin{array}{cccc|r} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 7/3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right)$$

Elementárnymi riadkovými operáciami sme získali na diagonále tabuľky na pozíciách neznámych x, y, z, t jednotky, a pod a nad jednotkami nuly. Každej jednotke zodpovedá daná neznáma a na pravej strane tabuľky sa nachádza výsledok sústavy rovníc. Vidíme, že sústava rovníc má jediné riešenie, a to $x = 7/3$, $y = -2/3$, $z = 1$, $t = -1$. $\square$

Doteraz sme sa zaoberali sústavami rovníc, ktoré mali jediné riešenie. Teraz sa sústredíme na sústavy, ktoré nemajú riešenie.

Príklad č. 3. Vyriešme sústavu troch rovníc o štyroch neznámych:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & 8z & - & 2t & = & 3 \\ x & + & 3y & + & 7z & + & 2t & = & 2 \\ 2x & - & 9y & - & 4z & - & 14t & = & 8 \end{array}$$

Riešenie:

Krok č. 1: Prepíšeme si sústavu rovníc do "tabuľkového tvaru", čiže do rozšírenej matice sústavy.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 8 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & -9 & -4 & -14 & 7 \end{array}\right)$$

Krok č. 2: Už vieme z predchádzajúcich príkladov, že najlepšie je, ak máme v ľavom hornom rohu na pozícii neznámej x koeficient 1, pretože s jednotkou sa nám dobre pracuje. Z tohto dôvodu vymeníme prvý a druhý riadok tabuľky **(ERO1)**, čím získame na vedúcej pozícii jednotku.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & -2 & 3 \\ 2 & -9 & -4 & -14 & 7 \end{array}\right)$$

Krok č. 3: Potrebujeme eliminovať koeficienty v stĺpci pod vedúcou jednotkou, a preto pripočítame (-2)-násobok prvého riadku k druhému a tretiemu riadku. Touto dvojnásobnou operáciou **(ERO3)** vynulujeme koeficienty pod vedúcou jednotkou.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -6 & -6 & -1 \\ 0 & -15 & -18 & -18 & 3 \end{array}\right)$$

Krok č. 4: Pozrieme sa na druhý riadok tabuľky, konkrétne na koeficient prislúchajúci neznámej y. Je tam koeficient (-5). Náš ďalší postup, podľa doteraz získaných poznatkov, by bol získať jednotku na tejto pozícii. Ale nie vždy je tento krok pre nás výhodný. Vidíme, že v treťom riadku máme hodnoty, ktoré sú trojnásobkom všetkých koeficientov druhého riadku. Takže vhodnejšie bude, ak pripočítame (-3)-násobok druhého riadku k tretiemu **(ERO3)**.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -6 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Výsledok, ktorý týmto krokom získame, sa trošku líši od výsledného riešenia doteraz počítaných príkladov. V poslednom riadku tabuľky na ľavej strane sme dostali samé nuly a na pravej strane od zvislej čiary máme konštantu. Ak by sme chceli tento výsledok prepísať späť do rovnice, dostaneme $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot t = 6$. Táto rovnica však nie je splnená pre žiadne x, y, z, t. To znamená, že naša sústava rovníc nemá riešenie. $\square$

Príklad č. 4. Riešme sústavu štyroch rovníc o štyroch neznámych:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & 3y & + & 6z & - & t & = & 1 \\ 3x & - & y & + & 5z & - & t & = & 1 \\ 8x & - & 4y & + & 16z & - & 4t & = & 3 \\ 9x & - & y & + & 15z & - & 5t & = & 1 \end{array}$$

Riešenie:

Krok č. 1: Rozšírená matica tejto sústavy má tvar:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 6 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -1 & 1 \\ 8 & -4 & 16 & -4 & 3 \\ 9 & -1 & 15 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

Krok č. 2: Tentoraz budeme počítať sústavu bez "vedúcej jednotky" v ľavom hornom rohu na pozícii neznámej x. Môžeme začať niekoľkými spôsobmi. Prvým krokom bude pripočítanie (-4)-násobku prvého riadku k tretiemu riadku. Touto operáciou **(ERO3)** sme získali v prvom stĺpci na tretej pozícii nulu.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 6 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -8 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 15 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

Krok č. 3: V ďalšom kroku pripočítame (-3)-násobok druhého riadku k štvrtému riadku a získame nulu na štvrtej pozícii prvého stĺpca (dvojnásobné použitie **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 6 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -8 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Krok č. 4: Teraz pripočítame 3-násobok prvého riadku k (-2)-násobku druhého riadku (použijeme operáciu **(ERO3)**), čím vynulujeme poslednú nenulovú hodnotu pod vedúcim prvkom v prvom stĺpci.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -8 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Krok č. 5: Skúsime zjednodušiť niektorý z ďalších riadkov tabuľky, a preto spočítame druhý a tretí riadok (použijeme **(ERO3)**). Týmto dostaneme v treťom riadku "krajšie hodnoty", s ktorými sa bude lepšie narábať.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Krok č. 6: Keď sa pozrieme na tretí a štvrtý riadok tabuľky, vidíme, že stačí len použiť **(ERO3)**, čiže pripočítať (-2)-násobok tretieho riadku k štvrtému riadku.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Z posledného riadku tabuľky vidíme, že už ďalej nie je potrebné počítať, keďže rovnica $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot t = -2$ nemá riešenie. Takže aj sústava rovníc nemá riešenie. $\square$

Príklady na cvičenia:

Vypočítajte všetky riešenia nasledujúcich sústav rovníc:

1.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 6 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 10 \\ 4x & + & y & - & 3z & = & -2 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = 1$, $y = -3$, $z = 1$.

2.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & 6y & - & 7z & = & -3 \\ 9x & - & 6y & + & 3z & = & 9 \\ 9x & - & 3y & + & 2z & = & 6 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = \frac{2}{5}$, $y = -\frac{6}{5}$, $z = -\frac{3}{5}$.

3.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & 2z & + & 2t & = & 5 \\ 3x & - & 4y & - & 3z & + & 3t & = & 12 \\ -x & + & 4y & - & 7z & + & 7t & = & 10 \end{array}$$

Výsledok: Sústava nemá riešenie.

4.
$$\begin{array}{rcrcrcr} (3/2)x & - & (3/2)y & - & (3/2)z & = & (2/3) \\ (5/6)x & - & (5/6)y & - & (5/6)z & = & -(5/6) \end{array}$$

Výsledok: Sústava nemá riešenie.

5.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 5y & - & z & = & 8 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & 5y & + & z & = & 6 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = -\frac{6}{5}$, $y = 2$, $z = -\frac{2}{5}$.

6.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 8 \\ & - & y & + & 5z & = & 9 \\ 2x & - & 9y & + & 7z & = & 11 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$.

7.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 15 \\ 5x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & - & 5y & - & z & = & 19 \\ 6x & - & 4y & + & 2z & = & 30 \end{array}$$

Výsledok: Sústava nemá riešenie.

8.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & 4y & - & z & = & 0 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

9.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 4z & = & -5 \\ 3x & + & 2y & + & 5z & = & -2 \\ -x & - & 10y & - & 11z & = & 1 \end{array}$$

Výsledok: Sústava nemá riešenie.

10.
$$\begin{array}{rcrcrcr} & - & 3y & + & 11z & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & 8z & = & 8 \\ x & & & + & 5z & = & 5 \\ 5x & - & 3y & - & z & = & 6 \end{array}$$

Výsledok: Sústava nemá riešenie.

11.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 4y & + & 9z & - & t & = & 9 \\ 3x & - & 7y & + & 17z & + & 2t & = & 16 \\ x & + & y & - & z & + & 4t & = & 0 \end{array}$$

Výsledok: Sústava nemá riešenie.

12.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & y & - & z & + & 2t & = & 3 \\ -3x & + & 3y & - & 2z & + & 3t & = & 3 \\ 2x & + & 2y & - & 4z & - & 2t & = & -2 \\ 3x & & & & & - & 3t & = & -3 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 2$.

13.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & - & 3z & = & 1 \\ 4x & - & y & - & 5z & = & 2 \\ -x & - & 3y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = \frac{13}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$, $z = \frac{9}{5}$.

14.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & - & t & = & 1 \\ -x & - & y & + & 2z & - & 3t & = & -2 \\ 4x & + & 7y & + & z & & & = & 5 \\ -x & & & + & 5z & - & 7t & = & -5 \end{array}$$

Výsledok: Sústava nemá riešenie.

15.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & 5z & = & 7 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 7 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$.

16.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -2 \\ 4x & + & y & - & 3z & = & -15 \\ 3x & + & 5y & & & = & -4 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = -\frac{13}{4}$, $y = \frac{23}{10}$, $z = \frac{21}{20}$.

17.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & y & - & 5z & = & -11 \\ 3x & + & 3y & - & 6z & = & -6 \\ x & + & 3y & + & z & = & 0 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = -3$, $y = 1$, $z = 0$.

18.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 4z & - & t & = & 8 \\ 3x & - & 5y & + & 7z & - & 4t & = & 15 \\ & - & y & + & 2z & + & 5t & = & 6 \\ x & - & 3y & + & 5z & - & 8t & = & 1 \end{array}$$

Výsledok: Sústava nemá riešenie.

19.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & 2y & & & - & 2t & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & 2z & - & 2t & = & 0 \\ 3x & + & 5y & + & z & & & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & - & t & = & 0 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

20.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & 4z & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ -3x & + & y & - & 5z & + & t & = & 1 \\ -2x & + & y & - & 4z & + & t & = & 6 \end{array}$$

Výsledok: Sústava nemá riešenie.

21.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 4z & - & 3t & = & -1 \\ 2x & + & y & + & z & - & 3t & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 8z & + & 2t & = & 5 \\ x & & & + & 2z & + & t & = & 5 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = \frac{11}{3}$, $y = 0$, $z = -\frac{1}{3}$, $t = 2$.

22.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 3y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 3 \\ 3x & - & 2y & + & 5z & = & 4 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.

23.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & + & 3z & + & 3t & = & 7 \\ 2x & + & 3y & - & z & + & 2t & = & 13 \\ -x & + & 2y & - & 4z & - & t & = & 6 \\ x & + & 5y & - & 5z & + & t & = & 19 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = 8/7$, $y = 25/7$, $z = 0$, $t = 0$.

24.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & 7 \\ x & + & 2y & + & 4z & + & 2t & = & 3 \\ x & - & 5y & + & z & + & 2t & = & -4 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, $t = 0$.

25.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 3y & - & z & = & -6 \\ 2x & & & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 5z & = & -4 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = 2$, $y = 5$, $z = -3$.

26.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 5z & = & -7 \\ & - & 2y & + & 4z & = & -12 \\ 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ & - & 2y & + & 4z & = & -12 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$.

27.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & + & t & = & 0 \\ x & - & 3y & + & z & - & t & = & 3 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & + & 2t & = & 1 \\ x & + & y & & & + & 2t & = & 3 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má jediné riešenie: $x = 1/3$, $y = -4/3$, $z = 2/3$, $t = 2$.

28.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & 3 \\ x & - & y & - & z & - & t & = & 2 \\ & & y & & & - & 3t & = & 1 \\ & & 2y & + & 2z & + & t & = & 1 \end{array}$$

Výsledok: Sústava nemá riešenie.

Kapitola 2

Sústavy lineárnych rovníc 2

V tejto kapitole sa budeme zaoberať sústavami lineárnych rovníc, ktoré majú nekonečne veľa riešení.

Príklad č. 1. Riešme sústavu štyroch rovníc o štyroch neznámych:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & y & - & z & + & 2t & = & -1 \\ & & 3y & - & 3z & & & = & -3 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & - & 4t & = & -2 \\ x & + & 5y & - & 5z & - & 2t & = & -5 \end{array}$$

Riešenie:

Krok č. 1: Sústavu si prepíšeme do tvaru rozšírenej matice sústavy (do tabuľky).

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Krok č. 2: Na prvý pohľad vidieť, že číslo (-1) v pravom hornom rohu matice je pre nás výhodné, pretože ak pripočítame 2-násobok prvého riadku matice k tretiemu riadku a následne spočítame prvý a posledný riadok matice, získame v prvom stĺpci na pozíciách neznámej x pod číslom (-1) nuly (dvojnásobé použitie **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & -6 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

Krok č. 3: Aby sa nám lepšie počítalo, vydelíme tretí riadok rozšírenej matice číslom 4 a štvrtý riadok číslom 6 (dvojnásobné použitie **(ERO2)**).

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Krok č. 4: Nasledujúce úpravy sú zrejmé, pretože až tri riadky matice sú úplne identické. Stačí pripočítať (-1)-násobok druhého riadku matice k tretiemu a štvrtému riadku. Týmito úpravami, použitím dvojnásobnej operácie **(ERO3)**, sa vynulovali posledné dva riadky matice.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Krok č. 5: Pozrime sa teraz na pozíciu neznámej y v druhom riadku. Je tam koeficient 1 a v stĺpci pod jednotkou sú už nuly, ale nad jednotkou je ešte koeficient 1. Takže nasledujúcim krokom je eliminácia čísla 1 v prvom riadku na pozícii y. Pripočítame teda (-1)-násobok druhého riadku matice k prvému riadku **(ERO3)**, čím spomínanú jednotku vynulujeme.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Krok č. 6: Posledným krokom je už len zmena znamienok v prvom riadku rozšírenej matice, aby hodnota v ľavom hornom rohu bola kladná jednotka.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Týmto krokom sme skončili úpravu rozšírenej matice sústavy. V dvoch posledných riadkoch máme nuly a len v stĺpcoch pre neznáme x a y je koeficient 1 a ostatné prvky v týchto dvoch stĺpcoch sú nuly. Zároveň vidíme, že počet nenulových riadkov v poslednej matici je menší, ako počet neznámych. V takomto prípade postupujeme nasledovne. Prepíšeme si výsledok z poslednej matice naspäť do tvaru rovníc. Keďže máme len dva nenulové riadky, budeme mať len dve rovnice:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & & & - & 2t & = & 0 \\ & & y & - & z & & & = & -1 \end{array}$$

Jednotky pri x a y nazveme **pivotné** jednotky a x, y nazveme **pivotné** neznáme. Po vyjadrení pivotných neznámych dostaneme:

$$\begin{aligned} x &= 0 \qquad + 2t \\ y &= -1 + z \end{aligned} \tag{2.1}$$

Túto sústavu teraz prepíšeme tak, že nepivotným neznámym priradíme nové premenné, ktoré budeme nazývať **parametre**. V našom prípade nepivotné neznáme sú z, t a priradíme im parametre, povedzme $z = v$, $t = w$, a napíšeme tieto rovnice spolu s (2.1). Dbajme pritom na kultúru písania:

$$\begin{array}{rcrcrr} x & = & & & & 2w \\ y & = & -1 & - & v & \\ z & = & & & v & \\ t & = & & & & w \end{array}$$

Posledný výsledok už len prepíšeme do tvaru súčtu vektorov:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Všetky riešenia (x, y, z, t) sú súčtom stĺpcového vektora $(0, -1, 0, 0)$, v-násobku stĺpcového vektora $(0, -1, 1, 0)$ a w-násobku stĺpcového vektora $(2, 0, 0, 1)$. Keďže v a w môžu byť ľubovoľné reálne čísla (nazývané aj parametre), vidíme, že naša sústava má nekonečne veľa riešení. Podstatné je, že formulka (2.2) dáva všetky riešenia našej sústavy.

□

Príklad č. 2: Riešme opäť sústavu troch rovníc o štyroch neznámych.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x & - & 2y & - & 2z & + & 6t & = & 0 \\ -2x & + & y & - & 3z & + & 5t & = & 0 \\ 2x & - & y & - & 2z & + & 2t & = & -3 \end{array}$$

Riešenie:

Krok č. 1: Prepíšeme si sústavu rovníc do maticového tvaru.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & -2 & -2 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Krok č. 2: V prvom riadku rozšírenej matice máme koeficienty deliteľné číslom 2, takže prvý riadok vydelíme dvojkou (operácia **(ERO2)**), aby sa nám lepšie počítalo. Na pozícii neznámej x máme v druhom riadku hodnotu (-2) a v treťom riadku hodnotu 2. Preto pripočítame druhý riadok rozšírenej matice k tretiemu riadku, použijúc **(ERO3)**.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Krok č. 3: V tomto kroku opäť len pripočítame prvý riadok k druhému riadku použitím **(ERO3)**. V prvom stĺpci pod neznámou x už máme nuly.

$$\left(\begin{array}{lrrr|r} 2 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Krok č. 4: Druhý riadok matice si trošku zjednodušíme použitím pravidla **(ERO2)** tým, že ho vydelíme číslom (-4).

$$\left(\begin{array}{lrrr|r} 2 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Krok č. 5: V druhom riadku matice máme na pozíciách neznámych x a y nuly, ale v druhom riadku na pozícii neznámej z máme jednotku, čo bude naša ďalšia pivotná neznáma. Pokračujeme v elementárnych úpravách pripočítaním druhého riadku k prvému riadku matice a taktiež pripočítaním 5-násobku druhého riadku matice k tretiemu riadku. Týmito dvoma krokmi sme eliminovali koeficienty nad a pod jednotkou prislúchajúcou neznámej z v treťom stĺpci (dvojnásobné použitie pravidla **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{lrrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Krok č. 6: Keďže chceme mať aj na pozícii poslednej neznámej t v poslednom riadku jednotku, videlíme tretí riadok matice číslom (-3), čiže použijeme pravidlo **(ERO2)**.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Krok č. 7: Pokračujeme v eliminácii koeficientov v poslednom stĺpci nad neznámou t, a to pripočítaním 2-násobku tretieho riadku k druhému riadku a taktiež pripočítaním (-1)-násobku tretieho riadku k prvému riadku matice (dvojnásobné použitie **(ERO3)**). Týmto sme získali nuly aj v poslednom stĺpci nad neznámou t.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Krok č. 8: V poslednom kroku už len vydelíme prvý riadok matice číslom 2 (pravidlo **(ERO2)**), aby sme mali vedúcu jednotku aj v prvom riadku na pozícii neznámej x.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right)$$

Toto bol posledný krok, ktorým sme skončili úpravu rozšírenej matice. Vidíme, že pivotné jednotky, ktoré prislúchajú pivotným neznámym x, z a t, máme v prvom, treťom a štvrtom riadku. Keďže máme väčší počet neznámych, ako je počet riadkov v matici, vieme, že sústava rovníc bude mať nekonečne veľa riešení.

Výsledné riešenie sústavy treba ešte vhodne zapísať. Prepíšeme si výslednú maticu do tvaru rovníc:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 1/2y & & & & & = & -1/2 \\ & & & & z & & & = & 2 \\ & & & & & & t & = & 1 \end{array}$$

Po vyjadrení pivotných premenných máme:

$$\begin{array}{rcrcl} x & = & -1/2 & + & (1/2)y \\ z & = & 2 & & \\ t & = & 1 & & \end{array}$$

Nepivotnej premennej priradíme novú premennú - parameter. Našou jedinou nepivotnou premennou je y, ktorej priradíme parameter v, teda $y = v$.

$$\begin{array}{rcrcr} x &=& -1/2 &+& (1/2)v \\ y &=& & & v \\ z &=& 2 & & \\ t &=& 1 & & \end{array}$$

Tento výsledok už len prepíšeme ako súčet vektorov a dostaneme všetky riešenia v tvare:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

Príklad č. 3. Riešme ďalšiu sústavu štyroch rovníc o piatich neznámych:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & - & 3y & + & 3z & - & 6t & - & 2u & = & -1 \\ x & - & y & + & 2z & - & 3t & + & u & = & 4 \\ x & + & 2y & + & 2z & + & 3t & + & u & = & 1 \\ 5x & + & 3y & + & 4z & + & t & + & 5u & = & 12 \end{array}$$

Riešenie:

Krok č. 1: Sústavu rovníc si prepíšeme do tvaru rozšírenej matice

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -3 & 3 & -6 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 5 & 12 \end{array}\right)$$

Krok č. 2: Sústredíme sa najprv na prvý stĺpec rozšírenej matice. Pripočítame (-1)-násobok druhého riadku k tretiemu riadku a (-5)-násobok druhého riadku k štvrtému riadku. Týmito dvoma krokmi dostaneme nuly na pozíciach v prvom stĺpci pod jednotkou (dvojnásobné použitie **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -3 & 3 & -6 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 8 & -6 & 16 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

Krok č. 3: Aby sme mali vedúcu jednotku v ľavom hornom rohu matice, len vymeníme prvý a druhý riadok, použijúc **(ERO1)**. Aby sa nám lepšie počítalo, vydelíme tretí riadok číslom 3 a štvrtý riadok číslom 2 (dvojnásobné použitie **(ERO2)**).

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 8 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Krok č. 4: Vidíme, že v treťom riadku na pozícii neznámej y máme jednotku, preto použijeme operáciu **(ERO3)** a pripočítame (-4)-násobok tretieho riadku k štvrtému riadku, čím dostaneme pod ňou nulu.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Krok č. 5: Taktiež pripočítame 3-násobok tretieho riadku k druhému riadku rozšírenej matice a získame nulu aj v druhom riadku nad neznámou y (použitie **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Krok č. 6: V tomto kroku vymeníme druhý a tretí riadok matice použitím **(ERO1)**, aby sme vedúcu jednotku mali v druhom riadku a druhom stĺpci.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Krok č. 7: Pripočítame štvrtý riadok matice k tretiemu riadku **(ERO3)** a vydelíme posledný riadok číslom (-3) **(ERO2)**.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Krok č. 8: Opäť vydelíme tretí riadok číslom (-2) (použitie **(ERO2)**) a vymeníme tretí a štvrtý riadok rozšírenej matice (použitie **(ERO1)**), čím získame v treťom riadku na pozícii neznámej z jednotku.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Krok č. 9: V ďalšom našom postupe budeme eliminovať koeficienty nad vedúcimi jednotkami. Preto pripočítame (-1)-násobok štvrtého riadku k prvému riadku (operácia **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Krok č. 10: Pokračujeme v eliminácii koeficientov nad vedúcimi jednotkami, preto pripočítame (-2)-násobok tretieho riadku k prvému riadku matice. V poslednom kroku pripočítame druhý riadok matice k prvému riadku, a tým eliminujeme aj posledný nenulový koeficient v stĺpci nad vedúcou jednotkou (dvojnásobné použitie **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{array}\right)$$

Po tomto kroku máme pivotné jednotky, ktoré prislúchajú pivotným neznámym x, y, z a u, a jednu nepivotnú neznámu t. Počet neznámych je väčší ako počet riadkov v rozšírenej matici, teda vieme, že sústava rovníc bude mať nekonečne veľa riešení.

Opäť si prepíšeme výslednú maticu do tvaru rovníc:

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & - & t & & = & 1 \\ & y & & + & 2t & & = & -1 \\ & & z & & & & = & 0 \\ & & & & & u & = & 2 \end{array}$$

Po vyjadrení pivotných premenných máme:

$$\begin{array}{rclcl} x & = & 1 & + & t \\ y & = & -1 & - & 2t \\ z & = & 0 & & \\ u & = & 2 & & \end{array}$$

Nepivotnej premennej priradíme parameter $t = v$.

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & v \\ y & = & -1 & - & 2v \\ z & = & 0 & & \\ t & = & & & v \\ u & = & 2 & & \end{array}$$

Všetky riešenia našej sústavy vo vektorovom vyjadrení majú tvar:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

Príklad č. 4. Riešme sústavu štyroch rovníc o štyroch neznámych:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 5x & + & 4y & - & 6z & + & 5t & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 2z & + & t & = & 0 \\ 5x & + & 7y & - & 8z & + & 10t & = & 0 \\ 6x & + & 6y & - & 8z & + & 8t & = & 0 \end{array}$$

Riešenie:

Krok č. 1: Pravé strany všetkých rovníc sústavy sú nulové. Keďže táto skutočnosť sa nezmení aplikovaním akýchkoľvek elementárnych riadkových operácií, nemá význam opakovať písanie nulového stĺpca rozšírenej matice sústavy. Stačí preto pracovať len s tzv. maticou sústavy (bez stĺpca pravých strán) pomocou elementárnych riadkových operácií:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 7 & -8 & 10 \\ 6 & 6 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

Krok č. 2: Pripočítame (-1)-násobok prvého riadku k tretiemu riadku a taktiež pripočítame (-3)-násobok druhého riadku k štvrtému riadku (dvojnásobné použitie **(ERO3)**).

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Krok č. 3: Pripočítame (-1)-násobok tretieho riadku k štvrtému (**(ERO3)**). Posledný riadok matice sa nám týmto krokom vynuloval.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Krok č. 4: Pripočítame (-2)-násobok prvého riadku k 5-násobku druhého riadku (použijeme **(ERO2)**). Týmto krokom sme v prvom stĺpci dostali nuly pod konštantou 5 patriacou pivotnej neznámej x.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Krok č. 5: Pripočítame druhý riadok k tretiemu riadku **(ERO3)**, čím vynulujeme aj tretí riadok matice.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Krok č. 6: Pripočítame 4-násobok druhého riadku k 3-násobku prvého riadku, (aplikujeme **(ERO2)**), čím dostávame nuly pod aj nad konštantou (-3) patriacou pivotnej premennej y.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 & -5 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Krok č. 7: V treťom a štvrtom stĺpci na pivotných pozíciách sú nuly, takže ďalšia redukcia už nie je možná. Stačí len vydeliť prvý riadok číslom 5 a druhý riadok číslom

(-3) (operácia **(ERO2)**). Tento redukovaný tvar matice je konečným tvarom. Z výsledného tvaru matice vidíme, že sústava má nekonečne vela riešení.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prepíšeme si výslednú maticu do tvaru rovníc s tým, že na pravú stranu dopíšeme nuly.

$$\begin{array}{ccccccccc} x & & & - & 2z & - & t & = & 0 \\ & & y & - & (2/3)z & + & (5/3)t & = & 0 \end{array}$$

Po vyjadrení pivotných premmených máme:

$$\begin{array}{ccccccc} x & = & 0 & + & 2z & + & t \\ y & = & 0 & + & (2/3)z & - & (5/3)t \\ z & = & 0 & & & & \\ t & = & 0 & & & & \end{array}$$

Nepivotným premenným priradíme parameter $z = r$ a $t = s$.

$$\begin{array}{ccccccc} x & = & 0 & + & 2r & + & s \\ y & = & 0 & + & (2/3)r & - & (5/3)s \\ z & = & 0 & & & & \\ t & = & 0 & & & & \end{array}$$

Výsledok prepíšeme do tvaru súčtu vektorov, pričom nulový vektor možno vynechať.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

Všetky vzorové príklady z kapitoly 1 a 2 sme riešili spoločnou metódou, ktorá spočívala v úprave rozšírenej matice sústavy pomocou ERO 1-3 tak, aby sme vo výslednej matici mali nuly nad a pod pivotnými jednotkami v stĺpcoch patriacich pivotným neznámym. Táto metóda riešenia sústav lineárnych rovníc sa nazýva **Gaussova eliminačná metóda**.

Príklady na cvičenia:

Vypočítajte všetky riešenia nasledujúcich sústav rovníc:

1.
$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 4y & & & = & 5 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -5/12 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 7y & + & 4z & = & 1 \\ 6x & + & 6y & + & 6z & = & 0 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 \\ 1/7 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -3/7 \\ -4/7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 2y & - & z & + & t & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 4z & + & 3t & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & - & t & = & 0 \\ -2x & & & + & 7z & - & 5t & = & 0 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 7/2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -5/2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 3t & + & 3u & = & 5 \\ 2x & + & y & + & z & & & + & 4u & = & 9 \\ 2x & + & y & + & 4z & & & + & 2u & = & 5 \\ -x & - & y & + & 4z & - & t & - & u & = & -2 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & t & = & -2 \\ 3x & + & 8y & - & z & + & 4t & = & 5 \\ 4x & + & 11y & - & 2z & + & 6t & = & 11 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & & & = & -2 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & = & -4 \\ 2x & - & y & & & = & -2 \\ x & - & 3y & + & 15z & = & -6 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.
$$\begin{array}{rcrcrcr} (1/2)x & + & y & + & (3/2)z & = & 2 \\ (1/6)x & + & (1/3)y & + & (1/2)z & = & (2/3) \\ -(2/3)x & - & (8/15)y & - & (4/5)z & = & -(16/15) \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & -3 \\ 6x & + & 4y & + & 3z & = & -14 \\ 2x & & & + & z & = & 2 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 5x & + & 6y & + & 7z & = & 8 \\ 4x & + & 4y & + & 4z & = & 4 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10.
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x & - & y & + & z & & & + & 6u & = & 5 \\ 5x & - & 3y & + & 3z & - & t & + & 18u & = & 12 \\ 6x & + & 3y & + & 4z & - & 9t & + & 10u & = & 21 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

11.
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -4x & + & 2y & + & 3z & + & 10t & - & 8u & = & 4 \\ -2x & + & 3y & + & z & + & 11t & & & = & 11 \\ 5x & + & 3y & - & 10z & + & 4t & - & u & = & 10 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -271/39 \\ -122/39 \\ -176/39 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

12.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & + & 3z & + & 3t & = & 7 \\ 2x & + & 3y & - & z & + & 2t & = & 13 \\ -2x & + & 4y & - & 8z & - & 2t & = & 12 \\ x & + & 5y & - & 5z & + & t & = & 19 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/7 \\ 25/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -10/7 \\ 9/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

13.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 2z & + & 3t & = & 3 \\ & & 2y & & & + & 3t & = & 0 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 7/6 \\ -3/2 \\ 1/6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

14.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x & + & 12y & - & 18z & = & 6 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 12z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & 9z & = & 3 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

15.
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 7x & + & y & - & 3z & - & 3t & - & 9u & = & 0 \\ 4x & + & y & - & 2z & - & t & - & 5u & = & 0 \\ 3x & - & 3y & + & z & - & 7t & - & 5u & = & 0 \\ 2x & - & y & & & - & 3t & - & u & = & 0 \\ -4x & - & 4y & - & 4z & - & 4t & + & 10u & = & 0 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

16.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & + & 3z & + & 3t & = & 0 \\ 3x & + & 8y & - & 6z & + & 3t & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & + & 2t & = & 0 \\ & & 7y & - & 9z & & & = & 0 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -13/21 \\ 9/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

17.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & t & = & 2 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & 0 \\ 4x & - & 4y & + & 4z & & & = & 4 \\ -2x & + & 2y & - & 2z & + & t & = & -3 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

18.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} & & & & z & - & t & + & 2u & + & v & = & 0 \\ 3x & + & 6y & & & + & 3t & - & 3u & + & 2v & = & 7 \\ x & + & 2y & & & + & t & - & u & & & = & 1 \\ 2x & + & 4y & - & 2z & + & 4t & - & 6u & - & 5v & = & -4 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

19.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x & - & 2y & + & z & + & 2t & + & 2u & = & 1 \\ 6x & - & 3y & + & 2z & + & 4t & + & 5u & = & 3 \\ -2x & + & y & - & 3z & - & 7t & - & 11u & = & -8 \\ 4x & - & 2y & + & z & + & t & + & 2u & = & 1 \end{array}$$

Výsledok: Sústava má nekonečne veľa riešení.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kapitola 3

Matice

3.1 Algebraické operácie s maticami

Neformálne, **matica** typu $m \times n$ je obdĺžniková "tabuľka", ktorá pozostáva z m riadkov a n stĺpcov, pričom v každom z $m \cdot n$ "okienok" je reálne číslo. Ak $\mathbf{A}$ je matica typu $m \times n$, prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci označujeme a_{ij}. V skrátenom tvare píšeme $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

Napríklad, nasledujúca matica $\mathbf{A}$ má rozmer 3×3, čiže má 3 riadky a 3 stĺpce.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matica $\mathbf{A}$ je štvorcová, ak počet riadkov matice je rovný počtu stĺpcov, teda $m = n$.

Operácia **súčtu dvoch matíc** je definovaná len pre **matice rovnakého typu**. Ak $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ a $\mathbf{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ sú dve matice typu $m \times n$, ich súčtom je matica $\mathbf{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ toho istého typu, pričom $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$ pre všetky $i \in \{1, ..., m\}$ a $j \in \{1, ..., n\}$. Jednoducho povedané, súčet dvoch matíc rovnakého typu dostaneme sčítaním prvkov na príslušných pozíciách.

Príklad č. 1: Vypočítajte súčet dvoch matíc $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Riešenie:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2+5 & 3+0 \\ 1-1 & 2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

□

Operácia **rozdielu dvoch matíc** je definovaná taktiež len pre **matice rovnakého typu**. Ak $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ a $\mathbf{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ sú dve matice typu $m \times n$, ich rozdiel bude matica $\mathbf{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ toho istého typu, pričom $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ pre všetky $i \in \{1, ..., m\}$ a $j \in \{1, ..., n\}$. Rozdiel dvoch matíc rovnakého typu dostaneme odčítaním prvkov na príslušných pozíciách.

Rozdiel dvoch matíc **A** a **B** môžme napísať aj v tvare $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-1)\cdot\mathbf{B}$.

Príklad č. 2. Vypočítajte rozdiel $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ matíc z predchádzajúceho príkladu:

Riešenie:

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}-\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix} -2-5 & 3-0 \\ 1-(-1) & 2-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

□

Maticu násobíme konštantou c tak, že touto konštantou vynásobíme každý prvok matice. Formálne, ak $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ je matica a c je konštanta, tak $c\cdot\mathbf{A}=(c\cdot a_{ij})_{m\times n}$.

Príklad č. 3. Vypočítajte $3\cdot\mathbf{A}$, kde **A** je matica z prvého príkladu.

Riešenie:

$$3\cdot\mathbf{A}=3\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot(-2) & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

□

Operácia **násobenia dvoch matíc** je zložitejšia. Nech $\mathbf{A}=(a_{ik})_{m\times n}$ a $\mathbf{B}=(b_{kj})_{n\times l}$ sú dve matice, pričom počet stĺpcov matice **A** sa rovná počtu riadkov matice **B**, tento počet sme označili n. Potom súčin matíc $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ (v tomto poradí) je matica $\mathbf{C}=(c_{ij})_{m\times l}$, kde

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\Sigma_{t=1}^{k}a_{it}b_{tj}$$

Súčin matíc možno opísať aj pomocou pojmu skalárneho súčinu vektorov, s ktorým ste sa stretli na strednej škole. V tejto terminológii, prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci v súčine sa rovná skalárnemu súčinu vektora vytvoreného z i-teho riadku ľavej matice s vektorom vytvoreným z j-teho stĺpca pravej matice.

Upozorňujeme, že ak súčin matíc $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ je definovaný, to ešte neznamená, že aj súčin $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ je definovaný. Navyše, ak $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ sú štvorcové matice rovnakého typu, a teda oba súčiny $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ aj $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ sú definované, nie je vo všeobecnosti pravda, že tieto súčiny sa rovnajú. Stručne povedané, násobenie matíc vo všeobecnosti nie je komutatívne.

Príklad č. 4. Vypočítajte súčin $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, kde $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ sú matice z Príkladu č. 1.

Riešenie:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix} (-2)\cdot 5+3\cdot(-1) & (-2)\cdot 0+3\cdot 3 \\ 1\cdot 5+2\cdot(-1) & 1\cdot 0+2\cdot 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -10-3 & 0+9 \\ 5-2 & 0+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -13 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$\square$

Transponovaná matica $\mathbf{A}^T$ k matici $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ je matica $\mathbf{A}^T=(a_{ji})_{n\times m}$. Jednoducho povedané, transponovanú maticu dostaneme, ak vymeníme riadky matice za stĺpce a stĺpce za riadky.

Príklad č. 5. Utvorte transponovanú maticu $\mathbf{A}^T$ k matici $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

$$\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$\square$

Príklad č. 6. Máme zadané nasledujúce dve matice. Úlohou je vypočítať súčin matíc $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ a následne napísať transponovanú maticu k výslednej matici.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 2};\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Riešenie:

Súčin matíc:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4\cdot 2+3\cdot 1 & 4\cdot(-3)+3\cdot(-1) & 4\cdot 0+3\cdot 4 \\ 0\cdot 2+1\cdot(-1) & 0\cdot(-3)+(-1)\cdot(-1) & 0\cdot 0+(-1)\cdot 4 \\ 1\cdot 2+5\cdot 1 & 1\cdot(-3)+5\cdot(-1) & 1\cdot 0+5\cdot 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 8+3 & -12-3 & 0+12 \\ 0-1 & 0+1 & 0-4 \\ 2+5 & -3-5 & 0+20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & -15 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \\ 7 & -8 & 20 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Transponovaná matica $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T$:

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathbf{T}}=\begin{pmatrix} 11 & -1 & 7 \\ -15 & 1 & -8 \\ 12 & -4 & 20 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

□

Príklady na cvičenia:

Sú zadané nasledovné matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vypočítajte:

a.) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

Výsledok:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 23 \\ -4 & 0 & -16 \\ -3 & 2 & 10 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 23 & -3 & 3 \\ -14 & 4 & -2 \\ 36 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -31 & 8 & 20 \\ 10 & -4 & -14 \\ -39 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

b.) $3 \cdot \mathbf{A} - 4 \cdot \mathbf{B}$

Výsledok:

$$3 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 \\ 0 & 12 & -6 \\ 15 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \qquad 4 \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 28 & 4 & 4 \\ -8 & 12 & 0 \\ 12 & 16 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \mathbf{A} - 4 \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -34 & -13 & -1 \\ 8 & 0 & -6 \\ 3 & -13 & -1 \end{pmatrix}$$

c.) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D}$

Výsledok:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 10 \\ -5 & 3 & 13 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 14 \\ -7 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

d.) $(2 \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B})^T$

Výsledok:

$$2 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 0 & 8 & -4 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad 2 \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 3 \\ -2 & 11 & -4 \\ 13 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2 \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 13 \\ -5 & 11 & 6 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

e.) $3 \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{A})^T$

Výsledok:

$$(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (\mathbf{B} - \mathbf{A})^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{A})^T = \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ 12 & -3 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

f.) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{C}$

Výsledok:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 11 & 37 \\ -8 & -10 \\ -9 & 17 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 9 & 32 \\ -4 & -8 \\ -10 & 15 \end{pmatrix}$$

3.2 Inverzné matice

Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica typu $n \times n$. Maticu $\mathbf{X}$ toho istého typu $n \times n$ nazveme inverznou maticou k matici $\mathbf{A}$, ak platí:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matica typu $n \times n$, t. j. matica, ktorá má jednotky na hlavnej diagonále a nuly všade mimo hlavnej diagonály.

Z teórie vyplýva, že ak takáto matica existuje, tak je jednoznačne určená, a potom píšeme $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$.

Vypočítať inverznú maticu k danej matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ znamená vyriešiť rovnicu

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}\ . \tag{3.1}$$

Ak $\bar{x}_i$ je i-ty stĺpec matice $\mathbf{X}$ a $\bar{e}_i$ je i-ty stĺpec jednotkovej matice $\mathbf{I}$, tak maticová rovnica (3.1) predstavuje n sústav lineárnych rovníc

$$\mathbf{A} \cdot \bar{x}_1 = \bar{e}_1 \quad ; \quad \mathbf{A} \cdot \bar{x}_2 = \bar{e}_2 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \mathbf{A} \cdot \bar{x}_i = \bar{e}_i \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \mathbf{A} \cdot \bar{x}_n = \bar{e}_n, \tag{3.2}$$

pričom i-ta sústava ($i = 1, 2, ..., n$) je sústavou n rovníc s n neznámymi (prvky stĺpca $\bar{x}_i$) a všetky sústavy majú rovnakú maticu koeficientov (maticu $\mathbf{A}$). Takéto sústavy rovníc môžeme riešiť Gaussovou eliminačnou metódou **súčasne**, a to tak, že do rozšírenej matice napíšeme vpravo všetky stĺpce $\bar{e}_i$, t. j. celú jednotkovú maticu $\mathbf{I}$. Výpočet si ukážeme na príkladoch.

Príklad č. 1. Vypočítajme inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

Krok č. 1: K matici $\mathbf{A}$ si na pravú stranu pripíšeme jednotkovú maticu. Tieto dve matice od seba oddelíme zvislou čiarou.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Krok č. 2: Postupne upravujeme túto rozšírenú maticu elementárnymi riadkovými operáciami tak, aby sme na ľavej strane nakoniec dostali jednotkovú maticu a vpravo bude potom naša hľadaná inverzná matica. Vymeníme prvý a tretí riadok rozšírenej matice použitím **(ERO1)**, aby sme v ľavom hornom rohu mali pivotnú jednotku.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Krok č. 3: V ďalšom kroku pripočítame (-1)-násobok prvého riadku k druhému riadku a taktiež (-3)-násobok prvého riadku k tretiemu riadku. Týmito dvoma operáciami sme eliminovali koeficienty pod pivotnou jednotkou v prvom stĺpci (dvojnásobné použitie **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 13 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 21 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Krok č. 4: V druhom stĺpci potrebujeme, aby v strede bola jednotka a pod a nad jednotkou nuly. Keďže tam máme na mieste pivotného prvku číslo (-5) a nad pivotným prvkom číslo 5, pripočítame druhý riadok k tretiemu riadku rozšírenej matice (aplikujeme **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 13 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 21 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Krok č. 5: Pokračujeme ďalej v eliminácii koeficientov v druhom stĺpci, teraz pod pivotným prvkom. Vynásobíme druhý riadok číslom (-8), tretí riadok číslom 5 a druhý riadok pripočítame k tretiemu riadku, čiže použijeme **(ERO3)**.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 13 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -8 & -7 \end{array}\right)$$

Krok č. 6: Prejdeme na tretí stĺpec matice a eliminujeme koeficienty nad pivotnou jednotkou. Vynásobíme tretí riadok číslom (-13) a pripočítame k druhému riadku. Podobne vynásobíme tretí riadok číslom (-8) a pripočítame k prvému riadku. Týmito dvoma krokmi sme získali nuly aj nad treťou pivotnou jednotkou (dvojnásobné použitie **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 65 & 56 \\ 0 & -5 & 0 & -65 & 105 & 90 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -8 & -7 \end{array}\right)$$

Krok č. 7: Ostáva nám už len použiť operáciu **(ERO2)** a vydeliť druhý riadok rozšírenej matice číslom (-5), aby sme v strede na diagonále matice mali jednotku.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 65 & 56 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -21 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -8 & -7 \end{array}\right)$$

Postupnými elementárnymi riadkovými operáciami sme sa dostali k výsledku, čiže k inverznej matici. Inverzná matica sa v rozšírenej matici nachádza na pravej strane od zvislej čiary, ak na ľavej strane máme jednotkovú maticu.

Inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ je teda :

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 65 & 56 \\ 13 & -21 & -18 \\ 5 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

O tom, či sme správne počítali, sa môžeme presvedčiť skúškou správnosti. Ak vynásobíme pôvodnú maticu $\mathbf{A}$ zľava alebo sprava inverznou maticou $\mathbf{A}^{-1}$, mali by sme dostať jednotkovú maticu $\mathbf{I}$, teda $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A^{-1}} = \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$. Stačí vyskúšať jednu z týchto dvoch rovností.

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -40 & 65 & 56 \\ 13 & -21 & -18 \\ 5 & -8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V časti 3.1 sme upozornili, že násobenie matíc vo všeobecnosti nie je komutatívne, ale pri počítaní s inverznými maticami platí, že $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A^{-1}} = \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$. □

Príklad č. 2. Vypočítame inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

Krok č. 1: Rozšírime maticu $\mathbf{A}$ o jednotkovú maticu $\mathbf{I}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Krok č. 2: Aplikujeme operáciu **(ERO1)** a vymeníme prvý a tretí radok, aby sme mali pivotnú jednotku v ľavom hornom rohu.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Krok č. 3: Pod pivotnou jednotkou potrebujeme získať nuly, preto pripočítame (-2)-násobok prvého riadku k druhému riadku a (-3)-násobok prvého riadku k tretiemu riadku (dvojnásobné použitie **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 15 & -10 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Krok č. 4: V ďalšom kroku eliminujeme hodnotu v druhom stĺpci pod pivotným prvkom. Pripočítame teda (-5)-násobok druhého riadku k tretiemu riadku, čiže použijeme **(ERO3)**.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 35 & 1 & -5 & 7 \end{array}\right)$$

Krok č. 5: Pripočítaním druhého riadku k prvému **(ERO3)** dostaneme nulu v druhom stĺpci aj nad pivotným prvkom.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -9 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 35 & 1 & -5 & 7 \end{array}\right)$$

Krok č. 6: Zostáva nám ešte upraviť tretí stĺpec. Na pozícii pivotného prvku máme číslo 35 a nad pivotným prvkom koeficienty, ktoré nevieme jednoducho eliminovať. Preto spravíme jeden nepríjemný krok, a to použijeme operáciu **(ERO2)**, a vydelíme tretí riadok rozšírenej matice číslom 35, aby sme dostali pivotnú jednotku. Týmto krokom vnesieme do výpočtu zlomky, hoci sa im snažíme vyhýbať čo najdlhšie.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -9 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/35 & -1/7 & 1/5 \end{array}\right)$$

Krok č. 7: Teraz už len stačí, ak pripočítame 9-násobok tretieho riadku k druhému riadku a taktiež 5-násobok tretieho riadku k prvému riadku. Týmito dvoma krokmi je tretí stĺpec eliminovaný (dvojnásobné použitie **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9/35 & -2/7 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/35 & -1/7 & 1/5 \end{array}\right)$$

Krok č. 8: Na záver aplikujeme **(ERO2)** a vydelíme druhý riadok číslom 3, aby sme mali na ľavej strane jednotkovú maticu, t. j. na diagonále jednotky a pod a nad diagonálou nuly.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/35 & -2/21 & -1/15 \\ 0 & 0 & 1 & 1/35 & -1/7 & 1/5 \end{array}\right)$$

Inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ sa nachádza na pravej strane rozšírenej sústavy.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 & 0 \\ 3/35 & -2/21 & -1/15 \\ 1/35 & -1/7 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Spravme ešte skúšku správnosti, či $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 & 0 \\ 3/35 & -2/21 & -1/15 \\ 1/35 & -1/7 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Príklad č. 3. Vypočítame inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

Krok č. 1: K matici $\mathbf{A}$ pripíšeme jednotkovú maticu.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Krok č. 2: V prvom stĺpci, v druhom a treťom riadku, máme hodnoty 2 a (-2), teda pripočítame druhý riadok k tretiemu riadku rozšírenej matice (aplikujeme **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -3 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Krok č. 3: V ľavom hornom rohu musíme mať pivotnú jednotku, preto pripočítame druhý riadok k prvému riadku a dostaneme hodnotu (-1), **(ERO3)**.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 3 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Krok č. 4: V prvom stĺpci pod pivotnou jednotkou chceme mať nuly, takže použijeme **(ERO3)** a pripočítame 2-násobok prvého riadku k druhému riadku rozšírenej matice.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 3 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Krok č. 5: Vidíme, že v druhom stĺpci máme na druhej a tretej pozícii číslo 10, takže pripočítame (-1)-násobok druhého riadku k tretiemu riadku (aplikujeme **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 3 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Ak si tento posledný krok riešenia príkladu prepíšeme v tvare lineárnych rovníc, vidíme, že nastal spor. Posledný riadok na ľavej strane rozšírenej matice je nulový, pričom prislúchajúca pravá strana je nenulová. Z poznatkov z prvej kapitoly teda už vieme, že tieto sústavy nemajú riešenie a teda k matici $\mathbf{A}$ neexistuje inverzná matica. $\square$

Príklady na cvičenia:

Gaussovou eliminačnou metódou vypočítajte:

a.) inverznú maticu k nasledujúcim maticiam,
b.) urobte skúšku správnosti.

1. $$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} -5/8 & 1/4 & -1/8 \\ -3/8 & -1/4 & 1/8 \\ 15/8 & 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 10 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} 3/4 & -7/16 & -1/8 \\ 1/4 & -1/16 & 1/8 \\ -5/4 & 13/16 & -5/8 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 9 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Výsledok: Inverzná matica neexistuje.

4. $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -7 & -9 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Výsledok: Inverzná matica neexistuje.

5. $$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} -2/13 & 9/13 & 1/13 \\ 11/13 & -17/13 & 1/13 \\ 7/13 & -12/13 & 3/13 \end{pmatrix}$$

6. $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

7. $$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/16 & 5/16 & 0 \end{pmatrix}$$

8. $$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Výsledok: Inverzná matica neexistuje.

9. $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -7/5 & 3/10 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 4/5 & -1/10 \end{pmatrix}$$

10. $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -5 & 5 & -13 \end{pmatrix}$$

Výsledok: Inverzná matica neexistuje.

11. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

12. $$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} -27/29 & -19/29 & 41/29 \\ 6/29 & 7/29 & -9/29 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

13. $$\begin{pmatrix} -6 & -8 & -6 \\ 1 & 13 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} 1/28 & -4/35 & 31/70 \\ 1/28 & 3/35 & 3/70 \\ -1/4 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

14.
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} 5/11 & -4/11 & -3/44 \\ -1/11 & 3/11 & 5/44 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

15.
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 & 0 & 2/5 \\ -8/5 & 3/5 & 0 & 6/5 \\ 13/10 & -3/10 & 1/2 & -11/10 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16.
$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} 20/3 & -8 & -8 & 11/3 \\ -7/3 & 3 & 3 & -4/3 \\ 7/3 & -3 & -2 & 1/3 \\ -5/3 & 2 & 2 & -2/3 \end{pmatrix}$$

17.
$$\begin{pmatrix} -12 & 16 & -1 & -3 \\ 5 & -6 & 0 & 1 \\ 7 & -9 & 1 & 2 \\ -8 & 11 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ -4 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

18.
$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} -17 & 39 & -1 & -3 \\ 5 & -11 & 0 & 1 \\ 20 & -46 & 2 & 3 \\ -13 & 30 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

19.
$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Výsledok:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 5/4 & -15/4 \\ -7/3 & 5/3 & 1 & -10/3 \\ 13/3 & -8/3 & -7/4 & 67/12 \\ 11/3 & -7/3 & -7/4 & 59/12 \end{pmatrix}$$

3.3 Maticové rovnice

Z predchádzajúcich častí vieme, ako pracovať s maticami, a taktiež vieme počítať inverzné matice. Tieto poznatky teraz využijeme pri riešení maticových rovníc.

Začneme maticovou rovnicou tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A}$ je daná matica typu $m \times n$, $\mathbf{B}$ je daná matica typu $m \times \ell$ a úlohou je vypočítať neznámu maticu $\mathbf{X}$ typu $n \times \ell$. Špeciálny prípad takej úlohy sme už riešili - ak $\ell = 1$, tak ide o výpočet riešení sústavy lineárnych rovníc. Na nasledujúcom príklade si ukážeme dva prístupy.

Príklad č. 1. Riešme maticovú rovnicu v tvare $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Prvá metóda spočíva v eliminácii matice $\mathbf{X}$ za predpokladu, že k matici $\mathbf{A}$ existuje inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$. Vieme už, že násobenie matíc nie je komutatívne. Maticová rovnica je zadaná v tvare $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$. Matica $\mathbf{A}$ násobí maticu $\mathbf{X}$ zľava, preto vynásobíme rovnicu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ inverznou maticou $\mathbf{A}^{-1}$ zľava. Dostávame tak rovnicu $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$. Ďalej vieme, že súčin matíc $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$ nám dáva jednotkovú maticu $\mathbf{I}$, teda posledná rovnica sa zjednoduší na $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$. Vidíme, že neznámu $\mathbf{X}$ vypočítame, ak inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ zľava vynásobíme pravou stranou, teda maticou $\mathbf{B}$.

Teraz treba overiť existenciu inverznej matice k matici $\mathbf{A}$. Počítať inverznú maticu sme sa naučili v predchádzajúcej podkapitole, takže teraz len napíšeme výsledok:

Inverzná matica existuje a rovná sa

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ -2/7 & 4/7 & -1/7 \\ 6/7 & -5/7 & 3/7 \end{pmatrix}.$$

Keď už máme inverznú maticu, neznámu $\mathbf{X}$ vypočítame, ak zľava vynásobíme inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ maticou $\mathbf{B}$, teda:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ -2/7 & 4/7 & -1/7 \\ 6/7 & -5/7 & 3/7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 & 1/2 & -3/2 \\ 15/7 & 0 & -8/7 \\ -24/7 & 1 & 17/7 \end{pmatrix}$$

Riešením našej maticovej rovnice je jediná matica $\mathbf{X}$, kde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 7/2 & 1/2 & -3/2 \\ 15/7 & 0 & -8/7 \\ -24/7 & 1 & 17/7 \end{pmatrix} .$$

□

Druhá metóda riešenia je založená na tom, že na rovnicu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ sa môžme pozerať ako na tri sústavy lineárnych rovníc.

Tento princíp je aplikovateľný na ľubovoľne veľké štvorcové matice. Ak $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sú matice typu $n \times n$, tak rovnicu typu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ si predstavme ako sústavu n lineárnych rovníc

$$\mathbf{A} \cdot \bar{x}_1 = \bar{b}_1 \ \ ; \ \ \mathbf{A} \cdot \bar{x}_2 = \bar{b}_2 \ \ ; \ \ ... \ \ ; \ \ \mathbf{A} \cdot \bar{x}_i = \bar{b}_i \ \ ; \ \ ... \ \ ; \ \ \mathbf{A} \cdot \bar{x}_n = \bar{b}_n, \tag{3.3}$$

kde $\bar{x}_i$ je i-ty stĺpec matice $\mathbf{X}$ a $\bar{b}_i$ je i-ty stĺpec matice $\mathbf{B}$.

Neznámu $\mathbf{X}$ dostaneme, ak maticu $\mathbf{A}$ rozšírime o maticu $\mathbf{B}$ a túto rozšírenú maticu upravujeme Gaussovou eliminačnou metódou tak, aby na ľavej strane sme dostali jednotkovú maticu, na pravej strane rozšírenej matice bude potom naša výsledná matica $\mathbf{X}$.

Rozšírená matica $(A|B)$ má tvar

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 3 & 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 & 4 & 0 \end{array} \right) .$$

Krok č. 1: Postupujeme už známymi elementárnymi úpravami tak, aby sme na ľavej strane, kde teraz máme maticu $\mathbf{A}$, nakoniec mali jednotkovú maticu. Pripočítame 2- násobok prvého riadku rozšírenej matice k tretiemu riadku **(ERO3)** a už máme v prvom stĺpci pod pivotným prvkom nuly.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 3 & 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & -3 & 4 & 4 \end{array} \right)$$

Krok č. 2: Pripočítame (-1)-násobok druhého riadku k prvému riadku a získame nulu aj nad druhým pivotným prvkom, čiže použijeme **(ERO3)**.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 0 & 0 & -7 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & -3 & 4 & 4 \end{array} \right)$$

Krok č. 3: Teraz pripočítame (-4)-násobok druhého riadku k tretiemu riadku (operácia **(ERO3)**) a máme tretí stĺpec s pivotnou jednotkou a nulami.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 0 & 0 & -7 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 0 & -15 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Krok č. 4: V druhom riadku na tretej pozícii máme jednotku, preto použijeme operáciu **(ERO1)** a vymeníme druhý a tretí riadok, aby sa jednotka dostala na pozíciu pivotného prvku v treťom riadku.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 0 & 0 & -7 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 0 & -15 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Krok č. 5: Aby sme na pivotných pozíciách mali jednotky, použijeme **(ERO2)** a vydelíme prvý riadok číslom (-2) a druhý riadok číslom (-7).

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 7/2 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 15/7 & 0 & -8/7 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Krok č. 6: Posledným krokom bude pripočítanie (-3)-násobku druhého riadku k tretiemu riadku, (použijem operáciu **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 7/2 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 15/7 & 0 & -8/7 \\ 0 & 0 & 1 & -24/7 & 1 & 17/7 \end{array}\right)$$

Dostali sme na ľavej strane jednotkovú maticu $\mathbf{I}$ a na pravej strane našu neznámu $\mathbf{X}$. Je vidieť, že výsledok získaný pomocou ľavého násobenia inverznou maticou je rovnaký ako práve získaný výsledok pomocou Gaussovej eliminačnej metódy.

□

Nasledujúci príklad si vypočítame klasicky pomocou inverznej matice.

Príklad č. 2. Máme zadané tri matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Našou úlohou je vypočítať neznámu $\mathbf{X}$ z maticovej rovnice $\mathbf{A} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$.

Riešenie: Za predpokladu existencie inverznej matice $\mathbf{B}^{-1}$ vyjadríme z rovnice neznámu $\mathbf{X}$. Najprv rovnicu upravíme tak, aby na jednej strane bol len súčin a na druhej strane všetko ostatné. Odčítame maticu $\mathbf{A}$ od matice $\mathbf{C}$, a tým dosiahneme požadovanú úpravu $\mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{C} - \mathbf{A})$. Na ľavej strane máme súčin $\mathbf{X} \cdot \mathbf{B}$. Vidíme, že matica $\mathbf{B}$ sa nachádza na pravej strane pri neznámej $\mathbf{X}$. Preto vynásobíme rovnicu maticou $\mathbf{B}^{-1}$ sprava. Rovnica bude mať tvar $\mathbf{X} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{C} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}^{-1}$. Súčin $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1}$ nám dáva jednotkovú maticu $\mathbf{I}$, teda výsledná rovnica bude mať tvar $\mathbf{X} = (\mathbf{C} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}^{-1}$.

Krok č. 1: Začneme výpočtom matice $\mathbf{B}^{-1}$ (čím zároveň overíme jej existenciu). Rozšírime maticu $\mathbf{B}$ o jednotkovú maticu, čím dostávame

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

a pokračujeme Gaussovou eliminačnou metódou.

Krok č. 2: Keď už máme v treťom riadku v prvom stĺpci číslo (-1), aplikujeme **(ERO3)** a pripočítame 3-násobok tretieho riadku k druhému riadku .

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Krok č. 3: Aby sme mali pivotný prvok na správnom mieste použijeme **(ERO1)**, vymeníme tretí a prvý riadok. Následne použijeme **(ERO2)** a prvý riadok vynásobíme číslom (-1).

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Krok č. 4: V tomto kroku použijeme **(ERO3)** a pripočítame 2-násobok prvého riadku k tretiemu riadku.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Krok č. 5: Ďalej vymeníme druhý a tretí riadok, aby sme dostali pivotný prvok do stredu druhého stĺpca (použijeme **(ERO1)**).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Krok č. 6: Pripočítame tretí riadok k druhému riadku a taktiež pripočítame (-1)-násobok tretieho riadku k prvému riadku. Týmito dvoma krokmi sme získali v treťom riadku pivotnú jednotku a nad jednotkou nuly (dvojnásobné použitie **(ERO3)**).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Krok č. 7: Teraz vydelíme druhý riadok číslom 2 (aplikujeme **(ERO2)**). Týmto krokom síce zavedieme zlomky do výpočtu, ale keďže nám ostal už iba jeden krok do výsledného riešenia, veľmi nám to neskomplikuje výpočet.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Krok č. 8: V poslednom kroku už len pripočítame druhý riadok k prvému riadku (aplikujeme **(ERO3)**). Na ľavej strane sme dostali jednotkovú maticu $\mathbf{I}$ a na pravej strane máme inverznú maticu $\mathbf{B}^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aby sme mohli vypočítať neznámu $\mathbf{X}$, musíme ešte vypočítať rozdiel matíc $(\mathbf{C} - \mathbf{A})$.

$$(\mathbf{C} - \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Výsledok neznámej $\mathbf{X}$ dostaneme súčinom $(\mathbf{C} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}^{-1}$, teda:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{C} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Výsledok riešenia maticovej rovnice je teda:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 9/2 & -3/2 & -15/2 \\ 10 & -5 & -14 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\square$

Príklady na cvičenia:

Pomocou inverznej matice vypočítajte nasledujúce príklady:

1.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 7x & + & 3y & + & 6z & = & 7 \\ 2x & + & 2y & + & 8z & = & -5 \end{array}$$

Výsledok: $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1/2 & -3/4 \\ -11 & 5/2 & 9/4 \\ 2 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 13/4 \\ -19/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & 6z & + & 5t & = & 14 \\ x & + & y & + & 4z & + & 4t & = & 7 \\ 3x & + & 9y & + & 21z & + & 27 & = & 12 \\ & & y & + & 3z & + & 3t & = & 10 \end{array}$$

Výsledok: $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1/3 & -1 \\ 6 & -15 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & -1/3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 50 \\ 1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}$$

3.

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 9 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/15 & 2/15 & -1/15 \\ -1/6 & 0 & 1/3 \\ 1/5 & -1/15 & 1/5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -15 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -2 & 0 \\ 2 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

4. Sú zadané nasledovné matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Vypočítajte neznámu $\mathbf{X}$ z rovnice

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

Výsledok: $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{B})$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/7 & 5/7 & 1/7 \\ -9/14 & 4/7 & 3/14 \\ -1/14 & 2/7 & 5/14 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{C} - \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 12/7 & -26/7 & -27/7 \\ 18/7 & -43/14 & -30/7 \\ 2/7 & -11/14 & -8/7 \end{pmatrix}$$

Kapitola 4

Determinanty

Determinant je funkcia, ktorá každej štvorcovej matici $\mathbf{A}$ priradí číslo, ktoré označujeme symbolom $|\mathbf{A}|$, pričom toto priradenie spĺňa nasledujúce axiómy spojené s elementárnymi riadkovými operáciami:

D1: Ak matica $\mathbf{B}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ výmenou dvoch riadkov **(ERO1)**, tak $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$.

D2: Ak matica $\mathbf{B}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynásobením niektorého riadku konštantou c **(ERO2)**, tak $|\mathbf{B}| = c \cdot |\mathbf{A}|$.

D3: Ak matica $\mathbf{B}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ pripočítaním násobku jedného riadku k i-temu riadku **(ERO3)**, tak $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$.

D4: Determinant jednotkovej matice sa rovná 1. Všeobecnejšie, ak $\mathbf{A}$ je horná alebo dolná trojuholníková matica, tak $|\mathbf{A}|$ je súčin prvkov na hlavnej diagonále.

Poznámka: Dá sa ukázať' že tieto štyri vlastnosti určujú determinant jednoznačne. Pravidlá **D1 -D3** platia aj pre analogické operácie so stĺpcami matice.

Pri výpočte determinantov je ešte užitočná aj nasledujúca vlastnosť:

D5: Ak matica $\mathbf{A}$ obsahuje nulový riadok (alebo stĺpec), alebo ak v matici $\mathbf{A}$ je nejaký riadok násobkom iného riadku (alebo nejaký stĺpec násobkom iného stĺpca), tak $|\mathbf{A}| = 0$.

Determinant štvorcovej matice $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ pre $n \in \{1, 2, 3\}$ je určený nasledujúcimi formulami:

- ak $n = 1$ a $\mathbf{A} = (a_{11})$, tak $|\mathbf{A}| = a_{11}$
- ak $n = 2$, tak

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- ak $n = 3$, tak $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

  $= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

  Pre ľahšie zapamätanie týchto 6 súčinov a ich znamienok možno použiť Sarrusovo pravidlo. K determinantu na pravú stranu pripíšeme prvý a druhý stĺpec determinantu. Spočítame súčin koeficientov pozdĺž diagonály, ktoré smerujú zľava doprava, a odpočítame súčiny koeficientov pozdĺž diagonály v opačnom smere.

  $$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

  Toto pravidlo je možné aplikovať **len pre determinanty stupňa n = 3**.

- pre ľubovolné $n \geq 2$, na výpočet determinantu je možné použiť Laplaceov rozvoj podľa i-teho riadku alebo j-teho stĺpca. Použijeme pri tom nasledujúce označenie. Symbolom A_{ij} označíme $(-1)^{i+j}$-násobok determinantu matice, ktorá vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca.

  Rozvoj podľa i-teho riadku má tvar:

  $$|\mathbf{A}| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} \ .$$

  Rozvoj podľa j-teho stĺpca má tvar:

  $$|\mathbf{A}| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj} \ .$$

Pre determinant súčinu dvoch štvorcových matíc rovnakého typu platí vzorec

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \ .$$

Na nasledujúcom príklade si ukážeme výpočet determinantu rozvojom podľa i-teho riadku alebo j-teho stĺpca a taktiež úpravou na horný alebo dolný trojuholníkový tvar.

Príklad č. 1. Našou úlohou je vypočítať determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ najprv rozvojom podľa riadku alebo stĺpca a následne úpravou na horný alebo dolný trojuholníkový tvar.

Riešenie:

1. Rozvoj podľa riadku alebo stĺpca:

Krok č. 1: Na začiatok si vyberieme riadok alebo stĺpec, podľa ktorého rozpíšeme rozvoj. V treťom riadku na tretej pozícii vidíme, že máme nulu, tak bude výhodné zvoliť si na rozvoj práve tretí riadok alebo tretí stĺpec. Vyberáme si teda tretí riadok, preto $i = 3$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Krok č. 2: Rozpíšeme si rozvoj podľa tretieho riadku a vypočítame determinant.

$$= (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -(0 - 30) - 3 \cdot (8 - 15) + 0 = 30 + 21 = 51$$

Hodnota determinantu matice je 51.

2. Úprava na dolný alebo horný trojuholníkový tvar

Iný spôsob výpočtu determinantu $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ je úprava príslušnej matice na horný alebo dolný trojuholníkový tvar pomocou elementárnych riadkových operácií a ich vlastností **D1-D5**.

Krok č. 1: V treťom riadku na prvej pozícii máme koeficient (-1) a preto vymeníme prvý a tretí riadok determinantu (t. j. použijeme operáciu **D1**). Koeficient (-1) v ľavom hornom rohu na pivotnej pozícii je pre nás lepším východiskovým krokom pre ďalšie úpravy determinantu. Výmenou dvoch riadkov determinant zmení znamienko "+" na znamienko "−".

$$-\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Krok č. 2: Upravíme determinant na dolný trojuholníkový tvar a teda pripočítame 3-násobok prvého riadku k druhému riadku a taktiež pripočítame 2-násobok prvého riadku k tretiemu riadku determinantu (dvojnásobné použitie pravidla **D3**). Tým sme získali nuly v prvom stĺpci pod pivotným prvkom.

$$-\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 15 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Krok č. 3: Opäť vymeníme druhý a tretí riadok determinantu. Podľa pravidla **D1**, výmenou riadkov determinant zmení znamienko na "+".

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

Krok č. 4: Vydelíme druhý riadok determinantu číslom 6, aby ďalšie úpravy boli jednoduchšie. Podľa pravidiel elementárnych úprav determinantov **D2**, ak delíme riadok determinantu číslom, musíme daným číslom determinant vynásobiť. Násobíme teda determinant konštantou 6. (Na túto úpravu môžeme hľadieť ako na "vyňatie konštanty 6 pred determinant z jedného riadku ".)

$$6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5/6 \\ 0 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

Krok č. 5: Našou poslednou úpravou bude pripočítanie (-15)-násobku druhého riadku k tretiemu riadku použitím **D3**, a dostaneme nulu aj pod druhým pivotným prvkom.

$$6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5/6 \\ 0 & 0 & -17/2 \end{vmatrix}$$

Krok č. 6: Determinant máme upravený na dolný trojuholníkovy tvar a posledným krokom je už len súčin pivotných koeficientov determinantu na diagonále:

$6 \cdot [(-1) \cdot 1 \cdot (-17/2)] = 51$

Hodnota determinantu je 51. Hodnota determinantu vypočítaná rozvojom podľa tretieho riadku sa, samozrejme, musí zhodovať s hodnotou determinantu vypočítaného úpravou na dolný trojuholníkový tvar. □

Príklad č. 2. Vypočítame determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ vhodným rozvojom a taktiež aj úpravou na trojuholníkový tvar.

Riešenie:

1. Rozvoj podľa riadku alebo stĺpca:

Krok č. 1: Zvolíme riadok alebo stĺpec, podľa ktorého rozpíšeme rozvoj. V treťom riadku na prvej pozícii máme nulu, preto by bolo výhodné zvoliť si práve tretí riadok, alebo prvý stĺpec. Vyberáme si teda pre zmenu prvý stĺpec, preto $j = 1$.

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Krok č. 2: Rozpíšeme si rozvoj podľa prvého stĺpca a vypočítame determinant.

$$= (-1)^{1+1} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} =$$

$= -3 \cdot (7 + 10) - 2 \cdot (1 - 15) + 0 = -51 + 28 = -23$

Hodnota determinantu matice je -23.

2. Úprava na dolný alebo horný trojuholníkový tvar:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Krok č. 1: Upravíme determinant na dolný trojuholníkový tvar, a preto bude výhodné, ak vymeníme prvý a druhý stĺpec (čiže použijeme operáciu **D1** aplikovanú na stĺpce). Tak budeme mať na pozícii pivotného prvku v ľavom hornom rohu koeficient 1, čo nám umožní ľahšiu elimináciu koeficientov v prvom stĺpci pod pivotným prvkom. Výmenou dvoch stĺpcov sa zmení znamienko determinantu.

$$-\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 7 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Krok č. 2: Pripočítame (-7)-násobok prvého riadku determinantu k druhému riadku, taktiež pripočítame (-5)-násobok prvého riadku k tretiemu riadku (dvojnásobné použitie pravidla **D3**). Týmito dvoma krokmi sme dostali nuly pod pivotným prvkom v prvom stĺpci.

$$-\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 23 & -23 \\ 0 & 15 & -14 \end{vmatrix}$$

Krok č. 3: Vydelíme druhý riadok číslom 23, a teda podľa pravidiel počítania determinantov **D2** vynásobíme determinant číslom 23.

$$-23 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 15 & -14 \end{vmatrix}$$

Krok č. 4: Pripočítame (-15)-násobok druhého riadku k tretiemu riadku, použitím **D3**. Týmto krokom sme ukončili úpravu determinantu na dolný trojuholníkový tvar.

$$-23 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Krok č. 5: Hodnotu determinantu dostaneme, ak vynásobíme koeficienty determinantu na diagonále:

$$= (-23) \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1) = -23$$

Hodnota determinantu -23 počítaná rozvojom podľa prvého stĺpca je rovnaká, ako výsledok dosiahnutý úpravou na dolný trojuholníkový tvar. □

Príklad č. 3. Vypočítajme determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & -6 & 11 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

vhodným rozvojom a potom úpravou na trojuholníkový tvar.

Riešenie:

1. Rozvoj podľa riadku alebo stĺpca:

Na rozvoj determinantu si zvolíme štvrtý riadok $i = 4$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & -6 & 11 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -6 & 11 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & 11 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{4+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 5 & -6 & 11 \end{vmatrix}$$

Prvý a tretí determinant sú nulové na základe pravidla **D5** (obsahujú stĺpec, ktorý je násobkom iného stĺpca). Štvrtý determinant vypočítame úpravou na trojuholníkový tvar (mohli sme použiť aj Sarrusovo pravidlo, pretože ide o determinant stupňa 3).

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 5 & -6 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 0 & 14 & -10 \\ 0 & 24 & -9 \end{vmatrix} = 14 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -10/14 \\ 0 & 24 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= 14 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -5/7 \\ 0 & 0 & 57/7 \end{vmatrix} = 14 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{57}{7} = 114$$

Hodnota posledného determinantu je 114.

Prvé tri determinanty sú nulové, preto výsledná hodnota pôvodného determinantu bude:

$$= 0 + 0 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 114 = 456$$

2. Úprava na dolný alebo horný trojuholníkový tvar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & -6 & 11 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Krok č. 1: V ľavom hornom rohu máme koeficient 1, takže pripočítame (-2)-násobok prvého riadku k druhému riadku, takisto pripočítame (-5)-násobok prvého riadku k tretiemu riadku a (-1)-násobok prvého riadku k štvrtému riadku (trojnásobné použitie pravidla **D3**). Takto sme dostali v prvom stĺpci pod pivotnou jednotkou nuly.

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 & -3 \\ 0 & 14 & -10 & 7 \\ 0 & 24 & -9 & 12 \\ 0 & 6 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

Krok č. 2: Vydelíme tretí riadok číslom (-4) a podľa vlastnosti **D2** determinatov musíme číslom (-4) vynásobiť celý determinant.

$$-4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 & -3 \\ 0 & 14 & -10 & 7 \\ 0 & -6 & 9/4 & -3 \\ 0 & 6 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

Krok č. 3: Pripočítame tretí riadok k štvrtému riadku použitím pravidla **D3**. Týmto krokom sme získali nulu v poslednom riadku na druhej pozícii.

$$-4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 & -3 \\ 0 & 14 & -10 & 7 \\ 0 & -6 & 9/4 & -3 \\ 0 & 0 & 1/4 & 4 \end{vmatrix}$$

Krok č. 4: Aby sme si zjednodušili úpravu na dolný trojuholníkový tvar, vydelíme aj druhý riadok číslom 14. Aplikovaním pravidla **D2** musíme determinant vynásobiť tým istým číslom, ktorým sme delili.

$$(-4) \cdot 14 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -10/14 & 1/2 \\ 0 & -6 & 9/4 & -3 \\ 0 & 0 & 1/4 & 4 \end{vmatrix}$$

Krok č. 5: Pripočítame 6-násobok druhého riadku k tretiemu riadku použitím **D3** a v druhom stĺpci pod pivotným prvkom máme už nuly.

$$(-56)\cdot\begin{vmatrix}1&-6&4&-3\\0&1&-5/7&1/2\\0&0&-57/28&0\\0&0&1/4&4\end{vmatrix}$$

Krok č. 6: Tretí riadok vydelíme číslom $\frac{57}{28}$ a týmto číslom súčasne determinant vynásobíme podľa pravidla **D2**.

$$(-56)\cdot\frac{57}{28}\cdot\begin{vmatrix}1&-6&4&-3\\0&1&-5/7&1/2\\0&0&-1&0\\0&0&1/4&4\end{vmatrix}$$

Krok č. 7: Pripočítame 1/4-násobok tretieho riadku k štvrtému riadku použitím **D3**. Výslednú hodnotu determinantu dostaneme vynásobením koeficientov na diagonále determinantu s číslami pred determinantom.

$$(-56)\cdot\frac{57}{28}\cdot\begin{vmatrix}1&-6&4&-3\\0&1&-5/7&1/2\\0&0&-1&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}=(-56)\cdot\frac{57}{28}\cdot1\cdot1\cdot(-1)\cdot4=456$$

Hodnota determinantu 456 sa samozrejme musí zhodovať s výsledkom počítaným rozvojom podľa štvrtého riadku. $\square$

Príklad č. 4. Vypočítajme determinant matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&5&-3&1\\0&-1&-2&1\\3&2&2&4\\1&3&-4&0\end{pmatrix}$ vhodným rozvojom a potom aj úpravou na trojuholníkový tvar.

Riešenie:

1. Rozvoj podľa riadku alebo stĺpca:

Rozpíšeme si rozvoj determinantu podľa druhého riadku, teda $i=2$.

$$\begin{vmatrix}2&5&-3&1\\0&-1&-2&1\\3&2&2&4\\1&3&-4&0\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\cdot0\cdot\begin{vmatrix}5&-3&1\\2&2&4\\3&-4&0\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}2&-3&1\\3&2&4\\1&-4&0\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{2+3}\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix}2&5&1\\3&2&4\\1&3&0\end{vmatrix}+(-1)^{2+4}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}2&5&-3\\3&2&2\\1&3&-4\end{vmatrix}$$

Jednotlivé determinanty vypočítame Sarrusovým pravidlom.

Druhý determinant

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}2&-3&1&2&-3\\3&2&4&3&2\\1&-4&0&1&-4\end{array}\right|=$$

$= 2\cdot2\cdot0+(-3)\cdot4\cdot1+1\cdot3\cdot(-4)-(1\cdot2\cdot1+2\cdot4\cdot(-4)+(-3)\cdot3\cdot0) = -12-12-(2-32) =$
$= -24+30 = 6$

Tretí determinant

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}2&5&1&2&5\\3&2&4&3&2\\1&3&0&1&3\end{array}\right|=$$

$= 2\cdot2\cdot0+5\cdot4\cdot1+1\cdot3\cdot3-(1\cdot2\cdot1+2\cdot4\cdot3+5\cdot3\cdot0) = 20+9-(2+24) = 29-26 = 3$

Štvrtý determinant

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}2&5&-3&2&5\\3&2&2&3&2\\1&3&-4&1&3\end{array}\right|=$$

$= 2\cdot2\cdot(-4)+5\cdot2\cdot1+(-3)\cdot3\cdot3-[(-3)\cdot2\cdot1+2\cdot2\cdot3+5\cdot3\cdot(-4)] = -16+10-27-(-6+12-60) =$
$= -33-(-54) = 21$

Výsledná hodnota pôvodného determinantu je

$$= (-6)+2\cdot3+21 = 21.$$

2. Úprava na dolný alebo horný trojuholníkový tvar:

$$\begin{vmatrix}2&5&-3&1\\0&-1&-2&1\\3&2&2&4\\1&3&-4&0\end{vmatrix}$$

Krok č. 1: Pripočítame (-3)-násobok štvrtého riadku k tretiemu riadku a (-2)-násobok štvrtého riadku k prvému riadku (t. j. použijeme operácie **D3**). Po týchto dvoch úpravách máme v prvom stĺpci jednotku a nuly.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 14 & 4 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

Krok č. 2: Vymeníme prvý a štvrtý riadok, aby pivotná jednotka bola v ľavom hornom rohu podľa pravidla **D1**. Výmenou riadkov sa zmení znamienko pred determinantom.

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 14 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Krok č. 3: Pripočítame 7-násobok druhého riadku k tretiemu riadku a taktiež (-1)-násobok druhého riadku k štvrtému riadku (dvojnásobné použitie operácie **D3**). Tým sme získali nuly pod diagonálnym koeficientom v druhom stĺpci.

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

Krok č. 4: Pripočítame (-4)-násobok štvrtého riadku k tretiemu riadku použitím operácie **D3**.

$$-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

Krok č. 5: Teraz už len vymeníme tretí a štvrtý riadok, čím sa podľa pravidla **D1** opäť zmení znamienko pred determinantom. Vynásobíme koeficienty na diagonále a máme hodnotu determinantu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-3) \cdot 7 = 21$$

Hodnota determinantu je 21. $\square$

Príklady na cvičenia:

Vypočítajte nasledujúce determinanty:

1. Rozvojom podľa riadku alebo stĺpca.
2. Úpravou na dolný alebo horný trojuholníkový tvar.
3. Sarrusovým pravidlom, ak je to možné.

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 30.

2. $$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 5.

3. $$\begin{vmatrix} 3 & -7 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 0.

4. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -2 & 7 & -2 \\ -2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 33.

5. $$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 0.

6. $$\begin{vmatrix} 6 & -11 & 9 & 4 \\ 4 & -7 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 1 & 10 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 39.

7. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je -6.

8. $$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 6 & 5 \\ -2 & 8 & 1 & 4 \\ -3 & 16 & 2 & 8 \\ 4 & -6 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 0.

9. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 36.

10. $$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 & -4 \\ 4 & -9 & 4 & -5 \\ 1 & 7 & -3 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 0.

11. $$\begin{vmatrix} 2 & -14 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & -11 & -7 \\ 2 & 0 & -5 & -5 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 5.

12. $$\begin{vmatrix} 4 & -7 & 3 & 2 \\ 4 & -7 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 59.

13. $$\begin{vmatrix} 3 & 10 & -6 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & -8 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je -190.

14. $$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 & 9 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 7 & 9 & 4 & -5 \\ 6 & 3 & 1 & -8 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je -546.

15. $$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 6 & 5 \\ -5 & 6 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & -6 & 11 & -3 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 0.

16. $$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \\ 5 & 11 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je -18.

17. $$\begin{vmatrix} -3 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 0.

18. $$\begin{vmatrix} -4 & 0 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 6 \\ -4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 246.

19. $$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & -6 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ -6 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 170.

20. $$\begin{vmatrix} -3 & -10 & -1 & -9 & -1 \\ 2 & 7 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 3.

21.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je -80.

22.
$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & -6 & 3 & -1 \\ 2 & -11 & 16 & -2 & 5 \\ 0 & 12 & -1 & 5 & 4 \\ -2 & 14 & -6 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je -140.

23.
$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je 144.

24.
$$\begin{vmatrix} -5 & -5 & 6 & 6 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & -2 & -5 \\ -2 & 10 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu je -18.

Kapitola 5

Vlastné čísla a vlastné vektory matíc

5.1 Lineárne zobrazenia v rovine a v priestore

Nech $\mathbf{A}$ je matica typu 2×2. Zobrazenie L, ktoré každému vektoru $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ priradí vektor

$$L(\bar{u}) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}$$

je lineárne, t. j. spĺňa rovnosť

$$L(c \cdot \bar{u} + d \cdot \bar{v}) = c \cdot L(\bar{u}) + d \cdot L(\bar{v}) \tag{5.1}$$

pre ľubovolné dva vektory $\bar{u}$, $\bar{v}$ v rovine. Naopak, v lineárnej algebre sa dokazuje, že každé lineárne zobrazenie v rovine, t. j. zobrazenie spĺňajúce vzťah (5.1), je definované ako násobenie nejakou maticou typu 2×2.

Príklad č. 1. Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ a nech L je lineárne zobrazenie dané vzťahom $L(\bar{u}) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}$. V rovine znázornime obrazy $L(\bar{u})$ nasledujúcich vektorov:

(a) $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c) $\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\bar{u}_4 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$

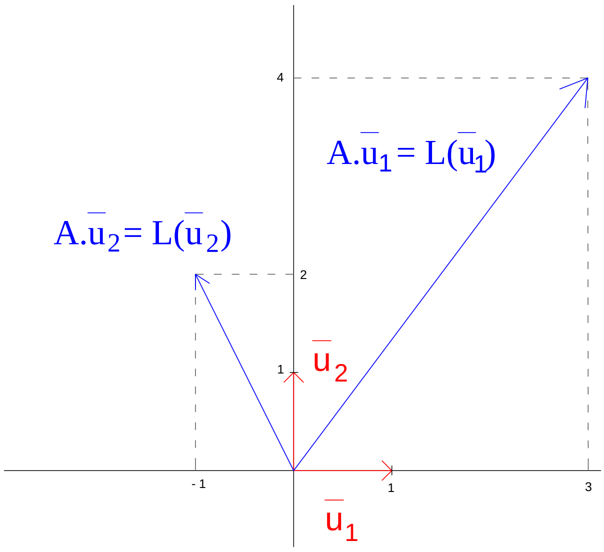
Riešenie:

$$L(\bar{u}_1) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

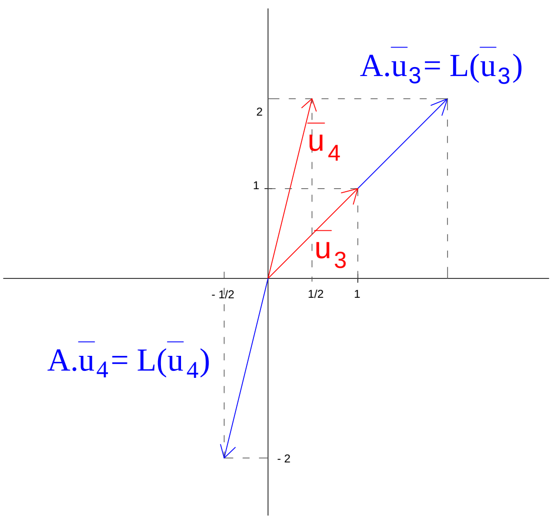
$$L(\bar{u}_2) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$L(\bar{u}_3) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$L(\bar{u}_4) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Obr. 5.1: $\bar{u}_1 = (1,0)^T$, $\bar{u}_2 = (0,1)^T$, $L(\bar{u}_1) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_1 = (3,4)^T$, $L(\bar{u}_2) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_2 = (-1,-2)^T$



Obr. 5.2: $\bar{u}_3 = (1,1)^T$, $\bar{u}_4 = (0,1)^T$, $L(\bar{u}_3) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_4 = (1/2,2)^T$, $L(\bar{u}_4) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_2 =$
$= (-1/2,-2)^T$

$\square$

Všimnime si, že obraz vektora $\bar{u}$ z časti (c) je len 2-násobkom pôvodného vektora, teda $\bar{u}$ a $L(\bar{u})$ ležia na jednej priamke. Podobne, obraz vektora $\bar{u}$ z časti (d) je jeho (-1)-násobkom, a teda $\bar{u}$ a $L(\bar{u})$ aj v tomto prípade ležia na jednej priamke. Toto nie je pravda pre vektory z časti (a), (b).

Fakt, že sme našli vektory $\bar{u}$, ktorých obrazy $L(\bar{u})$ ležia s $\bar{u}$ na jednej priamke, je veľmi významný pri skúmaní lineárnych zobrazení a ich prislúchajúcich matíc a vrátime sa k nemu v nasledujúcej časti.

Pojem lineárneho zobrazenia možno definovať analogicky aj vo vyšších dimenziách. Ak napríklad $\mathbf{A}$ je matica typu 3×3, tak zobrazenie L, ktoré vektoru $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ priradí vektor $L(\bar{u}) = \mathbf{A}.\bar{u}$ je opäť lineárne, teda spĺňa rovnosť (5.1).

Príklad č. 2. Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a nech L je lineárne zobrazenie dané vzťahom $L(\bar{u}) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}$. V priestore znázorníme obrazy $L(\bar{u})$ nasledujúcich vektorov:

(a) $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Riešenie: $L(\bar{u}_1) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

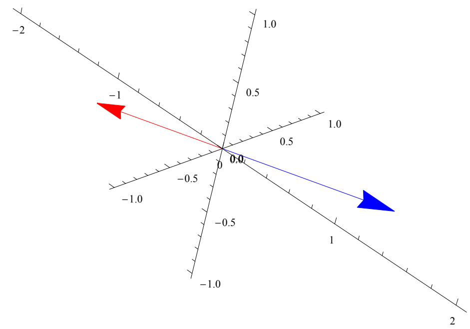
(b) $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Riešenie: $L(\bar{u}_2) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

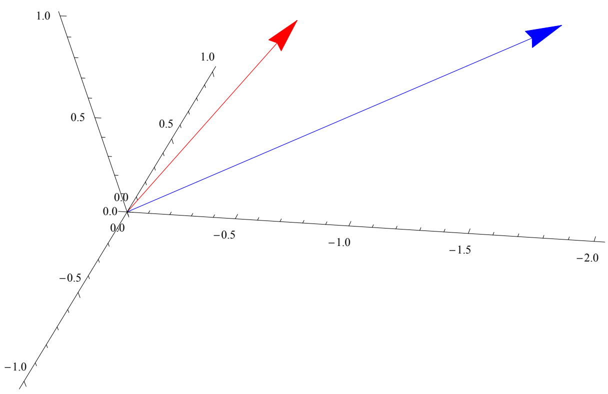
(c) $\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Riešenie: $L(\bar{u}_3) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $\bar{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$



Obr. 5.3: $\bar{u}_1 = (-2, 1, -1)^T$, $L(\bar{u}_1) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_1 = (2, -1, 1)^T$

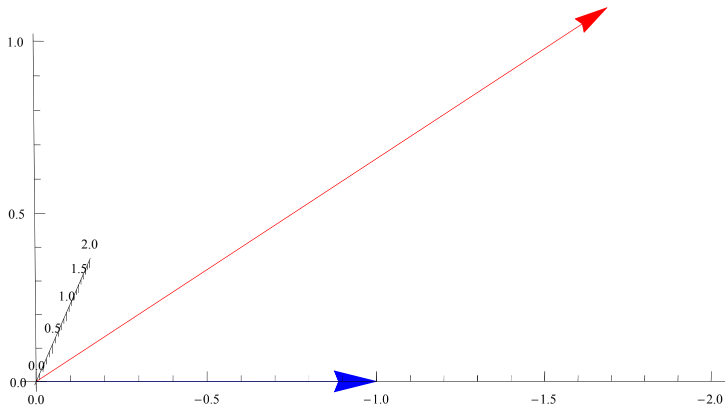


Obr. 5.4: $\bar{u}_2 = (-1, 1, 0)^T$, $L(\bar{u}_2) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_2 = (-2, 1, 0)^T$

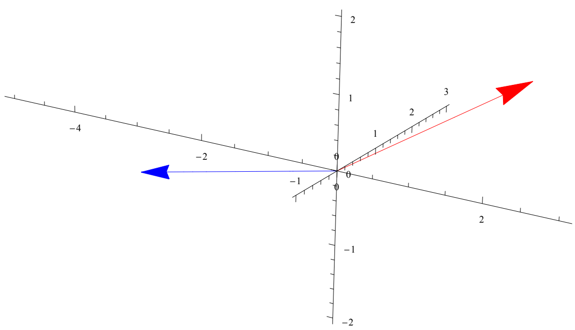
Riešenie: $L(\bar{u}_4) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_4 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(e) $\bar{u}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

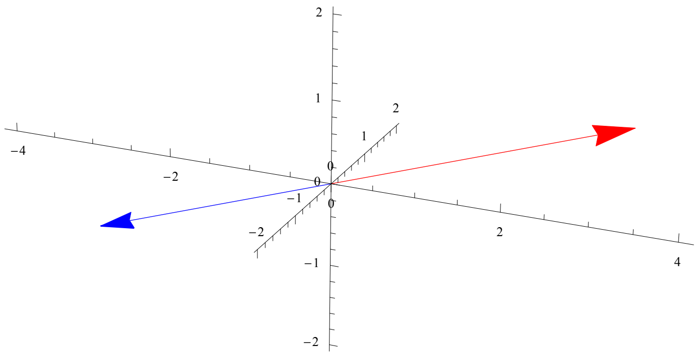
Riešenie: $L(\bar{u}_5) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_5 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$



Obr. 5.5: $\bar{u}_3 = (2, -2, 1)^T$, $L(\bar{u}_3) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_3 = (0, -1, 0)^T$



Obr. 5.6: $\bar{u}_4 = (3, -1, 2)^T$, $L(\bar{u}_4) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_4 = (-5, 3, -2)^T$



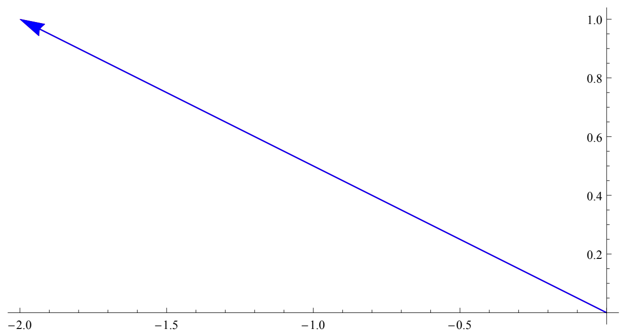
Obr. 5.7: $\bar{u}_5 = (4, -2, 2)^T$, $L(\bar{u}_5) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_5 = (-4, 2, -2)^T$

Opäť vidíme, že obrazy vektora $\bar{u}$ v častiach (a) a (e) sú (-1)-násobkom pôvodného vektora, teda vektor $\bar{u}$ a jeho obraz $L(\bar{u})$ ležia na jednej priamke. V častiach (b), (c) a (d) toto neplatí. $\square$

Príklady na cvičenia:

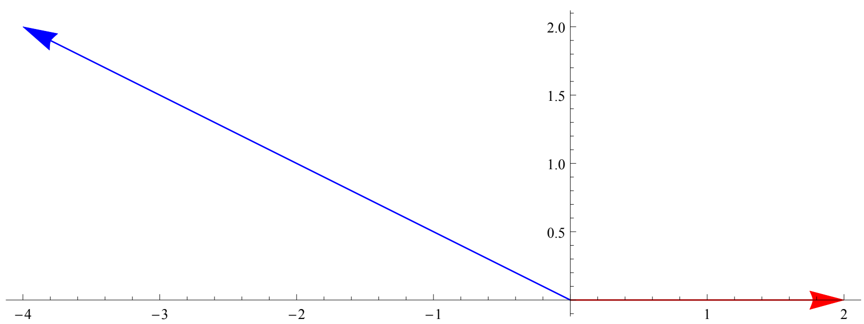
1. Je zadaná matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ a lineárne zobrazenie L dané vzťahom $L(\bar{u}) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}$. Znázornite obrazy $L(\bar{u})$ nasledujúcich vektorov:

(a) $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Výsledok: $L(\bar{u}_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



Obr. 5.8: $\bar{u}_1 = (-2,1)^T$, $L(\bar{u}_1) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_1 = (-2,1)^T$

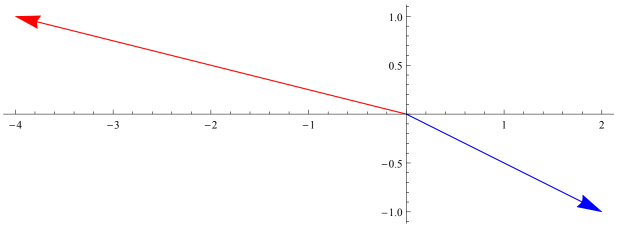
(b) $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Výsledok: $L(\bar{u}_2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$



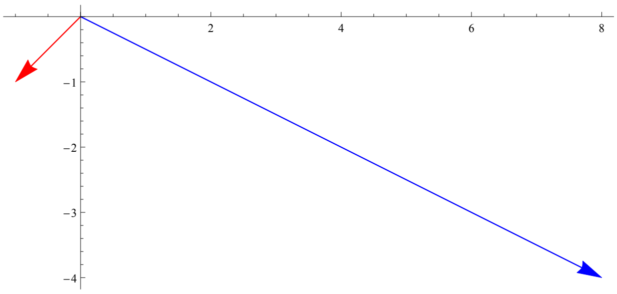
Obr. 5.9: $\bar{u}_2 = (2,0)^T$, $L(\bar{u}_2) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_2 = (-4,2)^T$

(c) $\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ Výsledok: $L(\bar{u}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) $\bar{u}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Výsledok: $L(\bar{u}_4) = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$



Obr. 5.10: $\bar{u}_3 = (-4, 1)^T$, $L(\bar{u}_3) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_3 = (2, -1)^T$



Obr. 5.11: $\bar{u}_4 = (-1, -1)^T$, $L(\bar{u}_4) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_3 = (8, -4)^T$

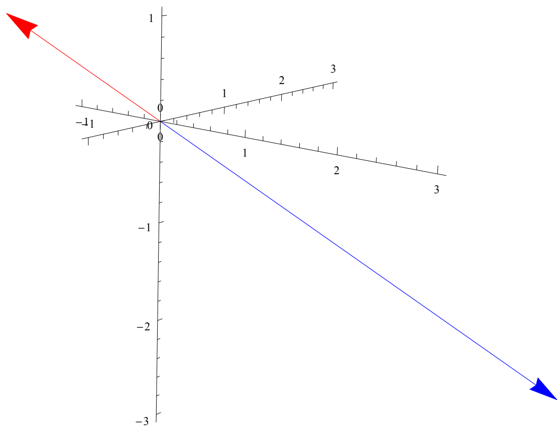
2. Je zadaná matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -6 \\ 1 & -10 & -6 \\ -2 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ a lineárne zobrazenie L dané vzťahom $L(\bar{u}) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}$. Znázornite obrazy $L(\bar{u})$ nasledujúcich vektorov:

(a) $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Výsledok: $L(\bar{u}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

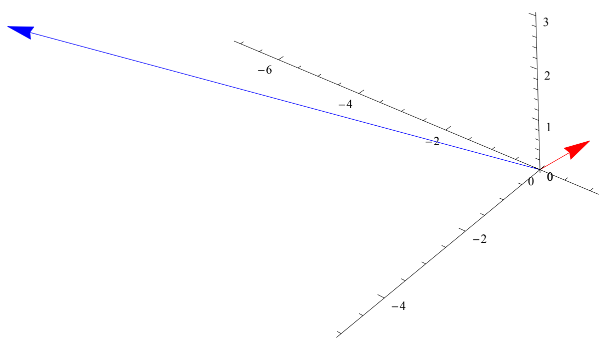
(b) $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Výsledok: $L(\bar{u}_2) = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ Výsledok: $L(\bar{u}_3) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix}$

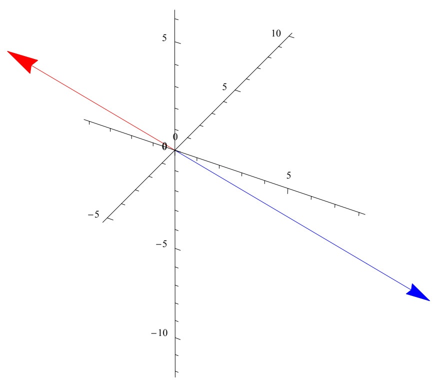
(d) $\bar{u}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ Výsledok: $L(\bar{u}_4) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$



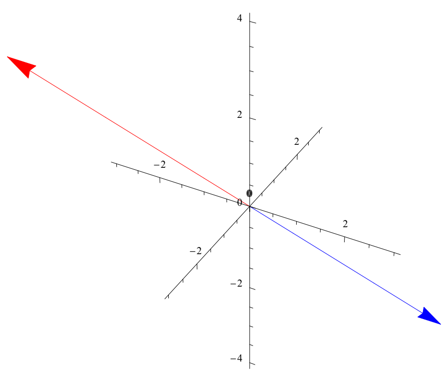
Obr. 5.12: $\bar{u}_1 = (-1,-1,1)^T$, $L(\bar{u}_1) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_1 = (3,3,-3)^T$



Obr. 5.13: $\bar{u}_2 = (1,0,1)^T$, $L(\bar{u}_2) = \mathbf{A} \cdot \bar{u}_2 = (-7,-5,3)^T$



Obr. 5.14: $\bar{u}_3 = (-4,-5,6)^T$, $L(\bar{u}_3) = \mathbf{A}\cdot\bar{u}_3 = (8,10,-12)^T$



Obr. 5.15: $\bar{u}_4 = (-3,-3,4)^T$, $L(\bar{u}_4) = \mathbf{A}\cdot\bar{u}_4 = (3,3,-4)^T$

5.2 Vlastné čísla a vlastné vektory

Situáciu, s ktorou sme sa stretli v predchádzajúcej podkapitole v príklade č. 1 v časti (c) a (d) a v príklade č. 2 v časti (a) a (e), teraz zovšeobecníme.

Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica typu $n \times n$. Nenulový stĺpcový n-rozmerný vektor $\bar{u}$ nazveme **vlastným vektorom matice A**, ak existuje také číslo λ, že

$$\mathbf{A} \cdot \bar{u} = \lambda \cdot \bar{u} \ .$$

Toto číslo λ nazveme **vlastným číslom matice A** prislúchajúce vlastnému vektoru $\bar{u}$. Rovnako, vektor $\bar{u}$ je vlastným vektorom prislúchajúcim vlastnému číslu λ. Uvedomme si, že ak $\bar{u}$ a $\bar{v}$ sú vlastné vektory prislúchajúce tomu istému vlastnému číslu λ, tak aj ich ľubovoľná nenulová lineárna kombinácia

$$\bar{w} = r \cdot \bar{u} + s \cdot \bar{v}$$

je vlastným vektorom prislúchajúcim vlastnému číslu λ. Je to preto, že ak $\mathbf{A} \cdot \bar{u} = \lambda \cdot \bar{u}$ a $\mathbf{A} \cdot \bar{v} = \lambda \cdot \bar{v}$, tak

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \bar{w} = \mathbf{A} \cdot (r \cdot \bar{u} + s \cdot \bar{v}) = \mathbf{A} \cdot (r \cdot \bar{u}) + \mathbf{A} \cdot (r \cdot \bar{v}) = \\ = r \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{u} + s \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{v} = r \cdot (\lambda \cdot \bar{u}) + s \cdot (\lambda \cdot \bar{v}) = \\ = \lambda \cdot (r \cdot \bar{u} + s \cdot \bar{v}) = \lambda \cdot \bar{w} \ . \end{aligned}$$

Ako počítame vlastné čísla a vlastné vektory? Všimnime si, že rovnosť $\mathbf{A} \cdot \bar{u} = \lambda \cdot \bar{u}$ je ekvivalentná rovnosti $\mathbf{A} \cdot \bar{u} = \lambda \cdot \mathbf{I} \cdot \bar{u}$, kde $\mathbf{I}$ je jednotková matica typu $n \times n$. Poslednú rovnosť možno prepísať do tvaru

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \cdot \bar{u} = \mathbf{0}. \tag{5.2}$$

Na maticovú rovnicu (5.2) možno hľadieť ako na sústavu n lineárnych rovníc s neznámymi $u_1, u_2, ..., u_n$, čo sú zložky stĺpcového vektora $\bar{u}$. Keďže podľa našej definície $\bar{u}$ je nenulový vektor, táto sústava n rovníc s n neznámymi a nulovými pravými stranami má nenulové riešenie. To je však podľa teórie riešenia sústav lineárnych rovníc možné vtedy a len vtedy, keď determinant matice sústavy, t. j. $|\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}|$, je nulový. Vlastné čísla λ matice $\mathbf{A}$ preto spĺňajú rovnosť

$$|\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}| = 0 \ ,$$

a to je rovnica, z ktorej ich počítame. Príslušné vlastné vektory potom nájdeme ako všetky nenulové riešenia sústavy (5.2).

Príklad č. 1. Vypočítame vlastné čísla a vlastné vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

Krok č. 1: Vlastné čísla λ vypočítame z rovnice $|\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}| = 0$, teda

$$|\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(1-\lambda) - 3 \cdot 0 = \lambda^2 - 7\lambda + 6.$$

Krok č. 2: Výpočtom determinantu sme dostali kvadratickú rovnicu $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$. Vypočítame korene kvadratickej rovnice a dostaneme vlastné čísla λ matice.

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$
$$(\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$$

Vlastné čísla matice sú:

$$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 1$$

Krok č. 3: Vypočítame vlastné vektory k príslušnému vlastnému číslu $\lambda_1 = 6$, čiže všetky nenulové vektory $\bar{u}$ spĺňajúce rovnicu $(\mathbf{A} - 6 \cdot \mathbf{I}) \cdot \bar{u} = \mathbf{0}$, kde $\bar{u} = (u_1, u_2)^T$ je vektor s neznámymi u_1, u_2. Pre skrátenie výpočtu budeme na ekvivalenciu matíc získanú použitím elementárnych riadkových operácii **ERO1 - 3** používať symbol $\sim$.

- pre $\lambda_{\mathbf{1}} = 6$:

$$\begin{pmatrix} 6-\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6-6 & 0 \\ 3 & 1-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -5/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Krok č. 4: Z tohto redukovaného tvaru vypíšeme všetky riešenia tak, ako sme to robili v kapitole 2. Namiesto neznámej u_2 zavedieme parameter t, teda $u_2 = t$, pričom $t \neq 0$. Výsledok teda je, že vlastnému číslu $\lambda_{\mathbf{1}} = 6$ prislúcha nekonečne veľa vlastných vektorov

$$\begin{array}{rcr} u_1 & = & (5/3)t \\ u_2 & = & t \end{array}, \qquad \text{čiže } \bar{u} = t \cdot \begin{pmatrix} 5/3 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } t \neq 0.$$

Krok č. 5: Vypočítame vlastné vektory k príslušnému vlastnému číslu $\lambda_2 = 1$, čiže všetky nenulové vektory $\bar{u} = (u_1, u_2)^T$ spĺňajúce rovnicu $(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I}) \cdot \bar{u} = \mathbf{0}$.

- pre $\lambda_{\mathbf{2}} = 1$:

$$\begin{pmatrix} 6-\lambda & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6-1 & 0 \\ 3 & 1-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Krok č. 6: Z redukovaného tvaru vypíšeme všetky riešenia. Namiesto neznámej u_2 zavedieme parameter t, teda $u_2 = t$, pričom $t \neq 0$. Výsledok je, že vlastnému číslu $\lambda_{\mathbf{2}} = 1$ prislúcha nekonečne veľa vlastných vektorov

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & 0 \\ u_2 & = & t \end{array}, \qquad \text{čiže } \bar{u} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } t \neq 0.$$

Záver: K vlastnému číslu $\lambda_{\mathbf{1}} = 6$ prislúcha nekonečne veľa vlastných vektorov

$$\bar{u} = t \cdot \begin{pmatrix} 5/3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

K vlastnému číslu $\lambda_{\mathbf{2}} = 1$ prislúcha nekonečne veľa vlastných vektorov

$$\bar{u} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

□

Príklad č. 2. Vypočítame vlastné čísla a vlastné vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

Krok č. 1: Vlastné čísla λ vypočítame z rovnice $|\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}| = 0$. Keďže tu máme determinant stupňa $n = 3$, na výpočet determinantu použijeme Sarrusovo pravidlo.

$$|\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}| = \left| \begin{array}{rrr|rr} -1-\lambda & -2 & -2 & -1-\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 1 & 2-\lambda \\ -1 & -1 & -\lambda & -1 & -1 \end{array} \right| =$$

$$= (-1-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda) + (-2) \cdot 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \cdot (-1) -$$

$$-(-2) \cdot (2-\lambda) \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 \cdot (-1-\lambda) - (-2) \cdot 1 \cdot (-\lambda) =$$

$$= 2\lambda - \lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 4 - 5 - \lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$$

Krok č. 2: Výpočtom determinantu sme dostali kubickú rovnicu $-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1=0$. Vhodným vynímaním vypočítame korene kubickej rovnice a dostaneme vlastné čísla λ matice.

$$\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$$
$$\lambda^2(\lambda-1)-1(\lambda-1)=0$$
$$(\lambda-1)(\lambda^2-1)=0$$

Z poslednej rovnosti vidíme, že vlastné čísla matice sú:

$$\lambda_1=-1,\quad \lambda_{2,3}=1.$$

Krok č. 3: Vypočítame vlastné vektory k príslušnému vlastnému číslu $\lambda_1=-1$, teda všetky nenulové vektory $(\mathbf{A}-(-1)\cdot\mathbf{I})\cdot\bar{u}=\mathbf{0}$, kde $\bar{u}=(u_1,u_2,u_3)^T$.

- pre $\boldsymbol{\lambda_1}=-1$:

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 0-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1+1 & -2 & -2 \\ 1 & 2-(-1) & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Krok č. 4: Dostali sme redukovaný tvar matice, z ktorej vypíšeme všetky riešenia. Neznámu u_3 položíme rovnú parametru t, teda $u_3=t$, pričom $t\neq 0$. K vlastnému číslu $\boldsymbol{\lambda_1}=-1$ sme našli nekonečne veľa vlastných vektorov

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & 2t \\ u_2 & = & -t \\ u_3 & = & t \end{array}, \qquad \text{čiže} \qquad \bar{u}=t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad t\neq 0.$$

Krok č. 5: Vypočítame vlastné vektory k príslušnému vlastnému číslu $\lambda_{2,3}=1$, t. j. všetky nenulové vektory, ktoré sú riešením maticovej rovnice $(\mathbf{A}-1\cdot\mathbf{I})\cdot\bar{u}=\mathbf{0}$.

- pre $\lambda_{\mathbf{2,3}} = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 0-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1-1 & -2 & -2 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Krok č. 6: Vyjadrili sme si redukovaný tvar matice. Namiesto neznámej u_2 zavedieme parameter t, teda $u_2 = t$, pričom $t \neq 0$. Taktiež neznámu u_3 položíme rovnú parametru s, t. j. $u_3 = s$, pričom $s \neq 0$. Dostali sme vlastné vektory prislúchajúce k vlastnému číslu $\lambda_{\mathbf{2,3}} = 1$:

$$\begin{array}{rcrcr} u_1 & = & -t & - & s \\ u_2 & = & t & + & 0 \\ u_3 & = & 0 & + & s \end{array}, \qquad \text{čiže} \qquad \bar{u} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0, \text{ alebo } \quad s \neq 0.$$

Záver: K vlastnému číslu $\lambda_{\mathbf{1}} = -1$ prislúcha nekonečne veľa vlastných vektorov

$$\bar{u} = t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

K vlastnému číslu $\lambda_{\mathbf{2,3}} = 1$ prislúcha nekonečne veľa vlastných vektorov

$$\bar{u} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0, \text{ alebo } s \neq 0.$$

□

Príklad č. 3. Vypočítajme vlastné čísla a vlastné vektory nasledujúcej matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

Postupujeme rovnakými krokmi ako v predošlých dvoch príkladoch:

Krok č. 1: Vlastné čísla λ vypočítame z rovnice $|\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}| = 0$. Na výpočet determinantu stupňa 3×3 použijeme Sarrusovo pravidlo.

$$|\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{I}| = \left|\begin{array}{rrr|rr} 2-\lambda & 1 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 & 2 & 1-\lambda \\ -1 & 0 & -2-\lambda & -1 & 0 \end{array}\right| =$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda) + 1\cdot(-2)\cdot(-1) + 1\cdot 2\cdot 0 -$$

$$-(1\cdot(1-\lambda)\cdot(-1) - (-2)\cdot 0\cdot(2-\lambda) - 2\cdot 1\cdot(-2-\lambda)) =$$

$$= -2\lambda^2 - \lambda^3 + 6\lambda + 3\lambda^2 - 4 - 2\lambda + 2 + \lambda + 5 = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3$$

Krok č. 2: Dostali sme kubickú rovnicu $-\lambda^3+\lambda^2+5\lambda+3=0$. Vhodným vynímaním vypočítame korene kubickej rovnice a dostaneme vlastné čísla λ našej matice.

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0$$
$$\lambda^2(\lambda+1) - 2\lambda(\lambda+1) - 3(\lambda+1) = 0$$
$$(\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0$$

Vypočítame kvadratickú rovnicu (napr. pomocou diskriminantu) a dostávame, že vlastné čísla matice sú:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 3$$

Vidíme, že máme aj jeden dvojnásobný koreň $\lambda_{1,2} = -1$.

Krok č. 3: Vypočítame vlastné vektory k príslušnému vlastnému číslu $\lambda_{1,2} = -1$, teda všetky nenulové riešenia $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ maticovej rovnice $(\mathbf{A} - (-1)\cdot\mathbf{I})\cdot\bar{u} = \mathbf{0}$.

- pre $\boldsymbol{\lambda_{1,2}} = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2-(-1) & 1 & 1 \\ 2 & 1-(-1) & -2 \\ -1 & 0 & -2-(-1) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Krok č. 4: Z redukovaného tvaru matice vidíme, že pivotné premenné sú u_1 a u_2. Neznámej u_3 priradíme parameter t, t. j. $u_3 = t$, pričom $t \neq 0$. Dostali sme vlastné vektory k vlastnému číslu $\boldsymbol{\lambda_{1,2}} = -1$:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & -t \\ u_2 & = & 2t \\ u_3 & = & t \end{array}, \qquad \text{alebo vo vektorovom tvare:} \qquad \bar{u} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

Krok č. 5: Vypočítame vlastné vektory k príslušnému vlastnému číslu $\lambda_3 = 3$, čiže všetky nenulové riešenia maticovej rovnice $(\mathbf{A} - 3 \cdot \mathbf{I}) \cdot \bar{u} = \mathbf{0}$.

- pre $\lambda_\mathbf{3} = 3$:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 1 \\ 2 & 1-3 & -2 \\ -1 & 0 & -2-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Krok č. 6: Namiesto neznámej u_3 opäť zavedieme parameter t, teda $u_3 = t$, pričom $t \neq 0$. Dostali sme vlastné vektory k vlastnému číslu $\lambda_\mathbf{3} = 3$:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & -5t \\ u_2 & = & -6t \\ u_3 & = & t \end{array}, \qquad \text{vektorový tvar} \qquad \bar{u} = t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

Záver: K vlastnému číslu $\lambda_\mathbf{1,2} = -1$ prislúcha nekonečne veľa vlastných vektorov

$$\bar{u} = t. \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

K vlastnému číslu $\lambda_\mathbf{3} = 3$ prislúcha nekonečne veľa vlastných vektorov

$$\bar{u} = t. \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

□

Príklady na cvičenia:

Vypočítajte vlastné čísla a vlastné vektory nasledujúcich matíc:

1. $$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = 12$, vlastné vektory $r \cdot \bar{u}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $r \neq 0$,

$\lambda_{\mathbf{2}} = -7$, vlastné vektory $s \cdot \bar{v}$, kde $\bar{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $s \neq 0$.

2. $$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = \lambda_{\mathbf{2}} = 2$, vlastné vektory sú len $r \cdot \bar{u}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $r \neq 0$.

3. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = -1$, vlastné vektory $r \cdot \bar{u}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $r \neq 0$,

$\lambda_{\mathbf{2}} = 1$, vlastné vektory $s \cdot \bar{v}$, kde $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ a $s \neq 0$.

4. $$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = 4$, vlastné vektory $r \cdot \bar{u}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1, \end{pmatrix}$ a $r \neq 0$,

$\lambda_{\mathbf{2}} = -1$, vlastné vektory $s \cdot \bar{v}$, kde $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $s \neq 0$.

5.
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = 5$, vlastné vektory $r \cdot \bar{u}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ a $r \neq 0$,

$\lambda_{\mathbf{2}} = -2$, vlastné vektory $s \cdot \bar{v}$, kde $\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $s \neq 0$.

6.
$$\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = 1$, vlastné vektory $r \cdot \bar{u}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $r \neq 0$,

$\lambda_{\mathbf{2}} = 0$, vlastné vektory $s \cdot \bar{v}$, kde $\bar{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $s \neq 0$.

7.
$$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = 7$, vlastné vektory $r \cdot \bar{u}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $r \neq 0$,

$\lambda_{\mathbf{2}} = 1$, vlastné vektory $s \cdot \bar{v}$, kde $\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $s \neq 0$.

8.
$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = \lambda_{\mathbf{2}} = 4$, vlastné vektory sú len $r \cdot \bar{u}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $r \neq 0$.

9.
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = 3$, $\lambda_{\mathbf{2}} = \lambda_{\mathbf{3}} = 2$ vlastné vektory sú $r \cdot \bar{u} + s \cdot \bar{v}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a aspoň jedno z $r, s \neq 0$.

10.
$$\begin{pmatrix} 18 & -6 & -8 \\ 36 & -11 & -18 \\ 16 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = 2$, vlastné vektory $r \cdot \bar{u}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $r \neq 0$,

$\lambda_{\mathbf{2}} = -2$, vlastné vektory $s \cdot \bar{v}$, kde $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $s \neq 0$,

$\lambda_{\mathbf{3}} = 1$, vlastné vektory $t \cdot \bar{w}$, kde $\bar{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $t \neq 0$.

11.
$$\begin{pmatrix} 3 & -16 & 12 \\ 0 & -13 & 12 \\ 0 & -16 & 15 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = \lambda_{\mathbf{2}} = 3$, vlastné vektory sú $r \cdot \bar{u} + s \cdot \bar{v}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ a $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, aspoň jedno z $r, s \neq 0$.

$\lambda_{\mathbf{3}} = -1$, vlastné vektory sú $t \cdot \bar{w}$, kde $\bar{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $t \neq 0$.

12.
$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = -1$, vlastné vektory sú $r \cdot \bar{u}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ a $r \neq 0$,

$\lambda_{\mathbf{2}} = \lambda_{\mathbf{3}} = 1$ vlastné vektory sú $t \cdot \bar{v}$, kde a $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $t \neq 0$.

13. $$\begin{pmatrix} 32 & -10 & -15 \\ 48 & -14 & -24 \\ 36 & -12 & -16 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = -2$, vlastné vektory sú $r \cdot \bar{u}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ a $r \neq 0$,

$\lambda_{\mathbf{2}} = \lambda_{\mathbf{3}} = 2$, vlastné vektory sú $s \cdot \bar{v} + t \cdot \bar{w}$, kde $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\bar{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ a aspoň jedno z $s, t \neq 0$.

14. $$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -16 & -8 & -8 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = -4$, vlastné vektory $r \cdot \bar{u}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $r \neq 0$,

$\lambda_{\mathbf{2}} = 2$, vlastné vektory $s \cdot \bar{v}$, kde $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $s \neq 0$,

$\lambda_{\mathbf{3}} = 1$, vlastné vektory $t \cdot \bar{w}$, kde $\bar{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $t \neq 0$.

15. $$\begin{pmatrix} 19 & 10 & 10 \\ -40 & -21 & -20 \\ 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = 4$, vlastné vektory sú $r \cdot \bar{u}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $r \neq 0$,

$\lambda_{\mathbf{2}} = \lambda_{\mathbf{3}} = -1$, vlastné vektory sú $s \cdot \bar{v} + t \cdot \bar{w}$, kde $\bar{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\bar{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ a aspoň jedno z $s, t \neq 0$.

16.
$$\begin{pmatrix} -1 & -8 & -6 \\ 1 & -10 & -6 \\ -2 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = -3$, vlastné vektory $r \cdot \bar{u}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $r \neq 0$,

$\lambda_{\mathbf{2}} = -2$, vlastné vektory $s \cdot \bar{v}$, kde $\bar{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ a $s \neq 0$,

$\lambda_{\mathbf{3}} = -1$, vlastné vektory $t \cdot \bar{w}$, kde $\bar{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ a $t \neq 0$.

17.
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = \lambda_{\mathbf{2}} = -2$, vlastné vektory sú $r \cdot \bar{u} + s \cdot \bar{v}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a aspoň jedno z $r, s \neq 0$.

$\lambda_{\mathbf{3}} = 4$, vlastné vektory sú $t \cdot \bar{w}$, kde $\bar{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $t \neq 0$.

18.
$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledok: $\lambda_{\mathbf{1}} = \lambda_{\mathbf{2}} = 1$, vlastné vektory sú $r \cdot \bar{u} + s \cdot \bar{v}$, kde $\bar{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\bar{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ a aspoň jedno z $r, s \neq 0$.

$\lambda_{\mathbf{3}} = 10$, vlastné vektory sú $t \cdot \bar{w}$, kde $\bar{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $t \neq 0$.

Kapitola 6

Analytická geometria

Na začiatok si zopakujeme niektoré fakty zo strednej školy.

Ak máme usporiadanú dvojicu bodov (A, B), $A = (x_A,\ y_A,\ z_A)$ a $B = (x_B,\ y_B,\ z_B)$, súradnice vektora $\bar{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ určeného touto usporiadanou dvojicou získame ako rozdiel súradníc týchto dvoch bodov, teda

$$\bar{u} = B - A = (x_B - x_A\ ,\ \ y_B - y_A\ ,\ \ z_B - z_A)\ .$$

Dĺžku (veľkosť) vektora $|\bar{u}|$ v priestore vypočítame ako odmocninu súčtu druhých mocnín súradníc vektora, čiže:

$$|\bar{u}| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}\ .$$

Nulový vektor je vektor s nulovými súradnicami a nulovou dĺžkou.

Jednotkový vektor je vektor, ktorého dĺžka je rovná jednej.

Súčin vektora $\bar{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ a konštanty c je vektor $c \cdot \bar{u} = (c \cdot u_1,\ c \cdot u_2,\ c \cdot u_3)$.

Opačný vektor k vektoru $\bar{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ je vektor $-\bar{u} = (-u_1,\ -u_2,\ -u_3)$.

Súčet dvoch vektorov $\bar{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ a $\bar{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ je vektor, ktorý získame spočítaním súradníc oboch vektorov:

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ u_3 + v_3)\ .$$

Rozdiel dvoch vektorov $\bar{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ a $\bar{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ je vektor, ktorý získame odčítaním súradníc oboch vektorov:

$$\bar{u} - \bar{v} = (u_1 - v_1,\ u_2 - v_2,\ u_3 - v_3)\ .$$

Lineárna kombinácia vektorov $\bar{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ a $\bar{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ je vektor $\bar{w}$, ktorý vznikne ako súčet násobkov súradníc vektorov $\bar{u}$ a $\bar{v}$, teda

$$\bar{w} = c_1 \cdot \bar{u} + c_2 \cdot \bar{v}\ ,$$

kde c_1, c_2 sú konštanty, pričom $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$. Podobne možno hovoriť o lineárnej kombinácii troch a viac vektorov.

Príklad č. 1. Dané sú dva vektory $\bar{u} = (4, 2, -1)$, $\bar{v} = (2, 3, 0)$. Našou úlohou je zistiť, či vektor $\bar{w} = (2, -5, -2)$ je lineárnou kombináciou vektorov $\bar{u}$ a $\bar{v}$.

Riešenie: Už vieme, že vektor $\bar{w}$ bude lineárnou kombináciou vektorov vtedy, ak bude súčtom násobkov súradníc vektorov $\bar{u}$ a $\bar{v}$, čiže ak

$$\bar{w} = c_1 \cdot \bar{u} + c_2 \cdot \bar{v} \ .$$

Po dosadení dostávame

$$(2, -5, -2) = c_1 \cdot (4, 2, -1) + c_2 \cdot (2, 3, 0) = (4c_1 + 2c_2, \quad 2c_1 + 3c_2, \quad -c_1 + 0c_2),$$

čo dáva sústavu troch rovníc o dvoch neznámych c_1 a c_2:

$$\begin{array}{rcrcr} 4c_1 & + & 2c_2 & = & 2 \\ 2c_1 & + & 3c_2 & = & -5 \\ -c_1 & & & = & -2 \end{array}$$

Všimnime si, že ak by sa vektory $\bar{u}$ a $\bar{v}$ napísali ako stĺpcové vektory, tak uvedená sústava má tvar $\mathbf{A} \cdot \bar{x} = \mathbf{B}$, kde matica $\mathbf{A}$ je tvorená stĺpcami vektorov $\bar{u}$ a $\bar{v}$ a $\mathbf{B}$ je stĺpcový vektor $\bar{w}$, pričom $\bar{x} = (c_1, c_2)^T$.

Vyriešením tejto sústavy, napríklad Gaussovou eliminačnou metódou, dostávame hodnoty $c_1 = 2$ a $c_2 = -3$, čiže

$$\bar{w} = 2 \cdot \bar{u} - 3 \cdot \bar{v}.$$

Z výsledku vidíme, že vektor $\bar{w}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\bar{u}$ a $\bar{v}$. □

Skalárny súčin dvoch vektorov $\bar{u} = (u_1, \ u_2, \ u_3)$ a $\bar{v} = (v_1, \ v_2, \ v_3)$ je číslo

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 \ .$$

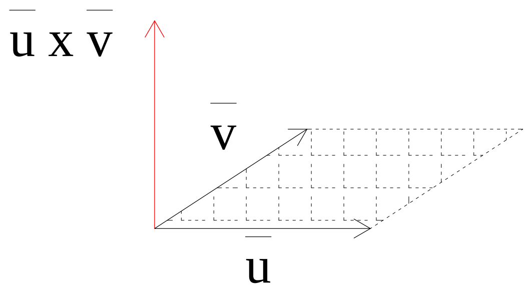
Ak dva vektory zvierajú uhol φ, potom skalárny súčin dvoch vektorov $\bar{u} = (u_1, \ u_2, \ u_3)$ a $\bar{v} = (v_1, \ v_2, \ v_3)$ môžme vypočítať pomocou vzorca

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos(\varphi) \ .$$

Uhol φ dvoch vektorov $\bar{u} = (u_1, \ u_2, \ u_3)$ a $\bar{v} = (v_1, \ v_2, \ v_3)$, $0 \le \varphi \le \pi$, je možné určiť zo vzťahu

$$\cos(\varphi) = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|} \ .$$

Skalárny súčin $\bar{u} \cdot \bar{v}$ je rovný 0 práve vtedy, keď vektory $\bar{u}$ a $\bar{v}$ sú na seba kolmé.



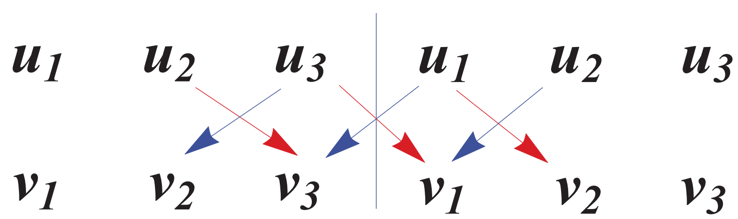
Obr. 6.1: Vektorový súčin.

Vektorový súčin $\bar{u} \times \bar{v}$ je vektor $\bar{w}$, ktorého súradnice sú dané vzťahom

$$\bar{u} \times \bar{v} = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2,\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3,\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1)\ .$$

Poznamenajme, že vektor $\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v}$ je kolmý na vektory $\bar{u}$ a $\bar{v}$.

Mnemotechnická pomôcka na výpočet vektorového súčinu sa dá znázorniť nasledujúcim diagramom:



Dĺžka vektorového súčinu dvoch vektorov $\bar{u}$ a $\bar{v}$ nám zároveň udáva plošný obsah rovnobežníka vytvoreného týmito dvoma vektormi. Navyše, ak $\bar{u}$, $\bar{v}$ zvierajú uhol $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, tak

$$|\bar{w}| = |\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \sin(\varphi)\ .$$

Príklad č. 2. Vypočítame veľkosť vektorového súčinu dvoch vektorov $\bar{u} = (-2, 3, 0)$ a $\bar{v} = (1, 4, -5)$.

Riešenie:

$$\bar{u} \times \bar{v} = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2,\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3,\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1)$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = (3 \cdot (-5) - 0 \cdot 4,\ 0 \cdot 1 - (-2) \cdot (-5), (-2) \cdot 4 - 3 \cdot 1)$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = (-15, -10, -11)$$

Vektorový súčin vektorov $\bar{u}$ a $\bar{v}$ je vektor $\bar{w} = (-15, -10, -11)$.

Veľkosť vektora $|\bar{w}|$ vypočítame nasledovne:

$$|\bar{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} = \sqrt{(-15)^2 + (-10)^2 + (-11)^2} = \sqrt{446} = 21,12. \qquad \square$$

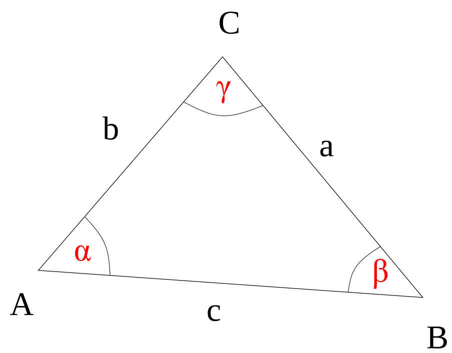
Obsah trojuholníka ABC určeného vektormi $\bar{b} = AC$ a $\bar{c} = AB$ je

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\bar{b} \times \bar{c}|.$$

Objem rovnobežnostena určeného vektormi $\bar{u} = AB$, $\bar{v} = AD$, $\bar{w} = AE$ vypočítame pomocou zmiešaného súčinu, teda vektorového súčinu vektorov $\bar{u}$ a $\bar{v}$ a následne skalárneho súčinu s vektorom $\bar{w}$:

$$V = |(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}|$$

Príklad č. 3. Majme trojuholník ABC so súradnicami vrcholov $A = (1, 2, -3)$, $B = (-1, -2, -2)$, $C = (0, 2, 1)$. Vypočítame vnútorné uhly α, β, γ a taktiež obsah trojuholníka ABC.



Riešenie:

Uhol α zvierajú vektory $\overline{AB}$ a $\overline{AC}$. Vypočítame smerové vektory strán $\overline{AC}$ a $\overline{AB}$ trojuholníka ABC:

$$\overline{AC} = (C - A) = (0 - 1, 2 - 2, 1 - (-3)) = (-1, 0, 4)$$
$$\overline{AB} = (B - A) = (-1 - 1, -2 - 2, -2 - (-3)) = (-2, -4, 1)$$

Veľkosti vektorov $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ vypočítame nasledovne:

$$|\overline{AC}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{17} \doteq 4,12$$
$$|\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{21} \doteq 4,58$$

Uhol α vypočítame zo vzťahu:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{|\overline{AC}| \cdot |\overline{AB}|} = \frac{(-1) \cdot (-2) + 0 \cdot (-4) + 4 \cdot 1}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{21}}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{6}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{21}} = 0,31755$$
$$\alpha \doteq 71°27'$$

Uhol β zvierajú vektory $\overline{BC}$ a $\overline{BA}$. Vypočítame smerové vektory strán $\overline{BC}$ a $\overline{BA}$ pre uhol β:

$$\overline{BA} = (A - B) = (1 - (-1), 2 - (-2), (-3) - (-2)) = (2, 4, -1)$$
$$\overline{BC} = (C - B) = (0 - (-1), 2 - (-2), 1 - (-2)) = (1, 4, 3)$$

Veľkosti vektorov $\overline{BC}$, $\overline{BA}$ vypočítame nasledovne:

$$|\overline{BA}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{21} \doteq 4,58$$
$$|\overline{BC}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{26} \doteq 5,1$$

Uhol β vypočítame nasledovne:

$$\cos(\beta) = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{1 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{26}}$$
$$\cos(\beta) = \frac{15}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{26}} = 0,64194$$
$$\beta \doteq 50°$$

Uhol γ zvierajú vektory $\overline{CB}$ a $\overline{CA}$. Vypočítame smerové vektory strán $\overline{CB}$ a $\overline{CA}$ pre uhol γ:

$\overline{CB} = (B - C) = (-1 - 0, -2 - 2, -2 - 1) = (-1, -4, -3)$

$\overline{CA} = (A - C) = (1 - 0, 2 - 2, -3 - 1) = (1, 0, -4)$

Veľkosti vektorov $\overline{CB}$, $\overline{CA}$ vypočítame nasledovne:

$|\overline{CB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26} \doteq 5,1$

$|\overline{CA}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(1^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{17} \doteq 4,12$

Uhol γ vypočítame nasledovne:

$$\cos(\gamma) = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CA}}{|\overline{CB}| \cdot |\overline{CA}|} = \frac{(-1) \cdot 1 + (-4) \cdot 0 + (-3) \cdot (-4)}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{17}}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{11}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{17}} = 0,52322$$

$$\gamma \doteq 58°33‘$$

(Poznámka: Uhol γ sme mohli vypočítať aj z faktu, že $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.)

Obsah trojuholníka ABC vypočítame pomocou vzťahu: $S = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}|$

Vektorový súčin dvoch vektorov:

$\overline{AB} \times \overline{AC} = (0 \cdot 1 - 4 \cdot (-4),\ 4 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1,\ (-1) \cdot (-4) - 0 \cdot (-2)) = (16,\ -9,\ 4)$

Veľkosť vektorového súčinu: $|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{16^2 + (-9)^2 + 4^2} \doteq 18,79$

Obsah trojuholníka ABC bude teda: $S = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{18,79}{2} \doteq 9,39$

Záver: Veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC sú približne: $\alpha = 71°27‘$, $\beta = 50°$, $\gamma = 58°33‘$ a obsah trojuholníka je približne $9,39$. □

6.1 Parametrické vyjadrenie priamky v priestore

Parametrické vyjadrenie priamky p v rovine xyz určená bodom $A = (a_1, a_2, a_3)$ a smerovým vektorom $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3)$ má tvar

$$p: \begin{array}{rcrcl} x & = & a_1 & + & t \cdot s_1 \\ y & = & a_2 & + & t \cdot s_2 \\ z & = & a_3 & + & t \cdot s_3 \end{array} \qquad \text{alebo} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix},$$

kde $t \in \mathcal{R}$ je parameter.

Ak použijeme stĺpcové označenie $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\bar{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$, tak vyjadrenie sa zjednoduší na rovnicu tvaru $\mathbf{X} = \mathbf{A} + t \cdot \bar{s}$.

Príklad č. 4. Napíšeme parametrické vyjadrenie priamky prechádzajúcej dvoma bodmi $A = (-2, 0, 3)$ a $B = (3, -3, 1)$.

Riešenie: Vieme už, že na parametrické vyjadrenie priamky potrebujeme bod, ktorý leží na priamke a smerový vektor, ktorý je rovnobežný s priamkou. Smerový vektor získame ako rozdiel súradníc bodov $B - A$, teda $\bar{s} = (3 - (-2), (-3) - 0, 1 - 3) = (5, -3, -2)$. Parametrické vyjadrenie našej priamky je

$$\begin{array}{rcrcl} x & = & -2 & + & 5t \\ y & = & 0 & - & 3t \\ z & = & 3 & - & 2t \end{array}$$

□

Parametrické vyjadrenie priamky v rovine sa líši od parametrického vyjadrenia priamky v priestore len tým, že tretia súradnica bodu A a smerového vektora $\bar{s}$ sú nulové. V tom prípade ich môžeme vynechať a hovoriť len o bode $A = (a_1, a_2)$ a smerovom vektore $\bar{s} = (s_1, s_2)$. Priamka v rovine určená týmto bodom a vektorom má potom parametrickú rovnicu:

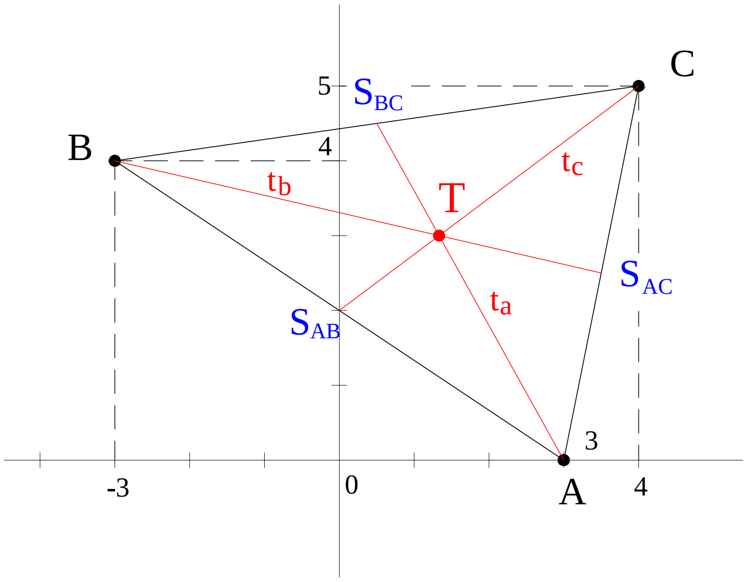
$$p: \begin{array}{rcrcl} x & = & a_1 & + & t \cdot s_1 \\ y & = & a_2 & + & t \cdot s_2 \end{array},$$

kde $t \in \mathcal{R}$ je parameter.

Parametrické vyjadrenie priamky závisí od voľby bodu a smerového vektora. Rôzne voľby vedú k formálne rôznym (ale stále správnym) riešeniam.

Príklad č. 5. Majme trojuholník ABC so súradnicami vrcholov $A = (0, 3)$, $B = (-3, 4)$ a $C = (4, 5)$. Vypočítame ťažisko trojuholníka ABC a dĺžky ťažníc trojuholníka.

Riešenie:



Vypočítame najprv súradnice stredov strán trojuholníka S_{AB}, S_{AC}, S_{BC}:

$$S_{AB} = \frac{1}{2}(A + B) = (\tfrac{0-3}{2}, \tfrac{3+4}{2}) = (\tfrac{-3}{2}, \tfrac{7}{2})$$

$$S_{AC} = \frac{1}{2}(A + C) = (\tfrac{0+4}{2}, \tfrac{3+5}{2}) = (2, 4)$$

$$S_{BC} = \frac{1}{2}(B + C) = (\tfrac{-3+4}{2}, \tfrac{4+5}{2}) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{9}{2})$$

Súradnice ťažiska trojuholníka určíme ako priesečník dvoch ťažníc. Preto napíšeme parametrické rovnice ťažníc trojuholníka ABC. Parametrická rovnica je určená bodom a smerovým vektorom. Najprv teda vypočítame smerové vektory jednotlivých ťažníc:

$$\bar{a} = \overline{AS_{BC}} = (A - S_{BC}) = (0 - 1/2, 3 - 9/2) = (-1/2, -3/2)$$

$$\bar{b} = \overline{BS_{AC}} = (B - S_{AC}) = (-3 - 2, 4 - 4) = (-5, 0)$$

$$\bar{c} = \overline{CS_{AB}} = (C - S_{AB}) = (4 - (-3/2)), 5 - 7/2) = (11/2, 3/2)$$

Parametrické vyjadrenie ťažnice t_a určenej bodom A a smerovým vektorom $\bar{a}$, bude mať tvar:

ťažnica t_a : $\mathbf{X} = \mathbf{A} + t \cdot \bar{a}$, alebo po rozpísaní

$$\begin{array}{rcrcl} x & = & & - & (1/2)t \\ y & = & 3 & - & (3/2)t \end{array}, \quad \text{kde } t \in \mathcal{R}$$

Parametrické vyjadrenie ťažnice t_b určenej bodom B a smerovým vektorom $\bar{b}$, bude mať tvar:

ťažnica t_b : $\mathbf{X} = \mathbf{B} + r \cdot \bar{b}$, alebo

$$\begin{array}{rcrcl} x & = & -3 & - & 5r \\ y & = & 4 & & \end{array}, \quad r \in \mathcal{R}.$$

Parametrické vyjadrenie ťažnice t_c určenej bodom C a smerovým vektorom $\bar{c}$, bude mať tvar:

ťažnica t_c : $\mathbf{X} = \mathbf{C} + s \cdot \bar{c}$, alebo

$$\begin{array}{rcrcl} x & = & 4 & + & (11/2)s \\ y & = & 5 & + & (3/2)s \end{array}, \quad s \in \mathcal{R}.$$

Súradnice ťažiska určíme ako priesečník dvoch ťažníc, napríklad t_a a t_c. Porovnáme parametrické vyjadrenia ťažníc t_a a t_c a riešime nasledujúcu sústavu rovníc:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4 & + & (11/2)s & = & & - & (1/2)t \\ 5 & + & (3/2)s & = & 3 & - & (3/2)t \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} 11s & + & t & = & -8 \\ 3s & + & 3t & = & -4 \end{array}$$

Vypočítame parametre s, t a dostávame $s = -2/3$, $t = -2/3$. Súradnice ťažiska T dostaneme, ak dosadíme vypočítané parametre do niektorej z parametrických rovníc ťažníc t_a alebo t_c:

$x = 4 + (11/2) \cdot (-2/3) = 1/3$
$y = 5 + (3/2) \cdot (-2/3) = 4$

Súradnice ťažiska T trojuholníka ABC sú $T = (1/3,\ 4)$.

Ostáva nám vypočítať dĺžky ťažníc trojuholníka:

$$|t_a| = \sqrt{(-1/2)^2 + (-3/2)^2} = \sqrt{5/2}$$

$$|t_b| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$$

$$|t_c| = \sqrt{(11/2)^2 + (3/2)^2} = \sqrt{65/2}$$

□

6.2 Všeobecná rovnica priamky v rovine

Všeobecná rovnica priamky p v rovine, určená bodom $A = (a_1, b_1)$ a normálovým vektorom $\bar{n} = (a, b)$ má tvar skalárneho súčinu

$$p: \quad \bar{n} \cdot (X - A) = 0, \tag{6.1}$$

kde $X = (x, y)$ sú súradnice bodu na priamke. Ak tento skalárny súčin rozpíšeme, dostaneme vzťah

$$a(x - a_1) + b(y - b_1) = 0$$

alebo

$$ax + by + c = 0, \tag{6.2}$$

kde $c = -(aa_1 + bb_1)$.

Príklad č. 6. Našou úlohou je napísať všeobecnú rovnicu priamky, ktorá je určená nasledujúcimi dvoma bodmi $A = (4, -1), B = (3, 2)$.

Riešenie: Máme zadané dva body A a B ležiace na priamke. Aby sme vedeli napísať všeobecnú rovnicu priamky v rovine, potrebujeme jeden bod, ktorý leží na priamke, taktiež normálový vektor, ktorý je kolmý na priamku. Ukážeme si dva spôsoby, ako napísať všeobecnú rovnicu priamky v rovine.

Najprv si vypočítame súradnice smerového vektora $\bar{s} = \overline{AB}$, čo je rozdiel súradníc bodov A a B.

Vektor $\bar{s} = \overline{AB} = (B - A) = (3 - 4, 2 - (-1)) = (-1, 3)$

Prvý spôsob napísania všeobecnej rovnice priamky v rovine je, že si napíšeme najprv jej parametrické vyjadrenie. Máme bod A ležiaci na priamke a jej smerový vektor $\bar{s}$, ktorý sme si vypočítali:

$$\begin{array}{ccccc} X & = & A & + & t \cdot \bar{s}\ , \quad \text{alebo po rozpísaní} \\ x & = & 4 & - & t \\ y & = & -1 & + & 3t \end{array}$$

Teraz stačí riešiť sústavu rovníc a eliminovať parameter t. Pripočítame 3-násobok prvej rovnice k druhej rovnici a dostaneme $3x + y = 11$. Keďže všeobecná rovnica priamky má tvar $ax + by + c = 0$, jednoduchou úpravou dostávame výsledok:

$$3x + y - 11 = 0.$$

Druhým spôsobom si rovno napíšeme všeobecnú rovnicu priamky v tvare $ax+by+c=0$.

Vypočítali sme smerový vektor priamky $\bar{s}=(-1,3)$. Teraz potrebujeme ale normálový vektor $\bar{n}$. Už vieme, že smerový vektor $\bar{s}$ a normálový vektor $\bar{n}$ sú na seba kolmé, teda ich skalárny súčin je nulový, $\bar{s}\cdot\bar{n}=0$. Keďže skalárny súčin vektorov $(-1,3)$ a $(3,1)$ je evidentne nulový, za normálový vektor môžme vziať $\bar{n}=(3,1)$.

Podľa (6.1) všeobecná rovnica priamky je $\bar{n}\cdot(X-A)=0$, kde $A=(4,-1)$, teda $(3,1)(x-4,y-(-1))=0$, čo po výpočte skalárneho súčinu a úprave dáva

$$3x+y-11=0\ .$$

Tento výsledok možno získať aj nasledujúcou modifikáciou. Poznajúc súradnice $\bar{n}=(a,b)=(3,1)$ normálového vektora vieme, že naša priamka má rovnicu

$$4\cdot x+1\cdot y+c=0.$$

Konštantu c vypočítame dosadením súradníc bodu $A=(4,-1)$:

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 1y & + & c & = & 0 \\ 4\cdot 3 & - & 1\cdot 1 & + & c & = & 0 \\ & & & & c & = & -11 \end{array}$$

Tak opäť dostávame všeobecnú rovnicu našej priamky v tvare

$$3x+y-11=0.$$

Poznamenajme, že tvar všeobecnej rovnice priamky v rovine je určený jednoznačne až na nenulovú multiplikatívnu konštantu. To znamená, že napr. aj $6x+2y-22=0$ je rovnica tej istej priamky. □

Príklad č. 7. Majme trojuholník ABC so súradnicami vrcholov $A=(-6,2)$, $B=(2,3)$, $C=(-2,-6)$. Napíšeme parametrické vyjadrenie a všeobecné rovnice priamok, v ktorých ležia výšky strán trojuholníka ABC.

Riešenie:

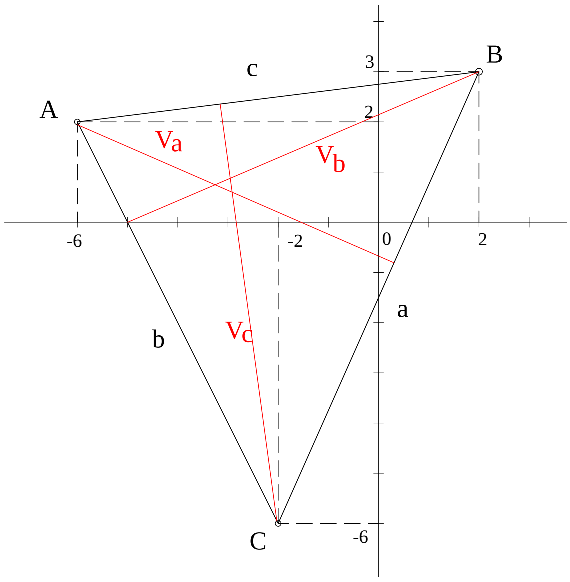
Výška strany trojuholníka je kolmá na danú stranu trojuholníka. Smerový vektor strany je pre danú výšku normálovým vektorom.

Vypočítame najprv súradnice smerových vektorov jednotlivých strán trojuholníka:

$\bar{a}=(C-B)=(-2-2,-6-3)=(-4,-9)$

$\bar{b}=(C-A)=(-2-(-6),-6-2)=(4,-8)$

$\bar{c}=(B-A)=(2-(-6),3-2)=(8,1)$



Napíšeme parametrickú a všeobecnú rovnicu priamky, v ktorej leží výška trojuholníka V_c na stranu c. Smerový vektor $\bar{c}$ strany AB trojuholníka ABC je súčasne normálovým vektorom pre príslušnú výšku V_c. Všeobecná rovnica priamky v rovine má tvar $ax+by+c=0$ a je určená v našom prípade bodom $C=(-2,-6)$ a pre výšku V_c na stranu $AB=c$ normálovým vektorom $\bar{c}=(8,1)$.

Všeobecná rovnica priamky, v ktorej leží výška V_c na stranu c bude mať tvar:

$$8x \quad + \quad 1y \quad + \quad c \quad = \quad 0 \ ,$$

a konštantu c vypočítame dosadením súradníc bodu $C=(-1,-6)$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 8\cdot(-2) & + & 1\cdot(-6) & + & c & = & 0 \\ & & & & c & = & 22 \end{array}$$

teda $\quad V_c: \qquad 8x \quad - \quad y \quad + \quad 22 \quad = \quad 0 \ .$

Vieme, že parametrické vyjadrenie priamky je určené bodom a smerovým vektorom. Pre výšku V_c vezmeme bod $C=(-2,-6)$ a keďže poznáme normálový vektor $\bar{c}=(8,1)$, smerový vektor bude napríklad $\bar{s}_c=(-1,8)$ (skalárny súčin vektorov $\bar{c}\cdot\bar{s}_c$ musí byť nula).

Tak dostávame parametrické vyjadrenie priamky, v ktorej leží výška V_c:

$$X \quad = \quad C \quad + \quad t\cdot\bar{s}_c \ , \qquad \text{alebo}$$

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & -2 & - & t \\ y & = & -6 & + & 8t \end{array}$$

Napíšeme teraz parametrické vyjadrenie a všeobecnú rovnicu priamky, v ktorej leží výška trojuholníka V_b na stranu b. Smerový vektor $\bar{b}$ strany AC trojuholníka ABC je súčasne normálovým vektorom pre príslušnú výšku V_b. Všeobecná rovnica priamky, v ktorej leží výška, je určená v našom prípade bodom $B = (2, 3)$ a normálovým vektorom $\bar{b} = (4, -8)$ a bude mat' tvar

$4x - 8y + c = 0$, pričom c určíme dosadením súradníc bodu $B = (2, 3)$:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2 + (-8) \cdot 3 + c &= 0 \\ c &= 16 \end{aligned}$$

teda $V_b: \quad 4x - 8y + 16 = 0$.

Parametrické vyjadrenie priamky, v ktorej leží výška V_b, určíme napríklad pomocou bodu $B = (2, 3)$, a smerového vektora $\bar{s}_b = (8, 4)$:

$X = B + r \cdot \bar{s}_b$, alebo

$$\begin{aligned} x &= 2 + 8r \\ y &= 3 + 4r \end{aligned}$$

Nakoniec nám ostala ešte parametrická a všeobecná rovnica priamky, v ktorej leží výška trojuholníka V_a na stranu a. Smerový vektor $\bar{a}$ strany BC trojuholníka ABC je súčasne normálovým vektorom pre príslušnú výšku V_a. Všeobecná rovnica priamky, v ktorej leží výška je určená bodom $A = (-6, 2)$ a normálovým vektorom $\bar{a} = (-4, -9)$.

Všeobecná rovnica priamky, v ktorej leží výška V_a na stranu a bude mat' tvar:

$$-4x - 9y + c = 0$$

a konštantu c určíme dosadením súradníc bodu $A = (-6, 2)$:

$$\begin{aligned} (-4) \cdot (-6) + (-9) \cdot 2 + c &= 0 \\ c &= -6 \end{aligned}$$

teda $V_a: \quad -4x - 9y - 6 = 0$.

Parametrické vyjadrenie priamky, v ktorej leží výška V_a odvodíme napríklad pomocou bodu $A = (-6, 2)$ a smerového vektora $\bar{s}_a = (9, -4)$:

Parametrická rovnica priamky, v ktorej leží výška V_a je teda určená rovnicou:

$X = A + v \cdot \bar{s}_b$ alebo po rozpísaní

$$\begin{aligned} x &= -6 + 9v \\ y &= 2 - 4v \end{aligned}$$

□

6.3 Smernicový tvar rovnice priamky v rovine

Smernicový tvar rovnice priamky p, ktorá nie je rovnobežná s osou y, má tvar

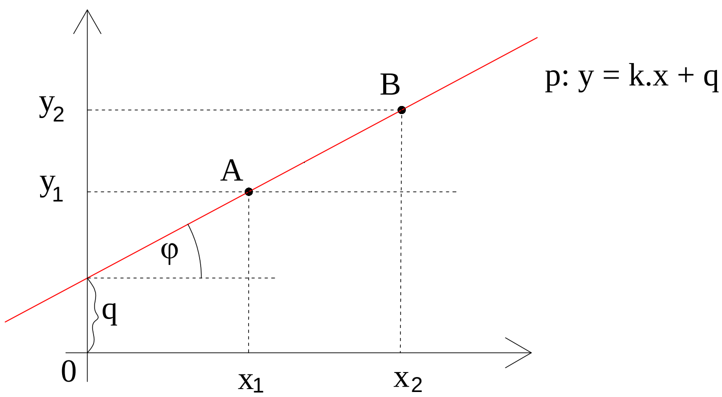
$$y = k \cdot x + q \ ,$$

kde k je tzv. smernica a bod $(0, q)$ je priesečníkom priamky s osou y.

Smernica priamky k je tiež tangens uhla, ktorý zviera priamka s kladnou poloosou osi x, teda $k = \tan(\varphi)$; uhol φ je pritom orientovaný od poloosi x ku priamke.

Pre dva rôzne body $A = (x_1, y_1)$ a $B = (x_2, y_2)$ ležiace na priamke p platí tiež, že

$$\tan(\varphi) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k \ .$$



Uhol dvoch priamok

Ak sú vektory $\bar{u}$, $\bar{v}$ priamok p_1, p_2 buď oba smerové alebo oba normálové, uhol φ priamok p_1, p_2, kde $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, spĺňa vzťah

$$\cos(\varphi) = \left| \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|} \right| \ .$$

Ak $\bar{s}$ je smerový vektor priamky p_1 a $\bar{n}$ je normálový vektor priamky p_2, uhol φ zvieraný priamkami p_1, p_2, $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, je daný vzťahom

$$\sin(\varphi) = \left| \frac{\bar{s} \cdot \bar{n}}{|\bar{s}| \cdot |\bar{n}|} \right| \ .$$

Príklad č. 8. Vypočítajme uhol dvoch priamok p a q v rovine daných parametricky:

$$p: \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & - & 4r \\ y & = & 3 & + & 3r \end{array} \qquad q: \begin{array}{rcrcr} x & = & -1 & - & 3t \\ y & = & 5 & & \end{array}$$

Riešenie: Smerový vektor $\bar{u}$ priamky p má súradnice $\bar{u} = (-4,3)$ a smerový vektor $\bar{v}$ priamky q má súradnice $\bar{v} = (-3,0)$.

Uhol priamok p a q vypočítame zo vzťahu

$$\cos(\varphi) = \left| \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|} \right| = \left| \frac{(-4) \cdot (-3) + 3 \cdot 0}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 0^2}} \right| = \frac{12}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{9}},$$

z čoho máme približne $\varphi \doteq 36°52'$. □

6.4 Vzájomná poloha dvoch priamok

Začneme vzájomnou polohou dvoch **priamok v rovine**.

(a) Ak sú priamky p a q určené všeobecnými rovnicami

$$p : ax + by + c = 0$$

$$q : dx + ey + f = 0$$

a rovnica priamky p je násobkom rovnice pre priamku q, priamky sú totožné. Ak rovnica priamky p nie je násobkom rovnice priamky q, priamky nie sú totožné.

V takom prípade, ak normálový vektor $\bar{n}_p = (a,b)$ priamky p nie je násobkom normálového vektora $\bar{n}_q = (d,e)$ priamky q, priamky sú rôznobežné, inak sú rovnobežné a nie totožné.

(b) Predpokladajme teraz, že priamky p a q sú určené parametrickými rovnicami

$$p : X = A + t \cdot \bar{u}$$

$$q : Y = B + r \cdot \bar{v} \ ,$$

kde $t, r \in \mathcal{R}$ sú parametre.

Ak je smerový vektor $\bar{u}$ násobkom smerového vektora $\bar{v}$, treba zistiť, či bod A leží aj na priamke q. Ak áno, priamky p a q sú totožné. Ak bod A neleží aj na priamke q, priamky sú rovnobežné a rôzne.

Ak smerový vektor $\bar{u}$ nie je násobkom smerového vektora $\bar{v}$ v rovine, priamky p a q sú rôznobežné.

Pre dve priamky v priestore platia obdobné závery s dodatkom, že ak priamky nemajú spoločný bod a nie sú rovnobežné, ide o dvojicu mimobežných priamok.

Príklad č. 9. Určíme vzájomnú polohu dvoch priamok p a q v priestore daných parametricky:

$$p: \begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & 2r \\ y & = & 4 & - & r \\ z & = & 3 & + & 4r \end{array} \qquad\qquad q: \begin{array}{ccccc} x & = & -2 & + & t \\ y & = & 5 & + & 2t \\ z & = & 3 & - & t \end{array}$$

Riešenie: Smerový vektor priamky p má súradnice $\bar{s}_p = (2, -1, 4)$ a smerový vektor priamky q má súradnice $\bar{s}_q = (1, 2, -1)$. Vidíme, že vektor $\bar{s}_p$ nie je násobkom vektora $\bar{s}_q$, teda priamky p a q určite nie sú rovnobežné. Môžu byť ešte rôznobežné, ak majú spoločný bod, alebo mimobežné. Preto ďalším krokom bude hľadať ich prienik. Tento určíme riešením nasledovnej sústavy troch rovníc o dvoch neznámych:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2r & = & -2 & + & t \\ 4 & - & r & = & 5 & + & 2t \\ 3 & + & 4r & = & 3 & - & t \end{array}.$$

Po úprave dostávame sústavu

$$\begin{array}{ccccc} 2r & - & t & = & -3 \\ -r & - & 2t & = & 1 \\ 4r & + & t & = & 0 \end{array}$$

Tieto tri rovnice si prepíšeme do rozšíreného tvaru matice, a postupnými elementárnymi riadkovými operáciami vypočítame neznáme t a r.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -5 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -5 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 27 \end{array}\right)$$

V poslednom riadku matice nastal spor, teda vieme, že táto úloha nebude mať riešenie. Pre nás to znamená, že priesečník našich priamok neexistuje. Dané dve priamky p a q sú teda mimobežné. $\square$

6.5 Parametrické vyjadrenie roviny v priestore

Rovinu ρ v priestore možno určiť bodom a dvoma lineárne nezávislými vektormi v nej ležiacimi. Ak tento bod a tieto dva vektory majú súradnice $A = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$, tak ľubovoľný bod $X = (x, y, z)$ tejto roviny spĺňa rovnice:

$$\begin{array}{ccccccc} x & = & a_1 & + & u_1 t & + & v_1 r \\ y & = & a_2 & + & u_2 t & + & v_2 r \\ z & = & a_3 & + & u_3 t & + & v_3 r \end{array},$$

kde $t, r \in \mathcal{R}$ sú parametre.

Tieto rovnice budeme nazývať parametrickým vyjadrením roviny ρ.

Ak použijeme označenie pomocou stĺpcových vektorov $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ a $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, uvedené rovnice možno zredukovať na jedinú rovnicu:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + s \cdot \bar{u} + t \cdot \bar{v} \ .$$

Rovina ρ môže byť určená aj troma bodmi $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ a $C = (c_1, c_2, c_3)$, ktoré neležia na jednej priamke. V takomto prípade dvojicu lineárne nezávislých vektorov $\bar{u}$ a $\bar{v}$ v rovine môžme získať napríklad z rozdielov súradníc bodov A, B a A, C, teda $\bar{u} = \overline{AB}$ a $\bar{v} = \overline{AC}$.

Príklad č. 10. Napíšeme parametrické vyjadrenie roviny ρ prechádzajúcu troma bodmi $A = (2, -2, 0)$, $B = (-3, 1, 4)$, $C = (0, 3, 2)$.

Riešenie: Parametrické vyjadrenie roviny je určené bodom a dvoma smerovými vektormi. Smerové vektory získame z rozdielu súradníc bodov $\bar{u} = (B - A) = (-5, 3, 4)$ a $\bar{v} = (C - A) = (-2, 5, 2)$. Rovnica roviny ρ má tvar:

$$X \ = \ A \ + \ t \cdot \bar{u} \ + \ r \cdot \bar{v}$$

Po doplnení súradníc bodu $A = (2, -2, 0)$ a oboch smerových vektorov $\bar{u}$ a $\bar{v}$ dostávame parametrické vyjadrenie roviny ρ:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 2 & - & 5t & - & 2r \\ y & = & -2 & + & 3t & + & 5r \\ z & = & & & 4t & + & 2r \end{array}$$

Dvojicu nezávislých vektorov môžme však získať aj tak, že vektor $\bar{u}$ bude určený rozdielom súradníc bodov $(A - B) = (5, -3, -4)$, vektor $\bar{v}$ bude určený rozdielom súradníc bodov $(C - B) = (3, 2, -2)$.

Parametrické vyjadrenie roviny ρ pre túto voľbu $\bar{u}$, $\bar{v}$ bude mať tvar:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & -3 & + & 5t & + & 3r \\ y & = & 1 & - & 3t & + & 2r \\ z & = & 4 & - & 4t & - & 2r \end{array}$$

Hoci sme dostali rozdielne parametrické vyjadrenia, oba výsledky sú správne a vyjadrujú tú istú rovinu ρ. Z tohto príkladu vidieť, že rôzna voľba dvojice lineárne nezávislých vektorov z roviny môže viesť k rôznym tvarom toho istého riešenia. □

6.6 Všeobecná rovnica roviny

Všeobecná rovnica roviny ρ má tvar

$$\rho : ax + by + cz + d = 0 \ ,$$

kde vektor $\bar{n} = (a, b, c)$ je normálový vektor kolmý na rovinu ρ.

V prípade, ak máme zadané parametrické vyjadrenie roviny $\rho : \mathbf{X} = \mathbf{A} + t \cdot \bar{u} + r \cdot \bar{v}$, všeobecnú rovnicu napíšeme nasledovne:

(a) pomocou vektorového súčinu určíme normálový vektor $\bar{n}$, ktorý je kolmý na smerové vektory $\bar{u}$ a $\bar{v}$, čiže $\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v}$,

(b) keď máme normálový vektor $\bar{n} = (a, b, c)$, stačí len dosadiť do všeobecnej rovnice roviny $\rho : ax + by + cz + d = 0$ súradnice normálového vektora a takisto súradnice bodu $A = (x, y, z)$ a dopočítať konštantu d.

Príklad č. 11. Napíšme rovnicu roviny, ktorá je kolmá na vektor $\bar{n} = (3, -1, 0)$ a prechádza bodom $P = (2, 0, 3)$.

Riešenie: Zo zadania príkladu vidíme, že vektor $\bar{n} = (a, b, c) = (3, -1, 0)$ je normálový vektor roviny. Všeobecná rovnica roviny má tvar $ax + by + cz + d = 0$. Dosadíme súradnice bodu P a normálového vektora $\bar{n}$ a vypočítame z rovnice neznámu konštantu d.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 1y & + & 0z & + & d & = & 0 \\ 2 \cdot 3 & + & 0 \cdot (-1) & + & 0 \cdot 3 & + & d & = & 0 \\ & & & & & & d & = & -6 \end{array}$$

Teraz už len dosadíme chýbajúcu hodnotu $d = -6$ do rovnice $3x - y + d = 0$ a dostávame všeobecnú rovnicu roviny ρ:

$$\rho : 3x - y - 6 = 0 \ .$$

$\square$

Príklad č. 12. Nájdime parametrické vyjadrenie roviny prechádzajúcej bodom $A = (4, 0, 3)$ a kolmú na priamku prechádzajúcu bodmi $B = (-1, 2, -3)$ a $C = (2, 5, 3)$.

Riešenie: Vypočítame normálový vektor $\bar{n}$ rozdielom súradníc bodov B a C:

$$\bar{n} = (C - B) = (2 - (-1), 5 - 2, 3 - (-3)) = (3, 3, 6).$$

Keďže máme zadaný bod A, ktorý leží v rovine a taktiež normálový vektor roviny $\bar{n}$, napíšeme všeobecnú rovnicu roviny:

$$3x + 3y + 6z + d = 0$$

Konštantu d určíme dosadením súradníc bodu $(4, 0, 3)$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4 \cdot 3 & + & 0 \cdot 3 & + & 3 \cdot 6 & + & d & = & 0 \\ & & & & & & d & = & -30 \end{array}$$

Tak dosadíme všeobecnú rovnicu roviny v tvare:

$$3x + 3y + 6z - 30 = 0$$

My ale hľadáme parametrické vyjadrenie roviny. Preto všeobecnú rovnicu napíšeme do tvaru rozšírenej matice, ktorá bude mať len jeden riadok a upravíme ju.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & 30 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 15 \end{array} \right)$$

Výsledok zapíšeme tak, ako sme sa naučili v druhej kapitole pri počítaní sústav rovníc, ktoré mali nekonečne veľa riešení, teda na pozícii premennej x máme pivotnú jednotku a ostatné sú nepivotné premenné. Preto premenným y a z priradíme parametre, teda $y = s$ a $z = t$. Vyjadríme ešte neznámu x z rovnice a dostávame parametrickú rovnicu roviny:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 15 & - & s & - & 2t \\ y & = & & & s & & \\ z & = & & & & & t \end{array}$$

$\square$

Príklad č. 13. Napíšme parametrické vyjadrenie priamky danej prienikom dvoch rovín:

$$\alpha : -x + 2y + 4z = 4 \quad \text{a} \quad \beta : 3x - 5y + 2z = -3.$$

Riešenie: Hľadáme priamku, ktorá vznikla prienikom dvoch rovín, preto budeme počítať sústavu dvoch rovníc. Prepíšeme si rovnice roviny do rozšírenej matice sústavy a elementárnymi riadkovými operáciami ju upravíme.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & -5 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 14 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 14 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 24 & 14 \\ 0 & 1 & 14 & 9 \end{array}\right)$$

Dostali sme redukovaný tvar rozšírenej matice sústavy. Premenným x a y prislúchajú pivotné pozície v sústave. Nepivotnej premennej z priradíme parameter $z = t$. Vyjadríme premennú x a premennú y a dostaneme parametrické vyjadrenie priamky, ktorá je daná prienikom rovín α a β.

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & 14 & - & 24t \\ y & = & 9 & - & 14t \\ z & = & & & t \end{array}$$

$\square$

Príklad č. 14. Úlohou je napísať všeobecnú rovnicu roviny ρ, ak poznáme jej parametrickú rovnicu

$$\rho : \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 2 & - & r & + & t \\ y & = & -2 & + & 2r & + & 3t \\ z & = & & - & 2r & + & t \end{array}$$

Riešenie: Z parametrickej rovnice vieme vyčítať údaje o bode $A = (2, -2, 0)$, ktorý leží v rovine a taktiež dva smerové vektory $\bar{u} = (-1, 2, -2)$ a $\bar{v} = (1, 3, 1)$.

Spomeňme si, že na to, aby sme vedeli napísať všeobecnú rovnicu roviny, potrebujeme poznať bod, ktorý leží v rovine a jej normálový vektor. Už vieme, že normálový vektor $\bar{n}$ vypočítame ako vektorový súčin vektorov $\bar{u}$ a $\bar{v}$.

Vektorový súčin

$$\bar{u} \times \bar{v} = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2,\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3,\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1)$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = (2+6, -2+1, -3-2) = (8, -1, -5)$$

Všeobecná rovnica roviny má tvar

$$ax \quad + \quad by \quad + \quad cz \quad + \quad d \quad = \quad 0 \ .$$

Dosadíme do rovnice súradnice bodu $A = (2, -2, 0)$ a súradnice normálového vektora $\bar{n} = (8, -1, -5)$ a vypočítame neznámu d.

$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot 8 \quad + \quad (-2) \cdot (-1) \quad + \quad 0 \cdot (-5) \quad + \quad d & = & 0 \\ d & = & -18 \end{array}$$

Výsledok: Všeobecná rovnica roviny ρ má tvar

$$8x - y - 5z - 18 = 0 \ .$$

□

Uhol dvoch rovín

Uhol φ dvoch rovín α a β vypočítame pomocou normálových vektorov $\bar{n}_\alpha$ a $\bar{n}_\beta$ týchto rovín podľa nasledovnej formulky:

$$\cos(\varphi) = \left| \frac{\bar{n}_\alpha . \bar{n}_\beta}{|n_\alpha| . |n_\beta|} \right| \ ,$$

kde $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Príklad č. 15. Vypočítame uhol φ nasledujúcich dvoch rovín α a β určených všeobecnými rovnicami $\alpha: \ -3x - y + z + 2 = 0$ a $\beta: \ x + 2y + z - 3 = 0$.

Riešenie: Normálový vektor roviny α má súradnice $\bar{n}_\alpha = (-3, -1, 1)$. Normálový vektor roviny β má súradnice $\bar{n}_\beta = (1, 2, 1)$.

Pre kosínus uhla našich dvoch rovín α a β dostávame:

$$\cos(\varphi) = \left| \frac{\bar{n}_\alpha \cdot \bar{n}_\beta}{|n_\alpha| \cdot |n_\beta|} \right| = \left| \frac{(-3) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{-4}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{6}} \right|$$

$$\varphi = 60°32‘$$

Záver: Uhol, ktorý zvierajú dve roviny α a β, má veľkosť $\varphi \doteq 60°32‘$. □

6.7 Vzájomná poloha dvoch rovín

Pri určovaní vzájomnej polohy rovín α a β vychádzame z ich normálových vektorov $\bar{n}_\alpha$ a $\bar{n}_\beta$.

Majme zadané roviny $\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$ a $\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d = 0$.

Najprv určíme, či normálový vektor $\bar{n}_\alpha$ roviny α je násobkom normálového vektora $\bar{n}_\beta$ roviny β. Ak toto neplatí, roviny α a β sú rôznobežné.

V prípade, ak normálový vektor $\bar{n}_\alpha$ roviny α je násobkom normálového vektora $\bar{n}_\beta$ roviny β, určíme, či je aj rovnica roviny α násobkom rovnice roviny β. Ak toto platí, tak roviny α a β sú totožné. Ak to neplatí, tak roviny α a β sú rovnobežné.

Príklad č. 16. Určíme vzájomnú polohu dvoch rovín $\alpha : -5x + 3y - 2z - 1 = 0$ a $\beta : 2x + 3y + z - 4 = 0$.

Riešenie: Normálové vektory týchto rovín vyčítame z ich rovníc: $n_\alpha = (-5, 3, -2)$ a $n_\beta = (2, 3, 1)$. Vidíme, že vektor n_α nie je násobkom vektora n_β, teda roviny nie sú rovnobežné. Preto sa pokúsime nájsť prienik týchto dvoch rovín. Riešime teda sústavu dvoch rovníc o troch neznámych, ktorú si prepíšeme do rozšírenej matice a elementárnymi riadkovými operáciami upravujeme až na konečný redukovaný tvar.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -5 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 21 & 1 & 22 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 21 & 1 & 22 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -18 & 0 & -18 \\ 0 & 21 & 1 & 22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 21 & 1 & 22 \end{array}\right)$$

Z redukovaného tvaru rozšírenej sústavy vidíme, že pivotné neznáme sú x a z. Nepivotnej premennej priradíme parameter t, teda $y = t$.

Výsledok: Roviny α a β sú rôznobežné a ich prienikom je priamka p vyjadrená parametrickou rovnicou:

$$p: \quad \begin{array}{rcrcr} x & = & -9 & + & 9t \\ y & = & & & t \\ z & = & 22 & - & 21t \end{array}$$

$\square$

6.8 Vzájomná poloha priamky a roviny v priestore

Ak máme zadanú priamku p parametrickým vyjadrením $p : A + t \cdot \bar{s}$ a rovinu ρ všeobecnou rovnicou $\rho : ax + by + cz + d = 0$, pri určovaní vzájomnej polohy priamky a roviny vychádzame zo vzájomného vzťahu smerového vektora $\bar{s}$ priamky p a normálového vektora $\bar{n}$ roviny ρ.

Ak sú smerový vektor $\bar{s}$ a normálový vektor $\bar{n}$ na seba kolmé, zisťujeme ďalej, či bod A leží v rovine ρ. Ak bod A leží v rovine ρ, aj priamka p leží v rovine ρ. Ak bod A neleží v rovine ρ, priamka p je rovnobežná s rovinou ρ.

Ak smerový vektor $\bar{s}$ a normálový vektor $\bar{n}$ nie sú na seba kolmé, tak priamka p je rôznobežná s rovinou ρ.

Príklad č. 17. Nájdime prienik priamky p s rovinou ρ, kde priamka p je daná parametrickým vyjadrením

$$p: \quad \begin{array}{rcrcr} x & = & 4 & - & 3t \\ y & = & 2 & + & t \\ z & = & 1 & - & 4t \end{array}$$

a rovina ρ je daná všeobecnou rovnicou

$$\rho: \quad 3x \; + \; 2y \; - \; z \; + \; 3 \; = \; 0 \; .$$

Riešenie: Dosadíme za x, y a z z parametrickej rovnice priamky do všeobecnej rovnice roviny a po zjednodušení dostaneme $t = 6$, čo spätne dosadíme do parametrickej rovnice priamky. Vyčíslime neznáme x, y a z, ktoré predstavujú súradnice priesečníka priamky p s rovinou ρ:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 4 & - & 3 \cdot 6 & = & -14 \\ y & = & 2 & + & 6 & = & 8 \\ z & = & 1 & - & 4 \cdot 6 & = & -23 \end{array}$$

Prienik priamky p a roviny ρ je bod $P = (-14, 8, -23)$. $\square$

Uhol priamky a roviny

Uhol priamky a roviny vypočítame ako $|90^\circ - \alpha|$, kde α je uhol smerového vektora priamky p a normálového vektora roviny ρ.

Príklad č. 18. Vypočítame uhol priamky p a roviny ρ, ak priamka p je daná parametrickým vyjadrením

$$p: \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & - & 4t \\ y & = & -1 & + & 3t \\ z & = & & & 3t \end{array}$$

a rovina ρ je daná všeobecnou rovnicou $\rho: \quad -4x + 3y + z - 2 = 0$.

Riešenie: Súradnice smerového vektora priamky p sú $\bar{s} = (-4, 3, 3)$ a súradnice normálového vektora roviny ρ sú $\bar{n} = (-4, 3, 1)$.

Na výpočet použijeme formulku

$$\cos(\alpha) = \left|\frac{\bar{s}\cdot\bar{n}}{|\bar{s}|\cdot|\bar{n}|}\right| = \left|\frac{(-4)\cdot(-4)+3\cdot 3+3\cdot 1}{\sqrt{(-4)^2+3^2+3^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+3^2+1^2}}\right| = \left|\frac{28}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{26}}\right|$$

$$\alpha \doteq 19°37‘$$

Uhol priamky a roviny vypočítame ako $|90° - \alpha|$, teda $|90° - 19°37‘| \doteq 70°22‘$. □

Vzdialenosť bodu od priamky v rovine

Vzdialenosť bodu $P = (p_1, p_2)$ od priamky p zadanej všeobecnou rovnicou $p: ax + by + c = 0$ vypočítame nasledovne

$$d(P, p) = \frac{|a\cdot p_1 + b\cdot p_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \ .$$

Príklad č. 19. Vypočítame vzdialenosť bodu $P = (-2, 3)$ od priamky $p: 4x - 3y + 5 = 0$.

Riešenie: Dosadíme do rovnice za a, b zložky normálového vektora priamky $\bar{n} = (4, -3)$ a za p_1 a p_2 súradnice bodu P.

$$d(P, p) = \frac{|a\cdot p_1 + b\cdot p_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4\cdot(-2) - 3\cdot 3 + 5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|8-9+5|}{\sqrt{16+9}} = 4/5$$

Vzdialenosť bodu P od priamky p je 4/5. □

Vzdialenosť bodu od roviny

Vzdialenosť bodu $P = (p_1, p_2, p_3)$ od roviny ρ zadanej všeobecnou rovnicou $\rho : ax + by + cz + d = 0$ vypočítame nasledovne

$$d(P, \rho) = \frac{|a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c \cdot p_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \ .$$

Príklad č. 20. Vypočítame vzdialenosť bodu P so súradnicami $P = (3, -2, 1)$ od roviny ρ danej všeobecnou rovnicou $\rho : \ 2x - y + 3z + 1 = 0$.

Riešenie: Použijeme formulku

$$d(P, \rho) = \frac{|a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c \cdot p_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{14}} \ .$$

Vzdialenosť bodu P od roviny ρ je $d(P, \rho) = \frac{12}{\sqrt{14}}$. $\square$

Príklady na cvičenia:

1. Napíšte parametrické vyjadrenie, všeobecnú rovnicu a smernicový tvar priamky, ktorá je určená nasledujúcimi dvoma bodmi:

(a) $A = (-1, 2)$, $B = (2, 4)$

Výsledok: Parametrické vyjadrenie priamky:

$$\begin{array}{rcrcl} x & = & -1 & + & 3t \\ y & = & 2 & + & 2t \end{array}.$$

Všeobecná rovnica priamky: $-2x + 3y - 8 = 0$.

Smernicový tvar priamky: $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$.

(b) $A = (3, -5)$, $B = (1, 0)$

Výsledok: Parametrické vyjadrenie priamky:

$$\begin{array}{rcrcl} x & = & 3 & - & 2t \\ y & = & -5 & + & 5t \end{array}.$$

Všeobecná rovnica priamky: $5x + 2y - 5 = 0$.

Smernicový tvar priamky: $y = -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$.

(c) $A = (6, -3)$, $B = (0, 1)$

Výsledok: Parametrické vyjadrenie priamky:

$$\begin{array}{rcrcl} x & = & 6 & - & 6t \\ y & = & -3 & + & 4t \end{array}.$$

Všeobecná rovnica priamky: $4x + 6y - 6 = 0$.

Smernicový tvar priamky: $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

(d) $A = (-4, -5)$, $B = (-1, 2)$

Výsledok: Parametrické vyjadrenie priamky:

$$\begin{array}{rcrcl} x & = & -4 & + & 3t \\ y & = & -5 & + & 7t \end{array}.$$

Všeobecná rovnica priamky: $7x - 3y + 13 = 0$.

Smernicový tvar priamky: $y = \frac{7}{3}x + \frac{13}{3}$.

(e) $A = (1, 4)$, $B = (2, 3)$

Výsledok: Parametrické vyjadrenie priamky:

$$\begin{array}{rcrcl} x & = & 1 & + & t \\ y & = & 4 & - & t \end{array}.$$

Všeobecná rovnica priamky: $x + y - 5 = 0$.

Smernicový tvar priamky: $y = 5 - x$.

2. Napíšte parametrické vyjadrenie priamky prechádzajúcej bodom $A = (x_0, y_0, z_0)$, ktorá je rovnobežná s vektorom $\bar{u}$:

(a) $A = (2, 3, -2)$, $\bar{u} = (-4, 3, 1)$

Výsledok:

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & - & 4t \\ y & = & 3 & + & 3t \\ z & = & -2 & + & t \end{array}.$$

(b) $A = (-3, 2, -4)$, $\bar{u} = (1, 0, 1)$

Výsledok:

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & -3 & + & t \\ y & = & 2 & & \\ z & = & -4 & + & t \end{array}.$$

(c) $A = (0, 1, 0)$, $\bar{u} = (-2, 2, -2)$

Výsledok:

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & & - & 2t \\ y & = & 1 & + & 2t \\ z & = & & - & 2t \end{array}.$$

(d) $A = (5, -3, 2)$, $\bar{u} = (1, 3, -4)$

Výsledok:

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & 5 & + & t \\ y & = & -3 & + & 3t \\ z & = & 2 & - & 4t \end{array}.$$

3. Napíšte rovnicu roviny, ktorá je kolmá na vektor $\bar{n}$ a prechádza bodom A:

(a) $A = (2, -1, 0)$, $\bar{n} = (4, 3, -1)$

Výsledok: $4x + 3y - z - 5 = 0$.

(b) $A = (2, -2, 3)$, $\bar{n} = (-3, -1, 3)$

Výsledok: $-3x - y + 3z - 5 = 0$.

(c) $A = (-5, 0, -1)$, $\bar{n} = (-2, 0, 1)$

Výsledok: $-2x + z - 9 = 0$.

(d) $A = (1, 2, 3)$, $\bar{n} = (2, -3, 1)$

Výsledok: $2x - 3y + z + 1 = 0$.

4. Napíšte parametrické vyjadrenie a všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcej troma bodmi:

(a) $A = (-1, 0, 3)$, $B = (4, -1, 3)$, $C = (1, 2, 3)$

Výsledok: Všeobecná rovnica roviny: $12z - 36 = 0$.
Parametrické vyjadrenie roviny:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & -1 & + & 5s & + & 2t \\ y & = & 2 & - & s & + & 2t \\ z & = & 3 & & & & \end{array}.$$

(b) $A = (-3, 2, -4)$, $B = (0, 2, 3)$, $C = (-2, -3, -5)$

Výsledok: Všeobecná rovnica roviny: $35x - 32y - 3z + 157 = 0$.
Parametrické vyjadrenie roviny:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & -3 & + & 3s & + & t \\ y & = & 2 & & & - & 5t \\ z & = & -4 & + & 7s & - & t \end{array}.$$

(c) $A = (2, 2, 2)$, $B = (-1, -2, 3)$, $C = (3, 2, 1)$

Výsledok: Všeobecná rovnica roviny: $4x - 2y + 4z - 12 = 0$.
Parametrické vyjadrenie roviny:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 2 & - & 3s & + & t \\ y & = & 2 & - & 4s & & \\ z & = & 2 & + & s & - & t \end{array}.$$

(d) $A = (-1, -1, 5)$, $B = (0, -3, -2)$, $C = (1, 3, 4)$

Výsledok: Všeobecná rovnica roviny: $30x - 13y + 8z - 23 = 0$.
Parametrické vyjadrenie roviny:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & -1 & + & s & + & 2t \\ y & = & -1 & - & 2s & + & 4t \\ z & = & 5 & - & 7s & - & t \end{array}.$$

5. Napíšte parametrické vyjadrenie priamky danej prienikom dvoch rovín:

(a) $x - 3y + 2z = -2$ a $-4x + y + 2z = -3$

Výsledok:

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & (8/11)t \\ y & = & 1 & + & (10/11)t \\ z & = & 0 & + & t \end{array}.$$

(b) $5x - y + 2z = -9$ a $x + 4y - 3z = -4$

Výsledok:

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & (-40/21) & - & (5/21)t \\ y & = & (-11/21) & + & (17/21)t \\ z & = & 0 & + & t \end{array}.$$

(c) $-x - y + z = 3$ a $y - 4z = -5$

Výsledok:

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & - & 3t \\ y & = & -5 & + & 4t \\ z & = & 0 & + & t \end{array}.$$

6. Zistite, či body $A = (3, 2, 1)$, $B = (2, -3, 4)$, $C = (2, -2, -1)$ ležia na tej istej priamke.

Výsledok: Body neležia na jednej priamke.

7. Nájdite prienik nasledujúcich dvoch priamok:

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & - & 4s \\ y & = & 2 & - & 2s \\ z & = & 1 & - & s \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & - & 5t \\ y & = & 1 & + & t \\ z & = & 3 & + & t \end{array}$$

Výsledok: Priamky sa nepretínajú.

8. Nájdite parametrické vyjadrenie roviny prechádzajúcej bodom $A = (-2, 3, 1)$ a kolmej na priamku prechádzajúcu bodmi $B = (3, 4, 5)$ a $C = (-2, 0, 1)$.

Výsledok:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 6/5 & - & (4/5)s & - & (4/5)t \\ y & = & & & s & & \\ z & = & & & & & t \end{array} .$$

9. Nájdite parametrické vyjadrenie roviny prechádzajúcej bodom $A = (1, -3, 3)$ a kolmej na priamku prechádzajúcu bodmi $B = (-4, 0, 1)$ a $C = (1, 1, 2)$.

Výsledok:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & - & (1/5)s & - & (1/5)t \\ y & = & & & s & & \\ z & = & & & & & t \end{array} .$$

10. Nájdite prienik priamky p s rovinou ρ, kde

$$p: \quad \begin{array}{rcrcr} x & = & -1 & + & 2t \\ y & = & 5 & - & t \\ z & = & 2 & - & 3t \end{array} \qquad \rho: \quad x - 4y + 3z - 6 = 0 .$$

Výsledok: $P = (-15, 12, 23)$.

11. Vypočítajte rovnicu roviny, v ktorej ležia nasledujúce dve priamky:

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & -1 & - & t \\ y & = & 3 & + & 2t \\ z & = & 5 & - & 4t \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & + & 3t \\ y & = & -3 & + & 5t \\ z & = & 2 & - & t \end{array}$$

Výsledok:

$$\rho: \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & = & -1 & - & t & + & 3s \\ y & = & 3 & + & 2t & + & 5s \\ z & = & 5 & - & 4t & - & s \end{array} .$$

12. Sú dané vektory $\bar{u} = (-1, 2, -3)$, $\bar{v} = (2, 0, -4)$, $\bar{w} = (3, 2, 1)$. Vypočítajte:

(a) $\bar{u} \cdot (7\bar{v} + \bar{w})$

Výsledok: 68.

(b) $||(\bar{u} \cdot w) \cdot \bar{w}||$

Výsledok: $10\sqrt{14}$.

(c) $||\bar{u}|| \cdot (\bar{v} \cdot w)$

Výsledok: $2\sqrt{14}$.

13. Sú dané vektory $\bar{u} = (-1, 2, -3)$; $\bar{v} = (2, 0, -4)$ a $\bar{w} = (-3, 0, 1)$. Vypočítajte:

(a) $\bar{u} \times \bar{v}$

Výsledok: $\bar{a} = (-8, -10, -4)$.

(b) $||\bar{u} \times \bar{w}|| + ||\bar{v} \times \bar{u}||$

Výsledok: $\sqrt{140} + \sqrt{180}$.

14. Určte vzdialenosť medzi dvoma vektormi $\bar{u} = (4, 2, -2)$; $\bar{v} = (5, 1, 0)$.

Výsledok: $d = \sqrt{6}$.

15. Sú dané vektory $\bar{u} = (2, 1, -2)$; $\bar{v} = (1, 3, 0)$. Zistite, či vektor $\bar{w} = (10, 10, -8)$ je lineárnou kombináciou vektorov $\bar{u}$ a $\bar{v}$.

Výsledok: $\bar{w} = 4 \cdot \bar{u} + 2 \cdot \bar{v}$. Vektor $\bar{w}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\bar{u}$ a $\bar{v}$.

16. Sú dané vektory $\bar{u} = (1, -2, 3)$, $\bar{v} = (2, -1, 5)$. Vyjadrite vektor $\bar{w} = (-5, 4, -13)$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\bar{u}$ a $\bar{v}$.

Výsledok: $\bar{w} = -1 \cdot \bar{u} - 2 \cdot \bar{v}$.

17. Daný je trojuholník ABC so súradnicami vrcholov $A = (2, -1, 3)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (0, 0, 5)$. Vypočítajte:

(a) vnútorné uhly trojuholníka ABC

(b) obsah trojuholníka ABC

(c) napíšte parametrické vyjadrenie strán trojuholníka ABC

Výsledok:

(a) vnútorné uhly: $\alpha = 90°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 45°$,

(b) obsah trojuholníka ABC: $S = 7/2$,

(c) parametrické vyjadrenie strán trojuholníka ABC:

$$AB: \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & - & t \\ y & = & -1 & + & 2t \\ y & = & 3 & - & 2t \end{array}, \quad BC: \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & - & r \\ y & = & 1 & - & r \\ y & = & 1 & + & 4r \end{array}, \quad AC: \begin{array}{rcrcr} x & = & & & 2s \\ y & = & & & s \\ y & = & 5 & + & 2s \end{array}.$$

18. Daný je trojuholník ABC so súradnicami vrcholov $A = (-4, -8)$, $B = (-2, -3)$, $C = (1, 4)$. Napíšte:

(a) parametrické vyjadrenie ťažníc trojuholníka ABC

(b) parametrické vyjadrenie priamok, v ktorých ležia výšky trojuholníka ABC

(c) všeobecné rovnice ťažníc trojuholníka ABC

(d) všeobecné rovnice priamok, v ktorých ležia výšky trojuholníka ABC

Výsledok:

(a) parametrické vyjadrenie ťažníc trojuholníka ABC:

$$t_c: \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & - & 4t \\ y & = & 4 & - & 19/2t \end{array}, \quad t_b: \begin{array}{rcrcr} x & = & -2 & + & (1/2)r \\ y & = & -3 & + & r \end{array},$$

$$t_a: \begin{array}{rcrcr} x & = & -4 & + & (7/2)v \\ y & = & -8 & & (17/2)v \end{array}.$$

(b) parametrické vyjadrenie priamok, v ktorých ležia výšky trojuholníka ABC

$$V_c: \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & - & 5t \\ y & = & 5 & + & 2t \end{array}, \quad V_b: \begin{array}{rcrcr} x & = & -2 & - & 12r \\ y & = & -3 & + & 5r \end{array},$$

$$V_a: \begin{array}{rcrcr} x & = & -4 & - & 7v \\ y & = & -8 & + & 3v \end{array}.$$

(c) všeobecné rovnice ťažníc trojuholníka ABC:

$t_c:\ \frac{19}{2}x - 4y + \frac{11}{2} = 0,$

$t_b:\ -x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0,$

$t_a:\ \frac{-17}{2}x + \frac{7}{2}y - 11 = 0.$

(d) všeobecné rovnice priamok, v ktorých ležia výšky trojuholníka ABC

$V_c:\ 2x + 5y - 22 = 0,$

$V_b:\ 5x + 12y + 46 = 0,$

$V_a:\ 3x + 7y + 68 = 0.$

Literatúra

[1] Eliáš, J., Horváth, J., Kajan, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky 1.* Alfa, Bratislava, (1985), 6.vydanie, 356 s.

[2] Ivan, J.: *Matematika 1.* Alfa STNL, Bratislava, (1986), 2.vydanie, 704 s.

[3] Handlovičová, A., Mišík, L., Schneider Z., Širáň, J.: *Riešené úlohy z matematiky 1.* Stavebná fakulta STU, Bratislava, (1998), 195 s.