

# 7. Perspektívna afinita a perspektívna kolineácia

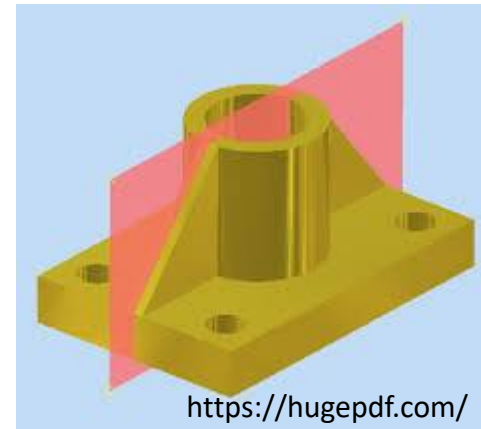
a ich aplikácie v konštrukcii rezov hranolovej a ihlanovej plochy v Mongeovej projekcii a axonometrii

Zdroj: e-skripta *DESKRIPTÍVNA GEOMETRIA PRE STAVEBNÉ ODBORY*

<https://www.math.sk/~skripta/deskriptivna-geometria-pre-stavebne-odbory/>

Rez telesa rovinou je prienik telesa a roviny.

**Rovinným rezom hranolovej alebo ihlanovej plochy všeobecnou rovinou je n-uholník.**

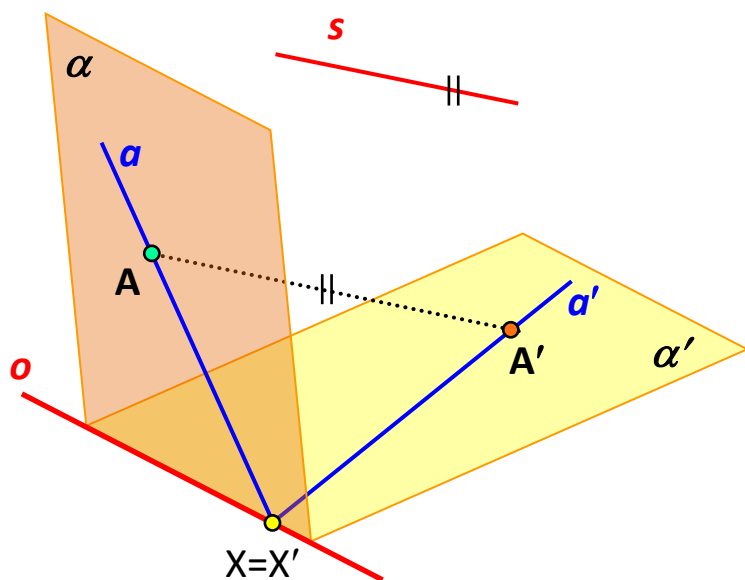


Perspektívna afinita

# Perspektívna afinita roviny $\alpha$ na rovinu $\alpha'$ – princíp zobrazenia

**Definícia:** Nech  $\alpha$  a  $\alpha'$  sú dve rôzne roviny a  $s$  je priamka, ktorá nie je rovnobežná so žiadnou z nich. Zobrazenie, ktoré každému bodu  $A \in \alpha$  priradí bod  $A' \in \alpha'$ , kde  $AA' \parallel s$ , nazývame **perspektívna afinita roviny  $\alpha$  na rovinu  $\alpha'$** .

**Poznámka:** V prípade, že rovina  $\alpha$  je rovnobežná s rovinou  $\alpha'$ , je perspektívna afinita posunutím roviny  $\alpha$  do roviny  $\alpha'$ . V ďalšom texte budeme uvažovať len prípad, keď  $\alpha$  a  $\alpha'$  sú dve rôznobežné roviny.

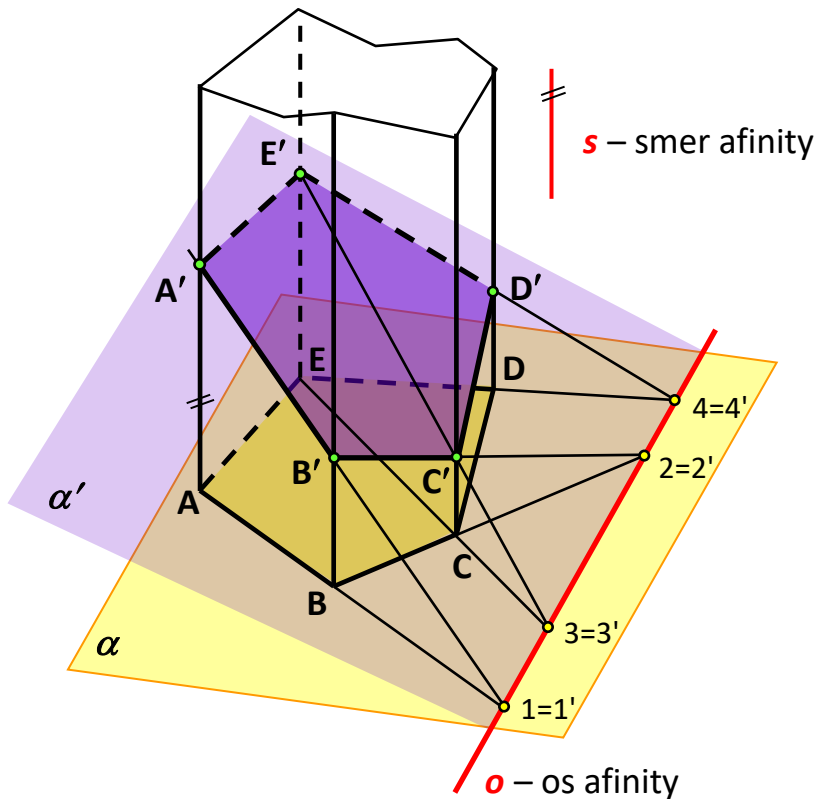


- $s$  - smer afinity
- $o = \alpha \cap \alpha'$  - os afinity
- Bod sa zobrazuje do bodu:  $A \rightarrow A'$ .
- $A \in \alpha$  - vzor
- $A' \in \alpha'$  - obraz bodu
- Platí:  $AA' \parallel s$
- Dvojicu bodov  $(A, A')$  nazývame afinne združené body.
- Priamka  $a$  sa zobrazuje do priamky  $a'$ .
- Priesečník  $X = X'$  priamky  $a$  s osou afinity  $o$  sa nazýva **samodružný bod**.
- Všetky samodružné body ležia na osi afinity.

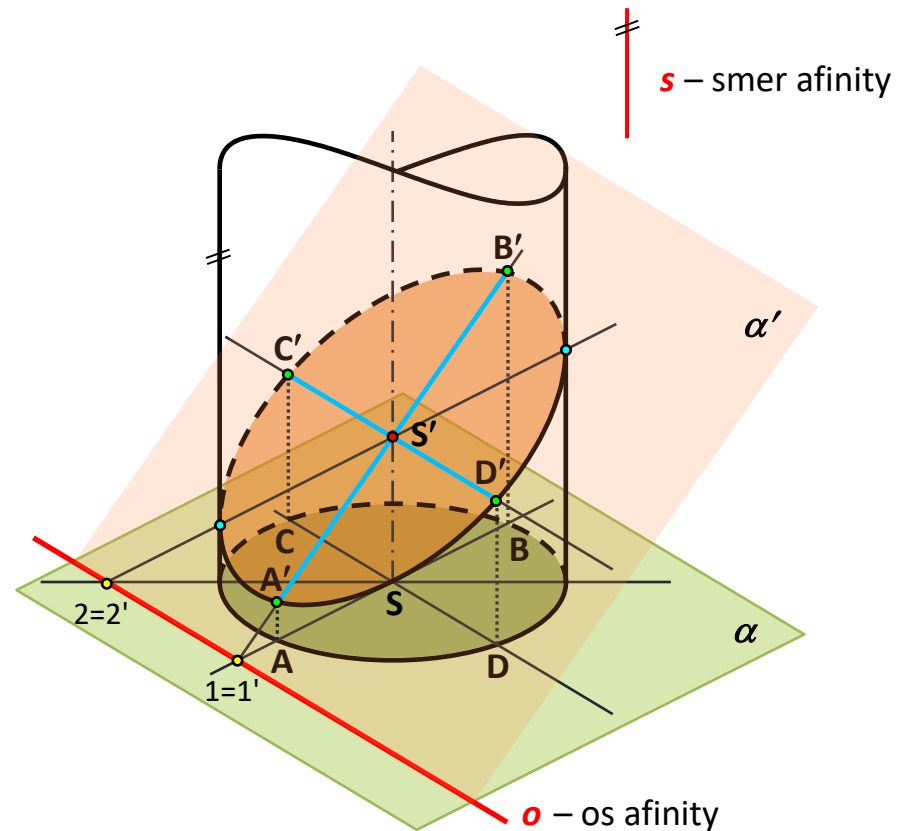
## Perspektívna afinita medzi dvomi rovinami – využitie

Afinita medzi dvomi rovinami má široké uplatnenie pri konštrukcii rovinných rezov hranolových plôch a hranolov, a tiež kružnicových valcových plôch a valcov, napr. v Mongeovej projekcii, alebo axonometrii.

Afinným obrazom mnohoúhelníka v rovine  $\alpha$  je mnohoúhelník v rovine  $\alpha'$ . Obidva ležia na tej istej hranolovej ploche. Smer afinity je smer tvoriacich priamok hranolovej plochy.

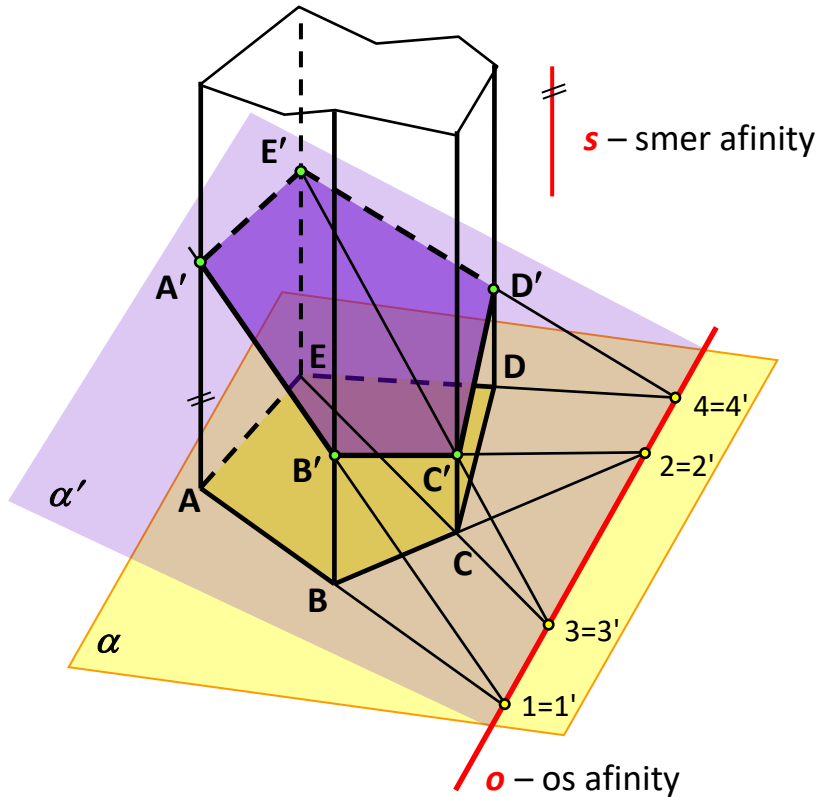


Afinným obrazom kružnice v rovine  $\alpha$  je elipsa v rovine  $\alpha'$ . Obidve ležia na tej istej valcovej ploche. Smer afinity je smer tvoriacich priamok valcovej plochy.



# Vlastnosti perspektívnej afinity roviny $\alpha$ na rovinu $\alpha'$

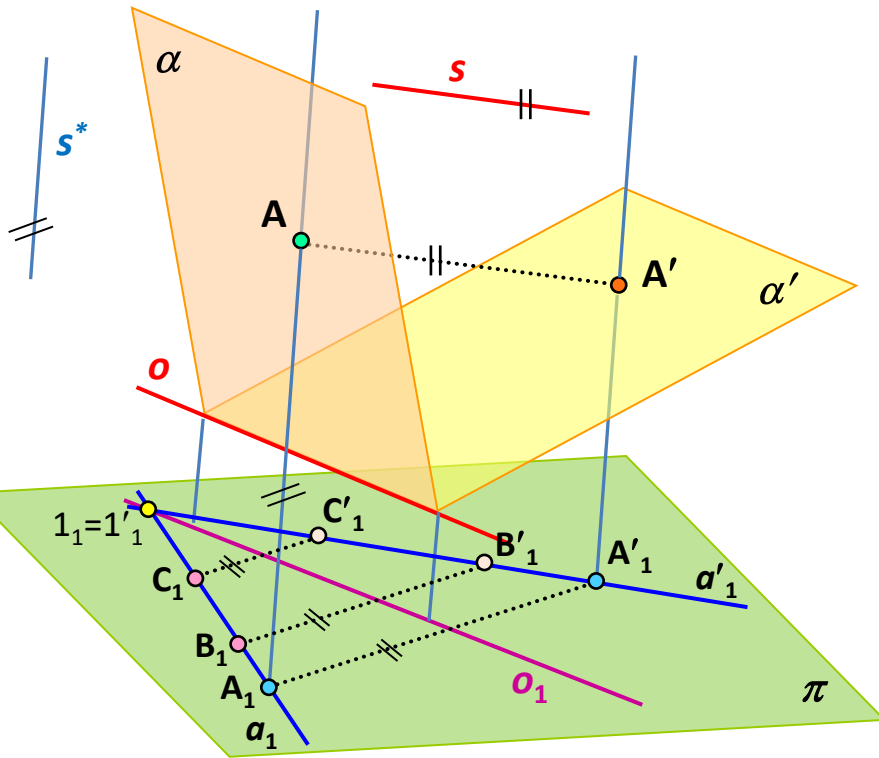
Perspektívna afinita roviny  $\alpha$  na rovinu  $\alpha'$  má nasledujúce vlastnosti:



1. Spojnice bodov a ich obrazov sú rovnobežné so **smerom afinity**:  $AA' \parallel BB' \parallel s$ .
2. Perspektívna afinita **zachováva kolinearitu**: ak tri body ležia na jednej priamke, tak aj ich obrazy ležia na jednej priamke.
3. Priamka a jej obraz sa pretínajú na **osi afinity  $o$** .

## Perspektívna afinita v rovine

Ravnobežným priemetnutím perspektívnej afinity medzi rovinami  $\alpha$  a  $\alpha'$  (so smerom  $s$ ) do roviny  $\pi$  v smere  $s^*$ , ktorý nie je rovnobežný s priamkou  $s$  ani so žiadnou z rovín  $\alpha$  a  $\alpha'$ , získame perspektívnu afinitu v rovine  $\pi$ .



Afinita  $\alpha \rightarrow \alpha'$ ,  
s osou  $o$  a smerom  $AA'$

rovnobežný priemet  
do roviny  $\pi$

Afinita v rovine  $\pi \rightarrow \pi$ ,  
s osou  $o_1$  a smerom  $A_1A'_1$

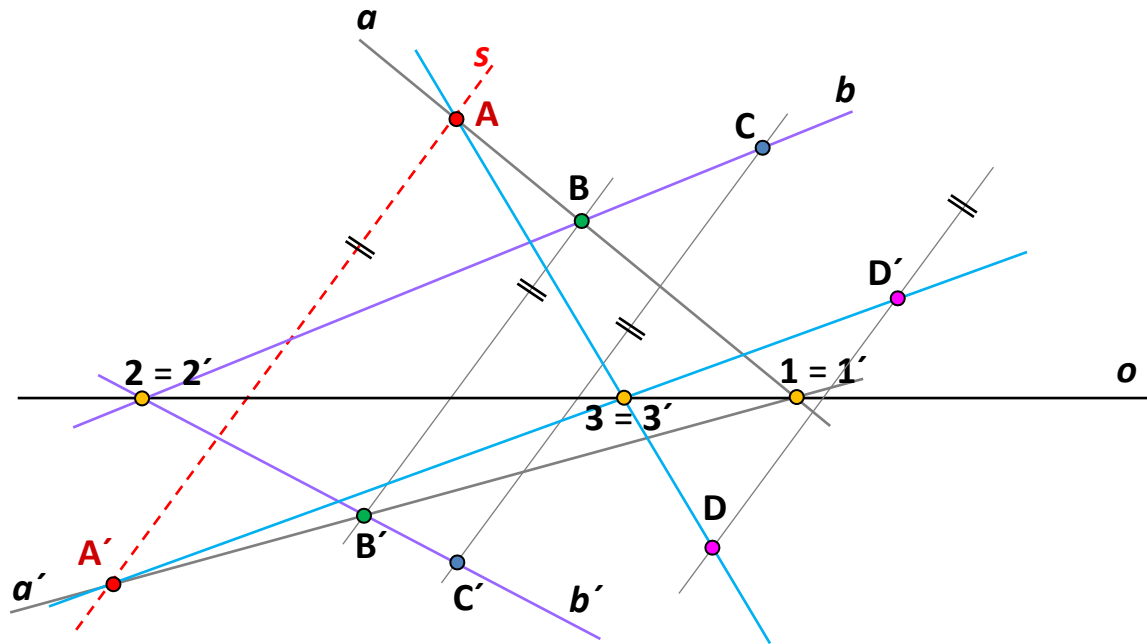
**Definícia:** Perspektívna afinita v rovine  $\pi$  je bijektívne zobrazenie  $\pi \rightarrow \pi$ , ktoré spĺňa nasledujúce podmienky:

1. body roviny  $\pi$  sa zobrazia do bodov roviny  $\pi$ , pričom bod a jeho obraz ležia na priamke rovnobežnej so smerom perspektívnej afinity,
2. ak tri body ležia na jednej priamke, tak aj ich obrazy ležia na jednej priamke (afinita zachováva kolinearitu),
3. existuje jedna bodovo samodružná priamka, ktorá sa nazýva **os perspektívnej afinity**.

**Poznámka:** Ravnobežným priemetom perspektívnej afinity roviny  $\alpha$  na rovinu  $\alpha'$  do roviny  $\pi$  je perspektívna afinita v rovine  $\pi$  vtedy, ak priemetom žiadnej z rovín  $\alpha$  a  $\alpha'$  nie je priamka.

# Obraz bodu a priamky v perspektívnej afinite

PA ( $o, A \rightarrow A'$ )



# Využitie afinity: rez hranolovej plochy rovinou v axonometrii a v Mongeovej projekcii

Daná je šikmá hranolová plocha, ktorá je určená všeobecným 5 - uholníkom **ABCDE** ležiacim v rovine  $\pi$  a tvoriacou priamkou  $a(a, a_1)$ . Zostrojte rez plochy rovinou  $\alpha(p^\alpha, n^\alpha)$ . Riešte v axonometrii a v Mongeovej projekcii.

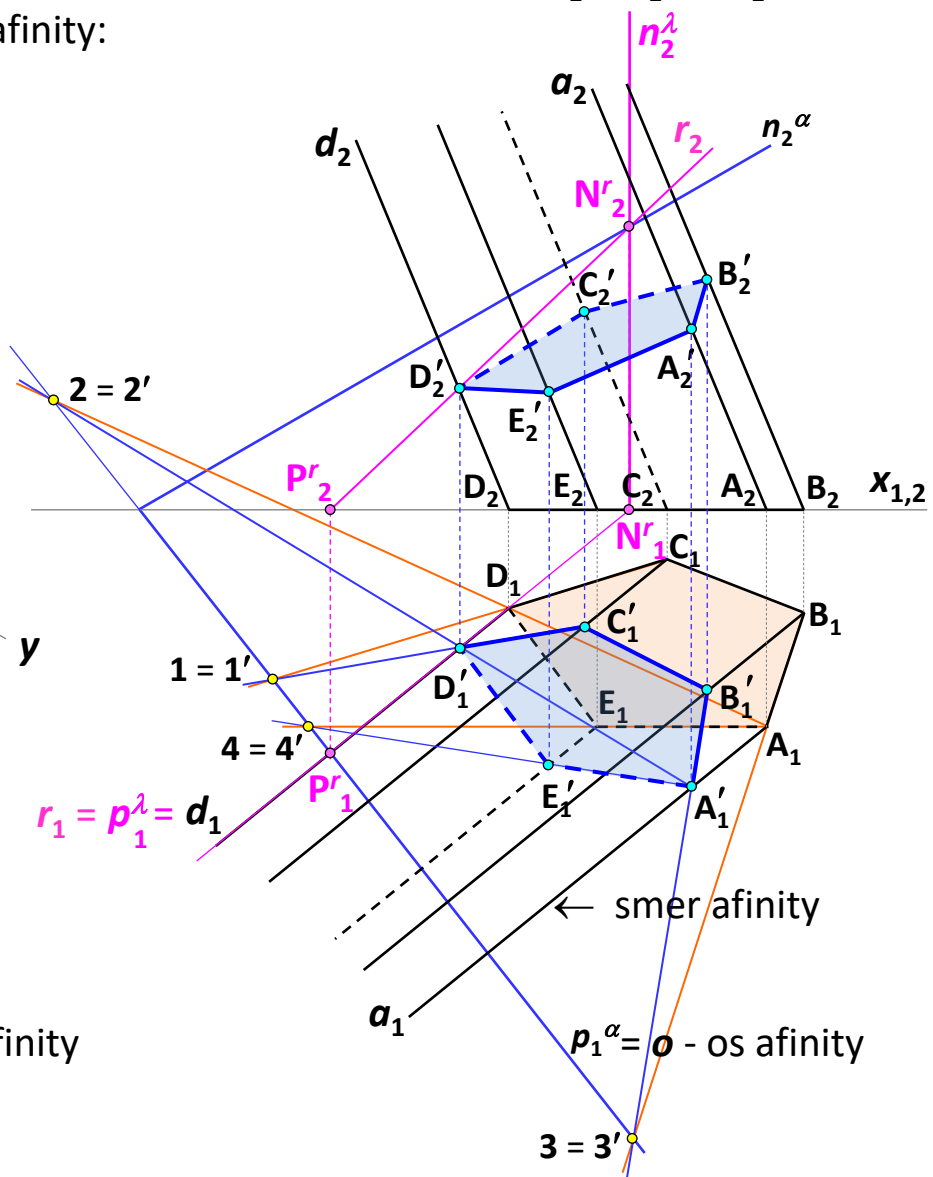
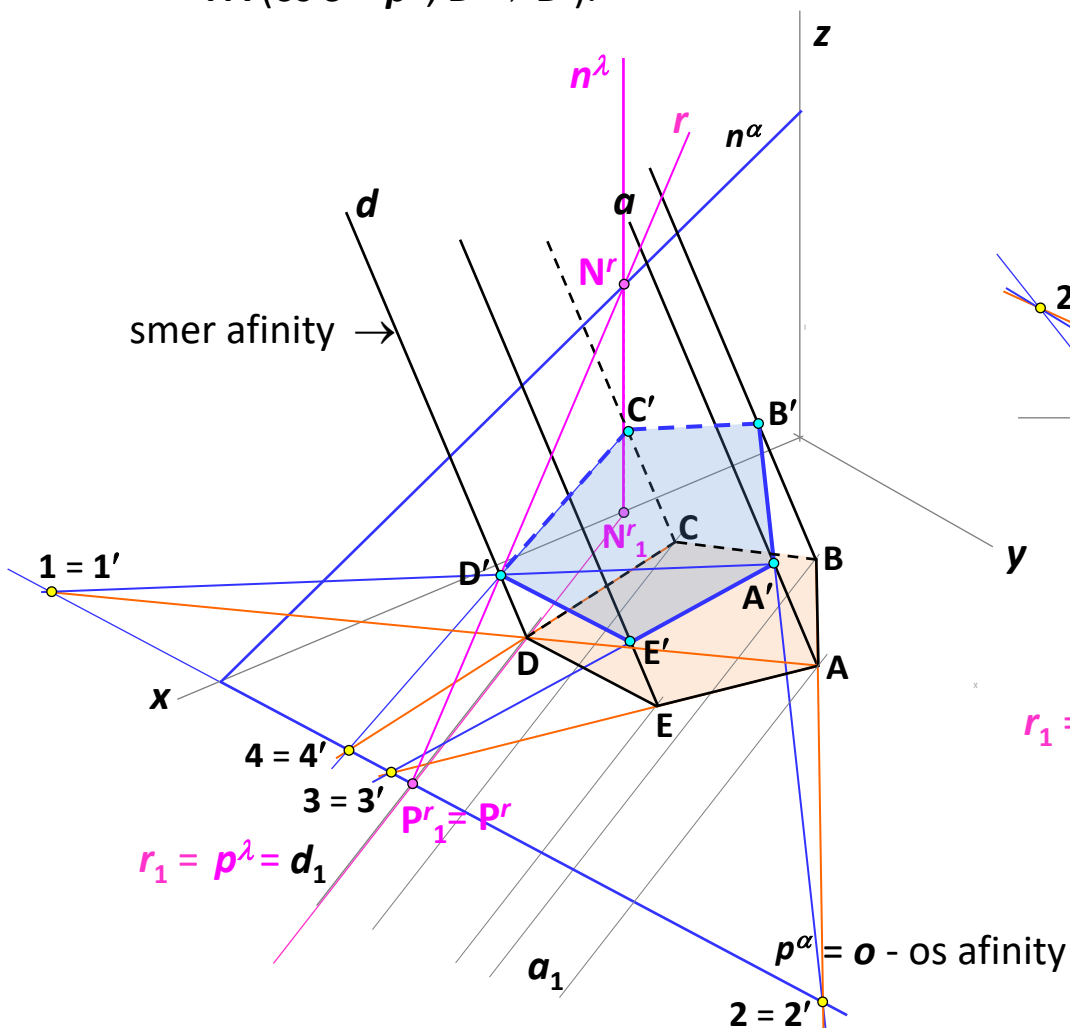
## Riešenie:

1. Prvý bod rezu zostrojíme **metódou krycej priamky**:  $D' = d \cap \alpha$ .

2. Ďalšie body rezu zostrojíme pomocou perspektívnej afinity:

PA (os  $o = p^\alpha, D \rightarrow D'$ ).

PA ( $o = p_1^\alpha, D_1 \rightarrow D_1'$ )



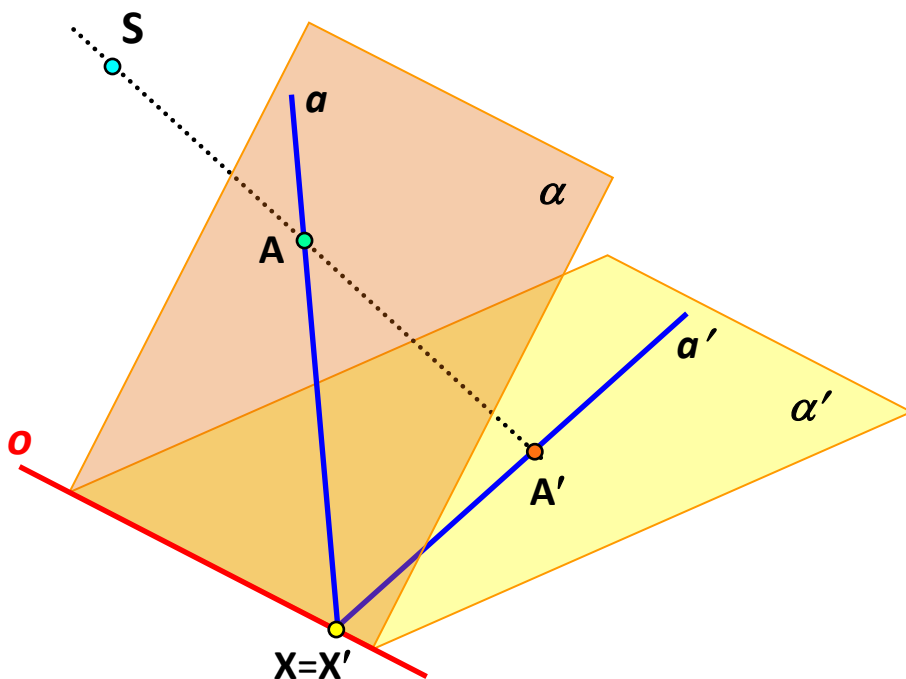


Perspektívna kolineácia

## Perspektívna kolineácia roviny $\alpha$ na rovinu $\alpha'$ – princíp zobrazenia

**Definícia:** Nech  $\alpha$  a  $\alpha'$  sú dve rôzne roviny a  $S$  je bod, ktorý neleží v žiadnej z nich. Zobrazenie, ktoré každému bodu  $A \in \alpha$  priradí bod  $A' \in \alpha'$ , kde  $S \in AA'$ , nazývame **perspektívna kolineácia roviny  $\alpha$  na rovinu  $\alpha'$** .

**Poznámka:** V prípade, že rovina  $\alpha$  je rovnobežná s rovinou  $\alpha'$ , je toto zobrazenie *rovnoláhosť*. V ďalšom texte budeme uvažovať len prípad, keď  $\alpha$  a  $\alpha'$  sú dve rôznobežné roviny.



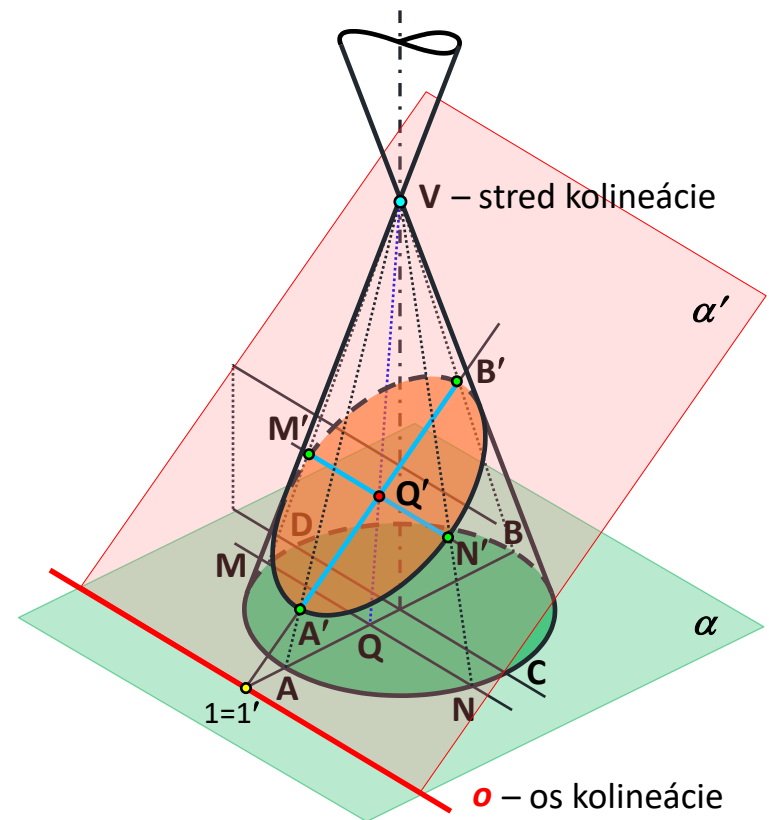
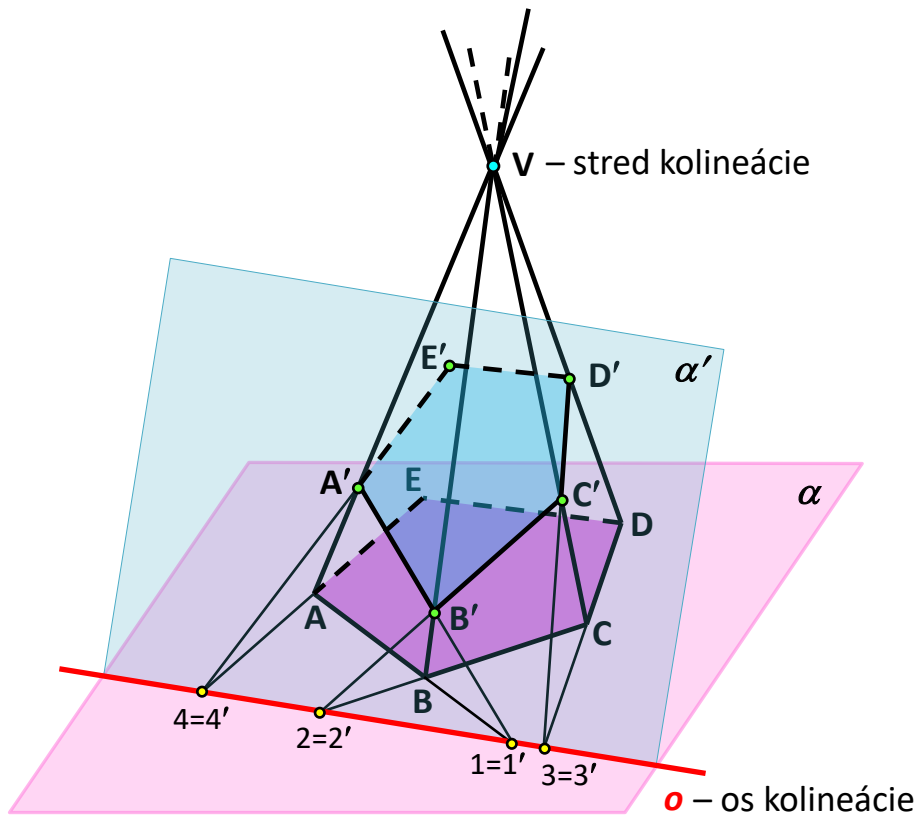
- **S** - stred kolineácie
- **$o = \alpha \cap \alpha'$**  - os kolineácie
- Bod **A** sa zobrazuje do bodu **A'**:  **$A \rightarrow A'$** .
- **$A \in \alpha$**  - vzor
- **$A' \in \alpha'$**  - obraz bodu **A**
- **Platí:  $S \in AA'$**
- Priamka **a** sa zobrazuje do priamky **a'**:  **$a \rightarrow a'$** .
- Priamky **a**, **a'** sa pretínajú na osi kolineácie **o** v **samodružnom bode  $X = X'$** .
- Všetky body na osi kolineácie **o** sú samodružné .

## Využitie perspektívnej kolineácie medzi dvomi rovinami

Kolineáciu medzi dvomi rovinami môžeme využiť pri konštrukcii rovinných rezov ihlanových plôch a ihlanov, a tiež kružnicových kužeľových plôch a kužeľov, napr. v Mongeovej projekcii, či v axonometrii.

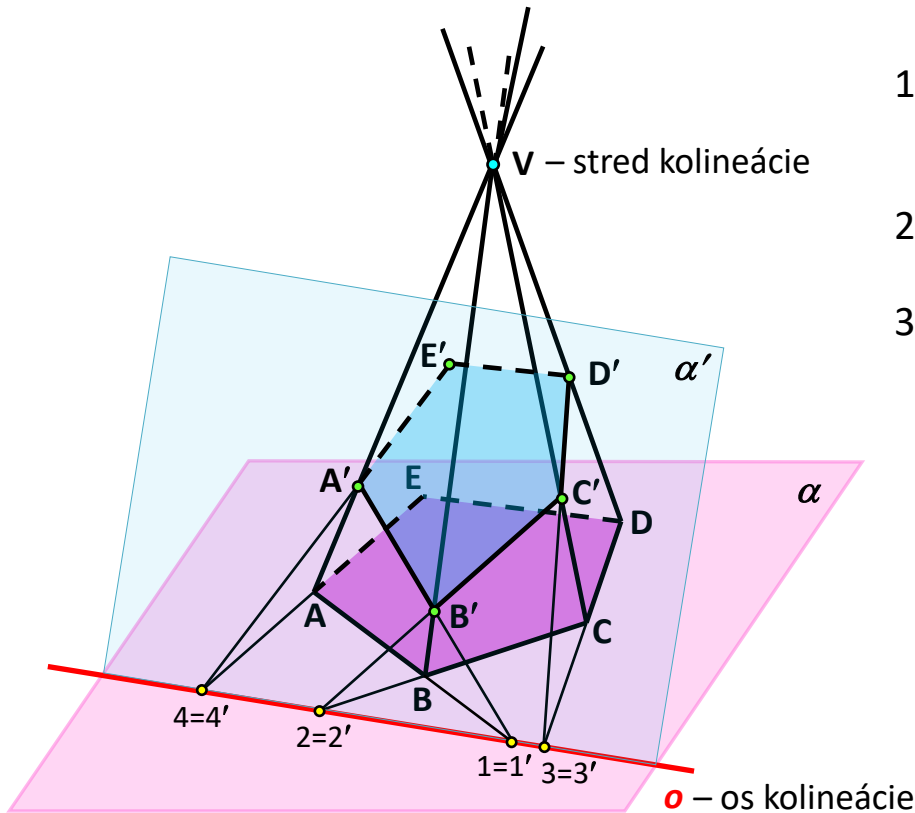
Mnohouholník v rovine  $\alpha$  sa v kolineácii zobrazí do mnohouholníka v rovine  $\alpha'$ . Obidva ležia na tej istej ihlanovej ploche. Vrchol  $V$  ihlanovej plochy je stred kolineácie.

Kružnica v rovine  $\alpha$  sa v kolineácii zobrazí do krivky v rovine  $\alpha'$  (elipsa, hyperbola, parabola). Obidve ležia na tej istej kužeľovej ploche. Vrchol  $V$  kužeľovej plochy je stred kolineácie.



# Vlastnosti perspektívnej kolineácie roviny $\alpha$ na rovinu $\alpha'$

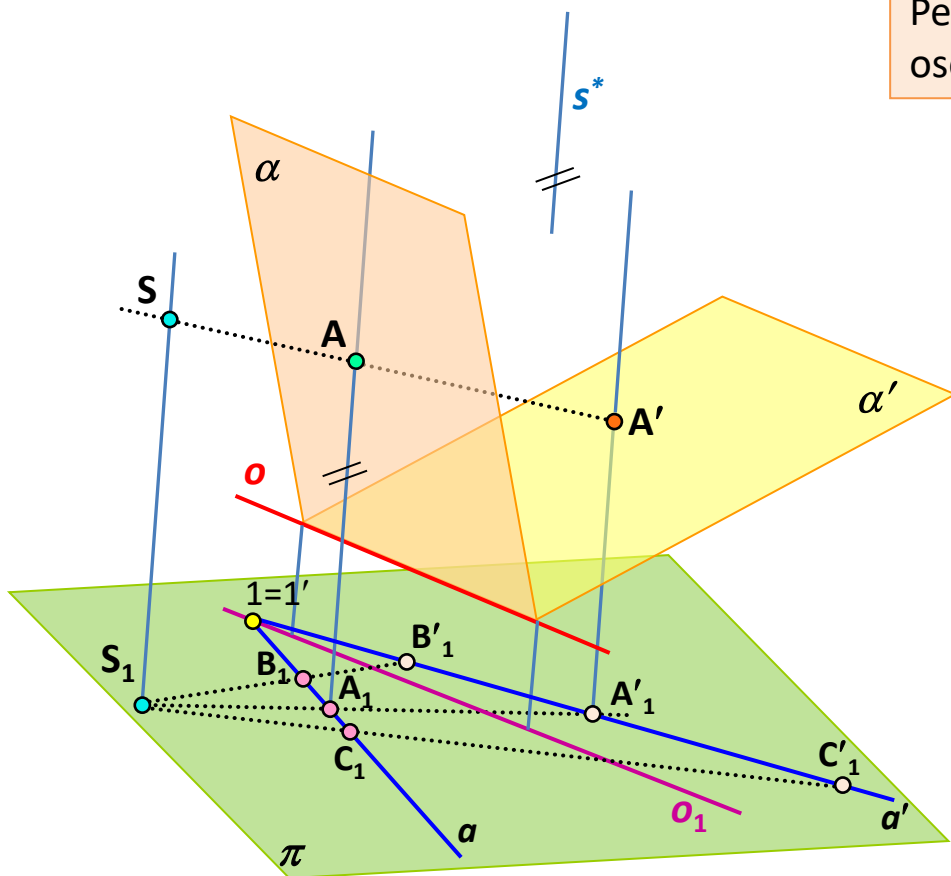
Perspektívna kolineácia roviny  $\alpha$  na rovinu  $\alpha'$  má nasledujúce vlastnosti:



1. Spojnice bodov a ich obrazov prechádzajú stredom kolineácie:  $V \in AA', V \in BB', \dots$
2. Perspektívna kolineácia **zachováva kolinearitu**.
3. Priamka a jej obraz sa pretínajú na osi kolineácie  $o$ .

## Perspektívna kolineácia v rovine

Ravnobežný priemet perspektívnej kolineácie medzi rovinami  $\alpha$  a  $\alpha'$  (so stredom  $S$ ) do roviny  $\pi$  v smere  $s^*$ , ktorý nie je rovnobežný so žiadnou z rovín  $\alpha$ ,  $\alpha'$  a  $\pi$ , je perspektívna kolineácia v rovine  $\pi$ .



Perspektívna kolineácia  $\alpha \rightarrow \alpha'$ , daná osou  $o$ , stredom  $S$  a dvojicou bodov  $A, A'$

rovnobežný priemet do roviny  $\pi$

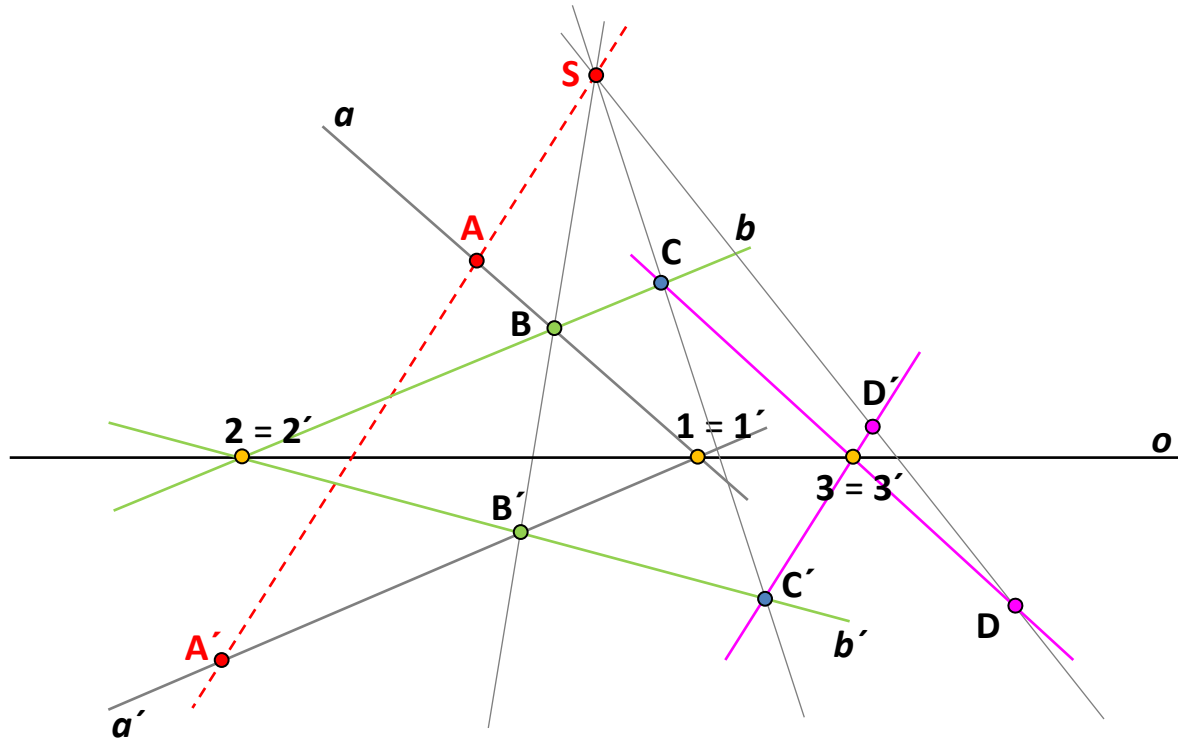
Perspektívna kolineácia v rovine  $\pi \rightarrow \pi$ , daná osou  $o_1$ , stredom  $S_1$  a dvojicou bodov  $A_1, A'_1$

**Definícia:** Perspektívna kolineácia v rovine  $\pi$  je bijektívne zobrazenie  $\pi \rightarrow \pi$ , ktoré spĺňa nasledujúce podmienky:

1. body roviny  $\pi$  sa zobrazia do bodov roviny  $\pi$ , pričom bod a jeho obraz ležia na priamke, ktorá prechádza **stredom perspektívnej kolineácie**,
2. ak tri body ležia na jednej priamke, tak aj ich obrazy ležia na jednej priamke,
3. existuje jedna bodovo samodružná priamka, ktorá sa nazýva **os perspektívnej kolineácie**.

# Obraz bodu a priamky v perspektívnej kolineácii

Príklad. PK ( $o, S, A \rightarrow A'$ ). Zostrojte obrazy bodov  $B, C, D$  v danej perspektívnej kolineácii.



# Využitie kolineácie: rez ihlanu rovinou v axonometrii a v Mongeovej projekcii

R

Daný je šikmý ihlan, ktorý je určený 4- uholníkom **ABCD** ležiacim v rovine  $\pi$  a vrcholom **V**. Zostrojte rez ihlanu rovinou  $\alpha$ .

## Riešenie:

1. Prvý bod rezu zostrojíme *metódou krycej priamky*:  $A' = a \cap \alpha$ .
2. Ďalšie body rezu zostrojíme pomocou perspektívnej kolineácie:  
PK (os  $o = p^\alpha$ ,  $V =$  stred kolineácie,  $A \rightarrow A'$ ).

PK ( os  $o = p_1^\alpha$ , stred =  $V_1$ ,  $A_1 \rightarrow A_1'$  )  
 $A' = a \cap \alpha$ ,  $a_1 = A_1V_1$ ,  $a_2 = A_2V_2$

$A' = a \cap \alpha$ ,  $a = AV$ ,  $a_1 = A_1V_1$

