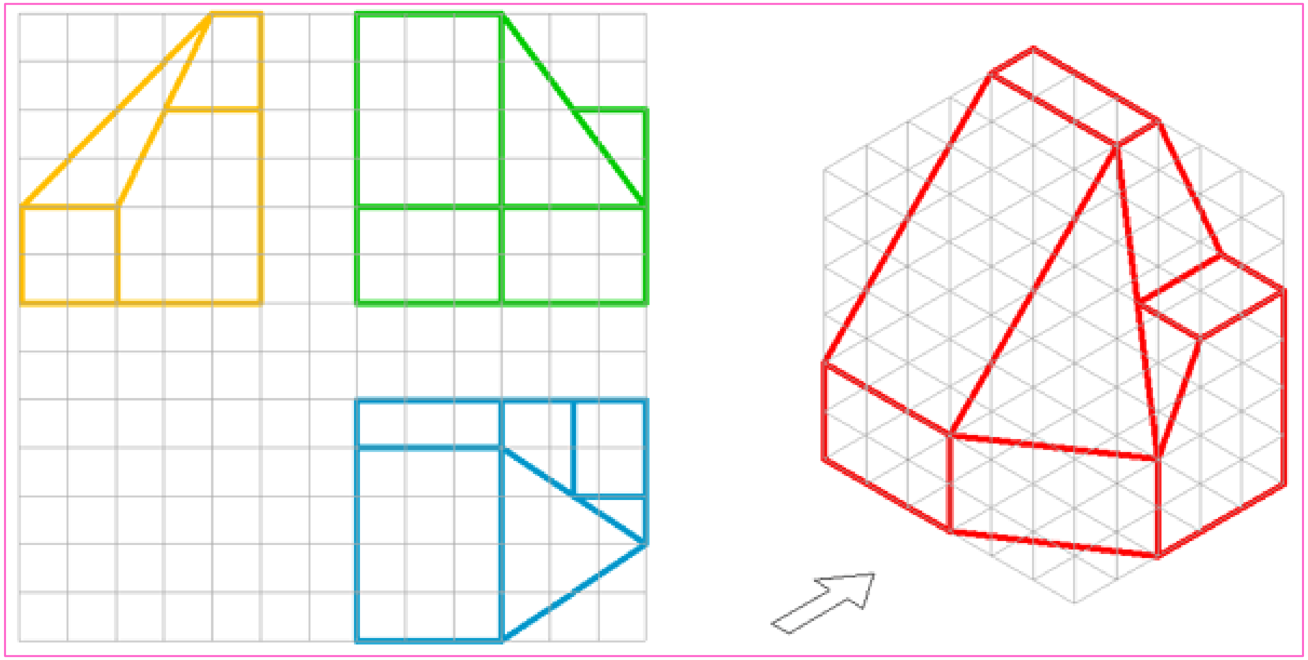
5. kurz DG

AXONOMETRIA ÚVOD

J. Beganová, T. Rückschlossová, Ľ. Valášková, M. Vajsáblová, Z. Tereňová: ***Deskriptívna geometria pre stavebné odbory***, STU v Bratislave, 2022, ISBN 978-80-227-5256-5.

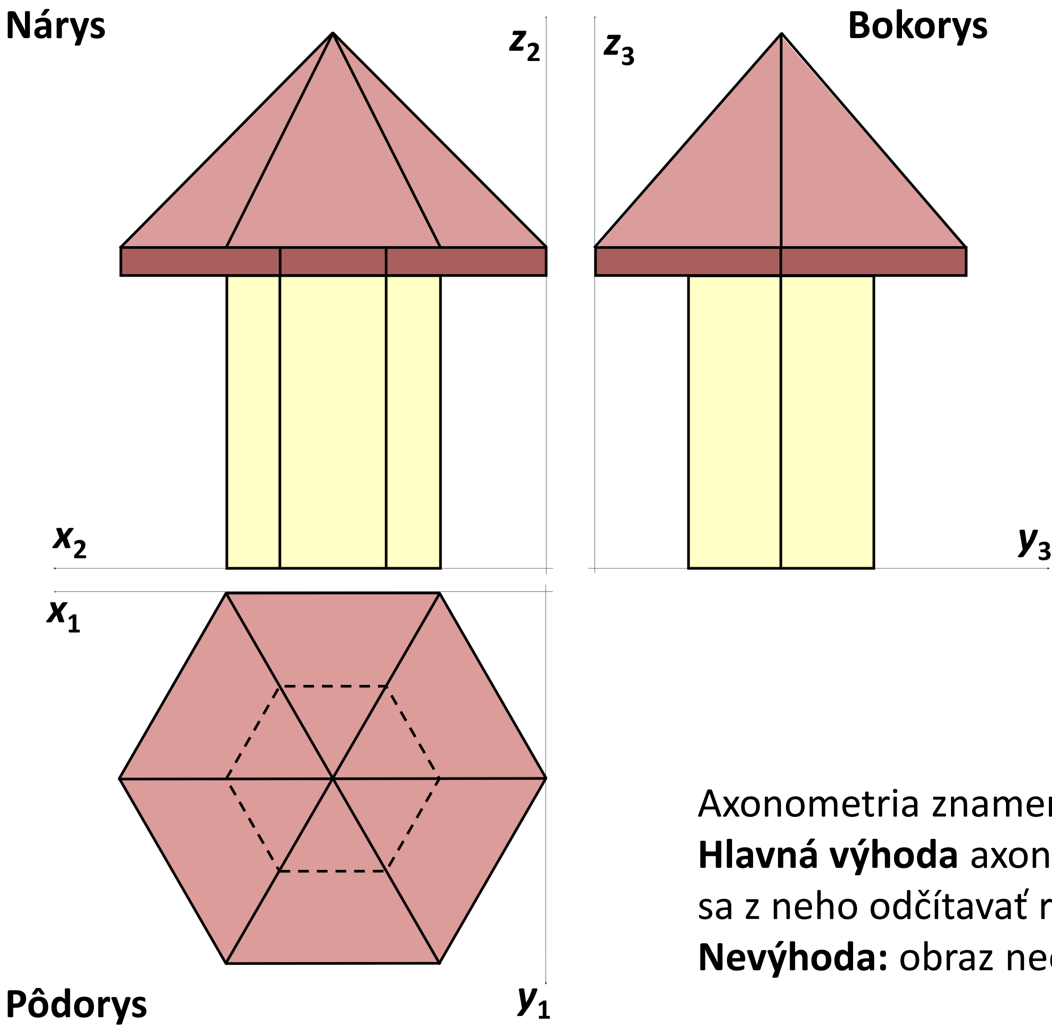
Kap. 11



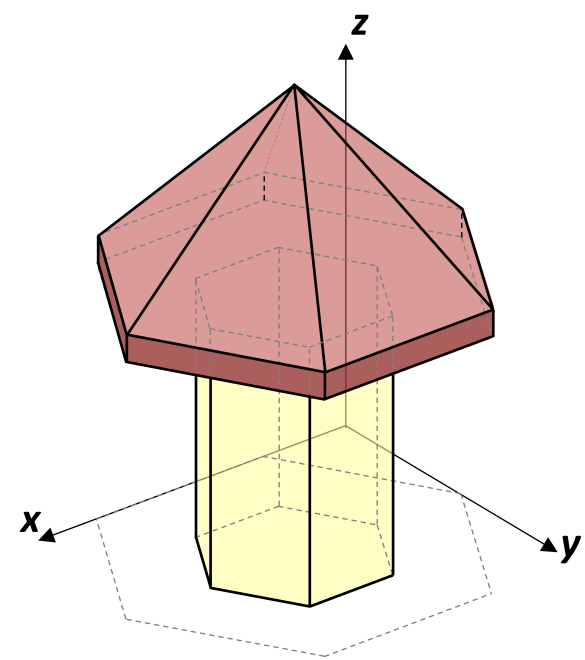
https://www.bing.com/images/axonometria

Na technickom výkrese axonometria dopĺňa Mongeovu projekciu s cieľom vytvoriť lepšiu predstavu o zobrazovanom objekte.

Mongeova projekcia

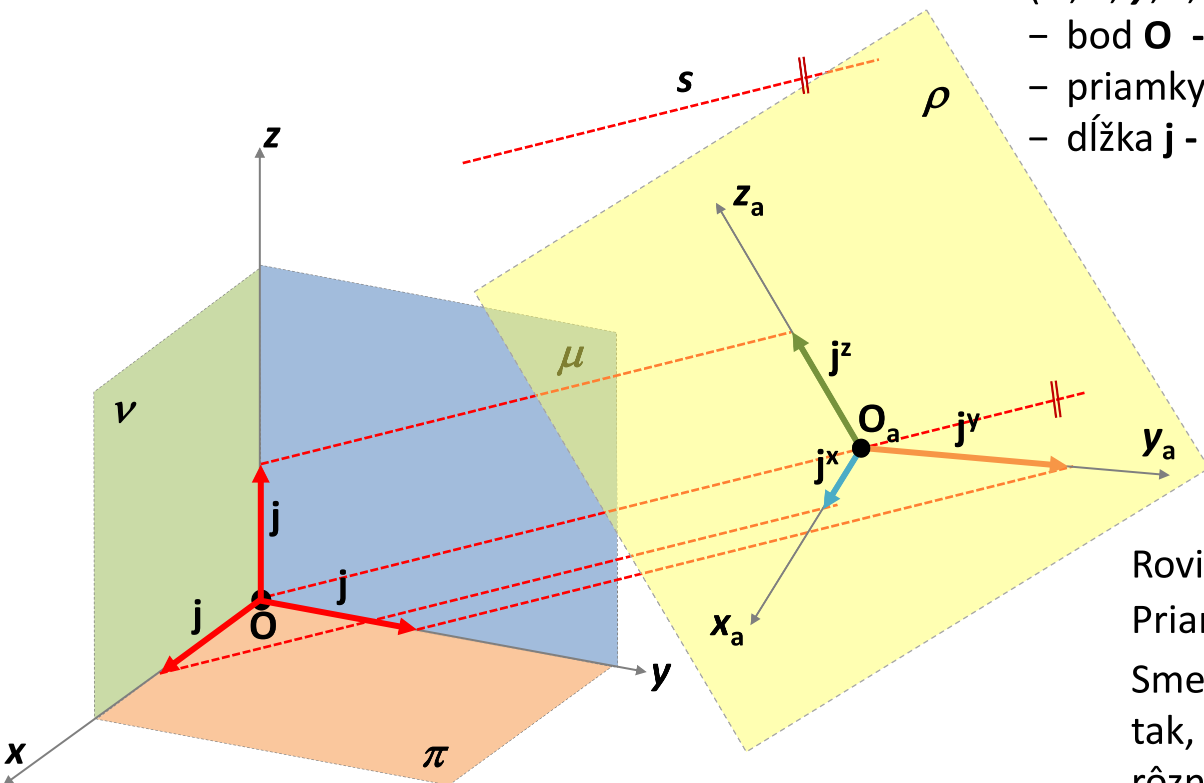


Axonometria



Axonometria znamená „meranie pozdĺž osí" (axis-os).
Hlavná výhoda axonometrie: priemet sa ľahko zostrojí a dajú sa z neho odčítavať rozmery.
Nevýhoda: obraz neodpovedá videniu ľudským okom.

Väčšina stavebných objektov má 3 význačné navzájom kolmé smery: ***šírka, hĺbka, výška***.
Karteziánska sústava súradníc má 3 význačné navzájom kolmé smery: ***x***, ***y***, ***z***.



(**O**, ***x***, ***y***, ***z***, **j**) - Karteziánska sústava súradníc v $\mathbf{E^3}$:

- bod **O** - začiatok súradnicovej sústavy,
- priamky ***x, y, z*** - súradnicové osi,
- dĺžka **j** - jednotka merania.

Súradnicové roviny:

- pôdorysňa $\pi = \boldsymbol{xy}$,
- nárysňa $\nu = \boldsymbol{xz}$,
- bokorysňa $\mu = \boldsymbol{yz}$.

Rovina ρ **-** axonometrická priemetňa.

Priamka ***s*** **-** smer premietania.

Smer premietania ***s*** musí byť zvolený tak, aby sa osi ***x, y, z*** zobrazili do troch rôznych priamok.

Karteziánsku sústavu súradníc (**O**, ***x***, ***y***, ***z***, **j**) premietneme do axonometrickej priemetne ρ.

$\mathbf{O_a}$ **-** začiatok axonometrickej sústavy súradníc (rovnobežný priemet bodu **O** do priemetne ρ),

$\boldsymbol{x_a}$, $\boldsymbol{y_a}$, $\boldsymbol{z_a}$ **-** axonometrické osi (rovnobežný priemet osí ***x***, ***y***, ***z*** do priemetne ρ),

$\mathbf{j^x}$, $\mathbf{j^y}$, $\mathbf{j^z}$ **-** axonometrické jednotky (rovnobežný priemet jednotky **j**).

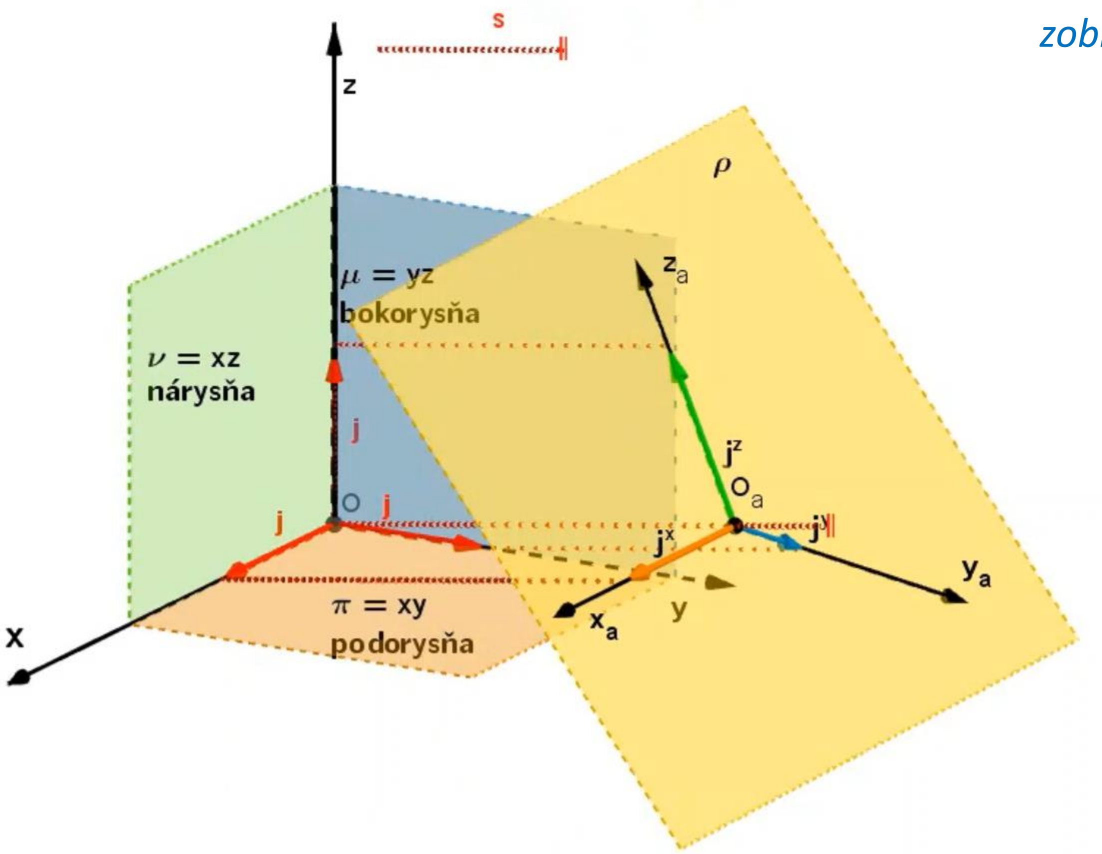
($\mathbf{O_a}$, $\boldsymbol{x_a}$, $\boldsymbol{y_a}$, $\boldsymbol{z_a}$, $\mathbf{j^x}$, $\mathbf{j^y}$, $\mathbf{j^z}$) - **axonometrická sústava súradníc** .

Ilustrácia pojmov Karteziánska sústava súradníc a axonometrická sústava súradníc

(**O**, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, **j**) - Karteziánska sústava súradníc v $\mathbf{E}^3$,

($\mathbf{O}_a$, $\boldsymbol{x}_a$, $\boldsymbol{y}_a$, $\boldsymbol{z}_a$, $\mathbf{j}^x$, $\mathbf{j}^y$, $\mathbf{j}^z$) - axonometrická sústava súradníc v priemetni ρ.

Pre spustenie videa prejdite myšou na video-obrázok a kliknite na zobrazenú možnosť prehrávania.



Definícia: Axonometria je rovnobežné premietanie bodov euklidovského priestoru $\mathbf{E}^3$ do jednej axonometrickej priemetne ρ, do ktorej sa premieta aj Karteziánska sústava súradníc (**O**, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, **j**), pričom osi $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ sa premietajú do troch rôznych priamok.

Podľa smeru premietania $\boldsymbol{s}$ delíme axonometriu na:

kolmú axonometriu, ak $\boldsymbol{s} \perp \pi$,
šikmú axonometriu, ak $\boldsymbol{s} \not\perp \pi$.

Vlastnosti axonometrie

Axonometria je rovnobežné premietanie, preto má vlastnosti **V1** až **V4** rovnobežného premietania. To znamená, že:

1. Zachováva incidenciu útvarov.
2. Zachováva rovnobežnosť priamok.
3. Zachováva deliaci pomer troch bodov na priamke.
4. Útvary ležiace v rovine rovnobežnej s priemetňou sa zobrazujú do útvarov zhodných s pôvodnými útvarmi.

Kolmá axonometria má navyše vlastnosti **V5** a **V6** kolmého premietania (o dĺžke priemetu úsečky a o obraze pravého uhla).

Obraz geometrického útvaru *U* v axonometrii

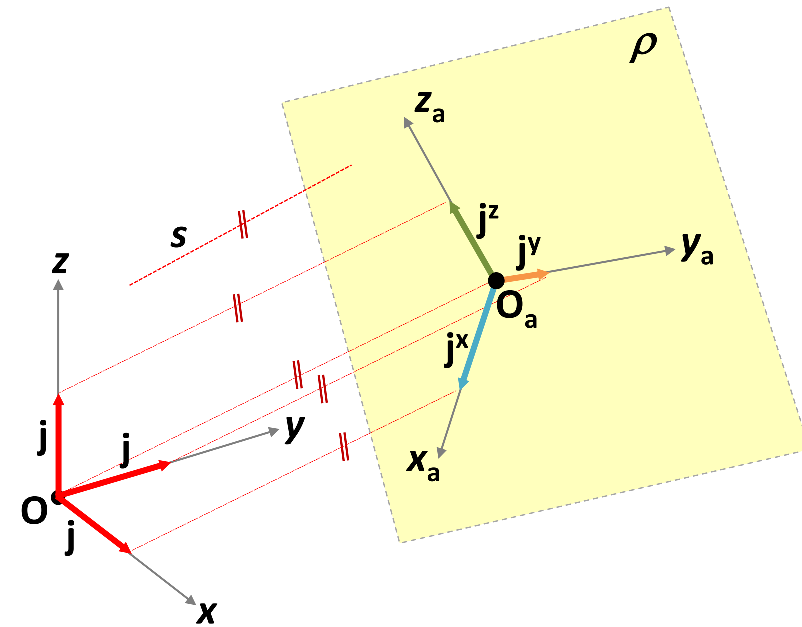
- Geometrický útvar ***U*** spojíme s Karteziánskou sústavou súradníc (**O**, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, **j**), ak je to možné, urobíme to tak, aby význačné smery útvaru ***U*** boli rovnobežné so súradnicovými osami $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$.
- Karteziánska sústava súradníc (**O**, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, **j**) v $\mathbf{E}^3$ sa zobrazí do axonometrickej sústavy súradníc ($\mathbf{O}_a$, $\boldsymbol{x}_a$, $\boldsymbol{y}_a$, $\boldsymbol{z}_a$, $\mathbf{j}^x$, $\mathbf{j}^y$, $\mathbf{j}^z$) v axonometrickej priemetni ρ.
- Obraz geometrického útvaru ***U*** zostrojíme pomocou axonometrickej sústavy súradníc.

Pohlkeho veta

$(\mathbf{O}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \mathbf{j})$ - Karteziánska sústava súradníc v $\mathbf{E}^3$.

ρ – priemetňa, ***s*** – smer premietania

$(\mathbf{O}_a, \boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{y}_a, \boldsymbol{z}_a, \mathbf{j}^x, \mathbf{j}^y, \mathbf{j}^z)$ - axonometrická sústava súradníc v priemetni.

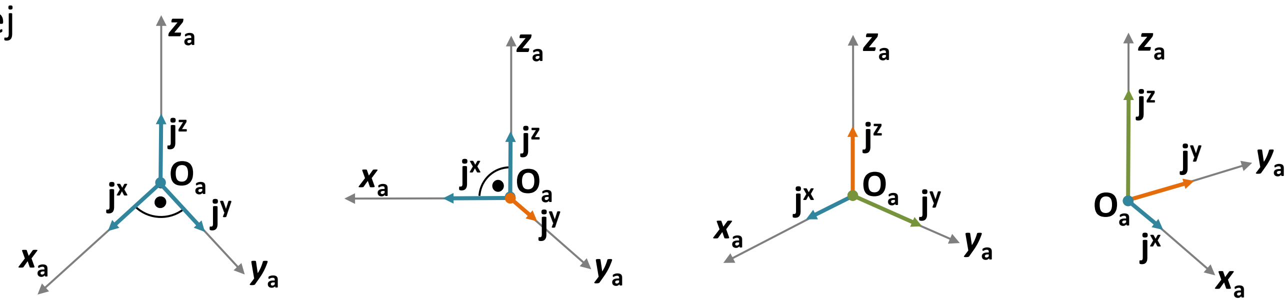


Ako môže vyzerať axonometrická sústava súradníc?

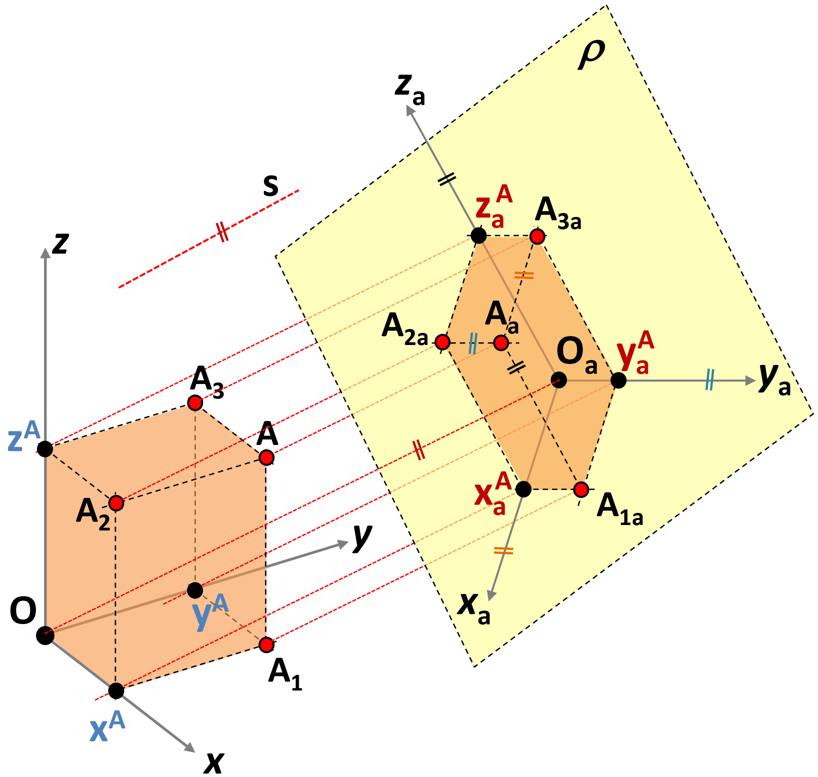
Odpoveď dáva **Pohlkeho veta**.

Pohlkeho veta. Tri úsečky v rovine, ktoré majú spoločný krajný bod a ležia na troch rôznych priamkach, možno vždy považovať za rovnobežný priemet troch navzájom kolmých, rovnako dlhých úsečiek so spoločným krajným bodom (t.j. jednotiek **j** na pravouhlých súradnicových osiach).

Príklady axonometrickej sústavy súradníc :



Obraz bodu v axonometrii



Bod **A** v priestore má súradnice [x^A; y^A; z^A].

Súradnicový kváder bodu je kváder, ktorého hrany sú rovnobežné so súradnicovými osami a dĺžky hrán sú súradnice bodu (presnejšie ich absolútne hodnoty).

A_1, A_2, A_3, - pôdorys, nárys, bokorys bodu A

ρ – priemetňa, ***s*** – smer premietania

Do axonometrickej priemetne premietneme

- súradnicové osi,
- súradnicový kváder bodu **A**,
- body **A**, **A_1, A_2, A_3**.

A_a - axonometrický priemet bodu **A**

A_{1a} - axonometrický pôdorys bodu **A**, **$A_aA_{1a} \parallel z_a$**

A_{2a} - axonometrický nárys bodu **A**, **$A_aA_{2a} \parallel y_a$**

A_{3a} - axonometrický bokorys bodu **A**, **$A_aA_{3a} \parallel x_a$**

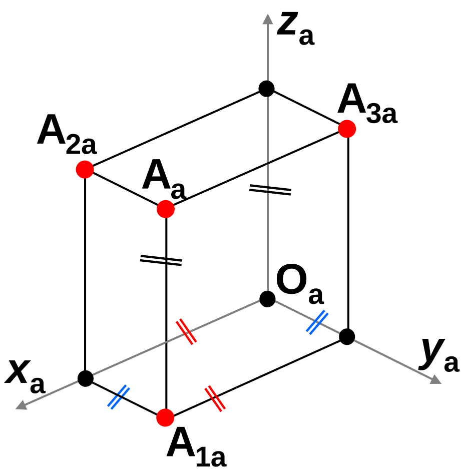
Bod **A_a** má súradnice: [x_a^A; y_a^A; z_a^A].

Veta. Obraz bodu **A** v axonometrii je jednoznačne určený ktoroukoľvek dvojicou bodov:

- **(A_a, A_{1a}), $A_aA_{1a} \parallel z_a$,**
- **(A_a, A_{2a}), $A_aA_{2a} \parallel y_a$,**
- **(A_a, A_{3a}), $A_aA_{3a} \parallel x_a$.**

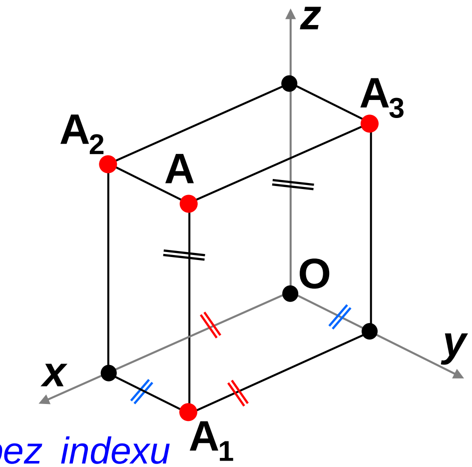
Obraz bodu v axonometrii

Príklad. Daný je obraz bodu **A, (A_a, A_{1a})**, $A_aA_{1a} \parallel z_a$ v axonometrii. Zostrojte axonometrický nárys a bokorys bodu **A**.



Riešenie.

1) **A_{2a}, A_{3a}** - axonometrický nárys a bokorys bodu **A** sú vrcholy súradnicového kvádra.
2) Pôdorys súradnicového kvádra zostrojíme pomocou priamok, ktoré prechádzajú bodom **A_{1a}** a sú rovnobežné s axonometrickými osami x_a a y_a.



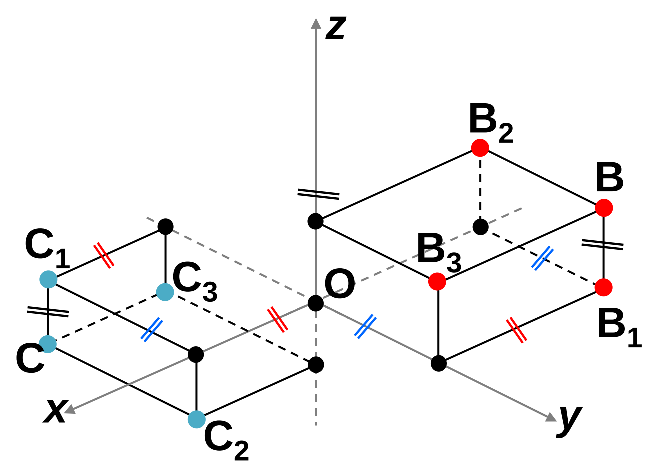
Označovanie bez indexu „a“

Poznámka: Ak nemôže prísť k nedorozumeniu, budeme v nasledujúcich úlohách index „a“ vynechávať, t.j. budeme písať x, y, A, A_1, ... namiesto x_a, y_a, A_a, A_{1a}, ...

Príklad. Dané sú obrazy bodov **B** a **C** v axonometrii. Zostrojte zvyšné axonometrické priemety bodov **B** a **C** a určte ich polohu vzhľadom na súradnicové roviny.

Riešenie.

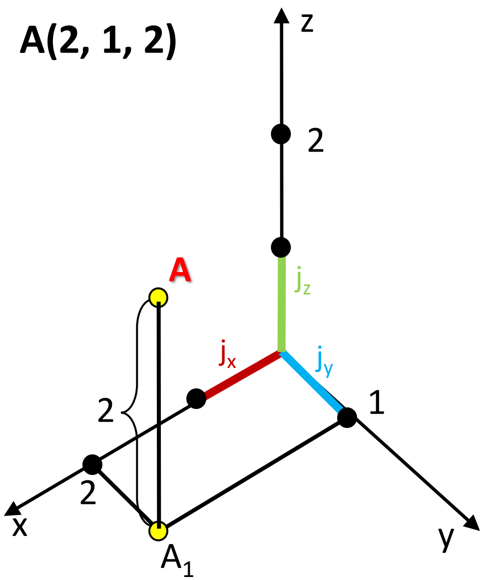
1. Pomocou súradnicového kvádra bodu.
2. Bod **B** leží nad pôdorysňou, pred nárysňou, za bokorysňou.
3. Bod **C** leží pod pôdorysňou, za nárysňou, pred bokorysňou.



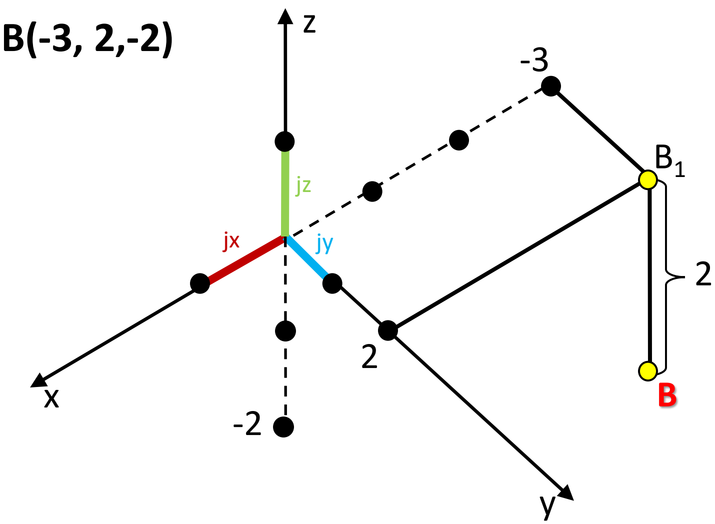
Valášková

Súradnice bodu

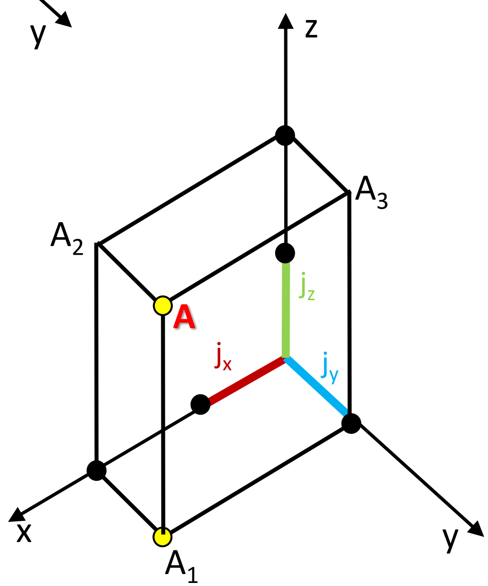
A(2, 1, 2)



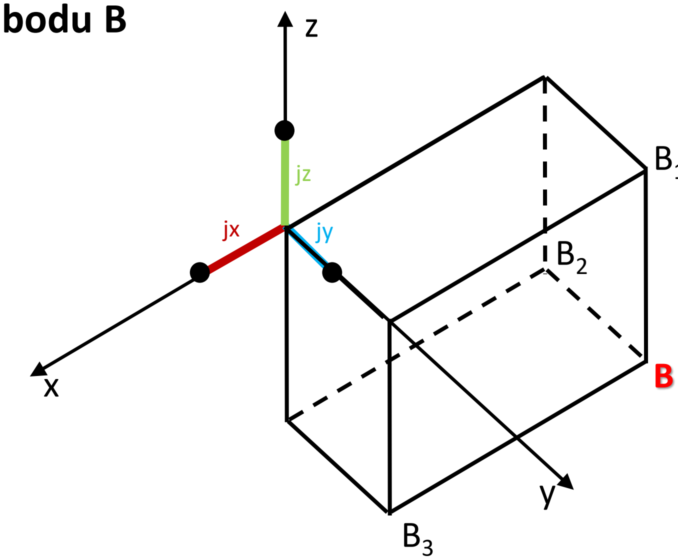
B(-3, 2,-2)



súradnicový kváder bodu A



súradnicový kváder bodu B

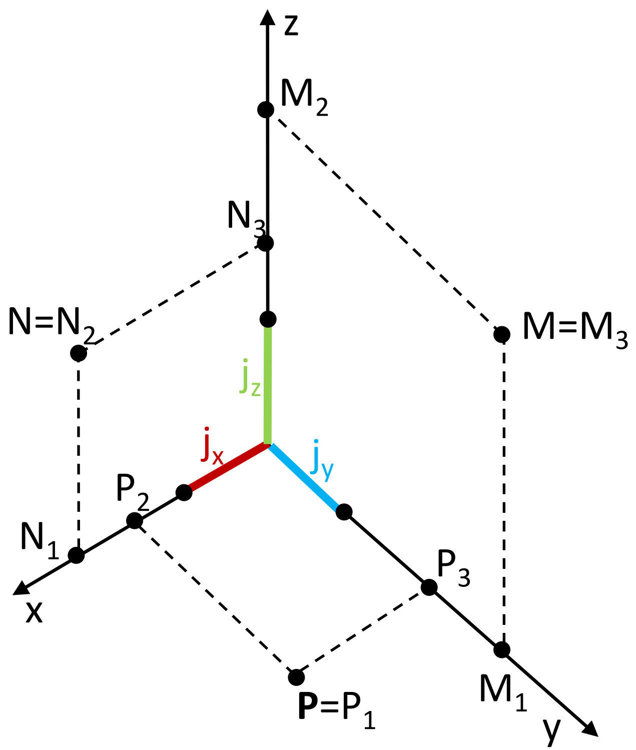


Priemety bodov ležiacich v súradnicových rovinách

bod P leží v pôdorysni : $P = P_{1,}\ P_2 \in x,\ \ P_3 \in y$

bod N leží v nárysni : $N = N_{2,}\ N_1 \in x,\ \ N_3 \in z$

bod M leží v bokorysni: $M = M_{3,} M_1 \in y, M_2 \in z$

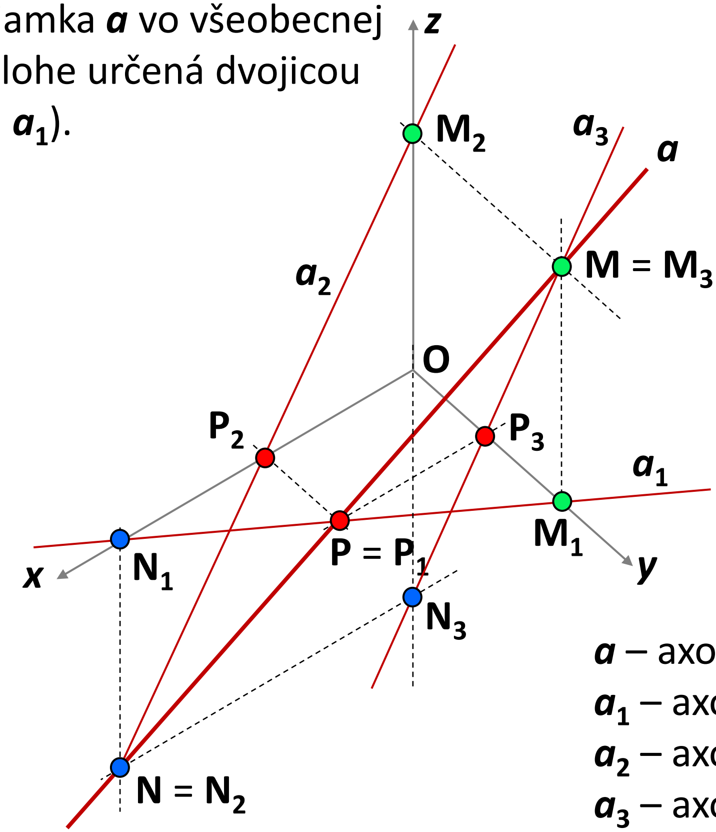


Obraz priamky v axonometrii

Veta. Obraz priamky v axonometrii je jednoznačne určený ľubovoľnou dvojicou jej priemetov, pričom je to dvojica priamok alebo priamka a bod.

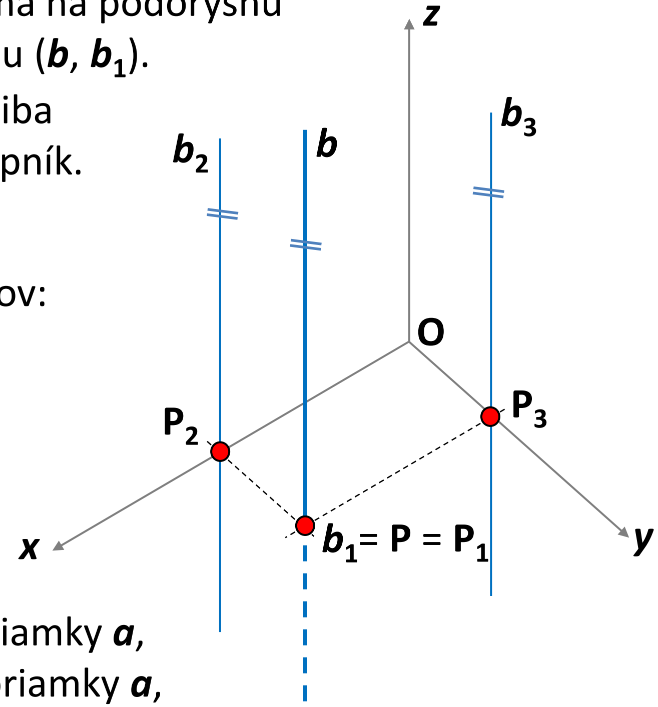
Najčastejšie býva obraz priamky určený dvojicou (axon. priemet, axon. pôdorys).

Priamka $\boldsymbol{a}$ vo všeobecnej polohe určená dvojicou ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a_1}$).



Priamka $\boldsymbol{b}$ kolmá na pôdorysňu určená dvojicou ($\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b_1}$).

Priamka $\boldsymbol{b}$ má iba pôdorysný stopník.



Konštrukcia stopníkov:

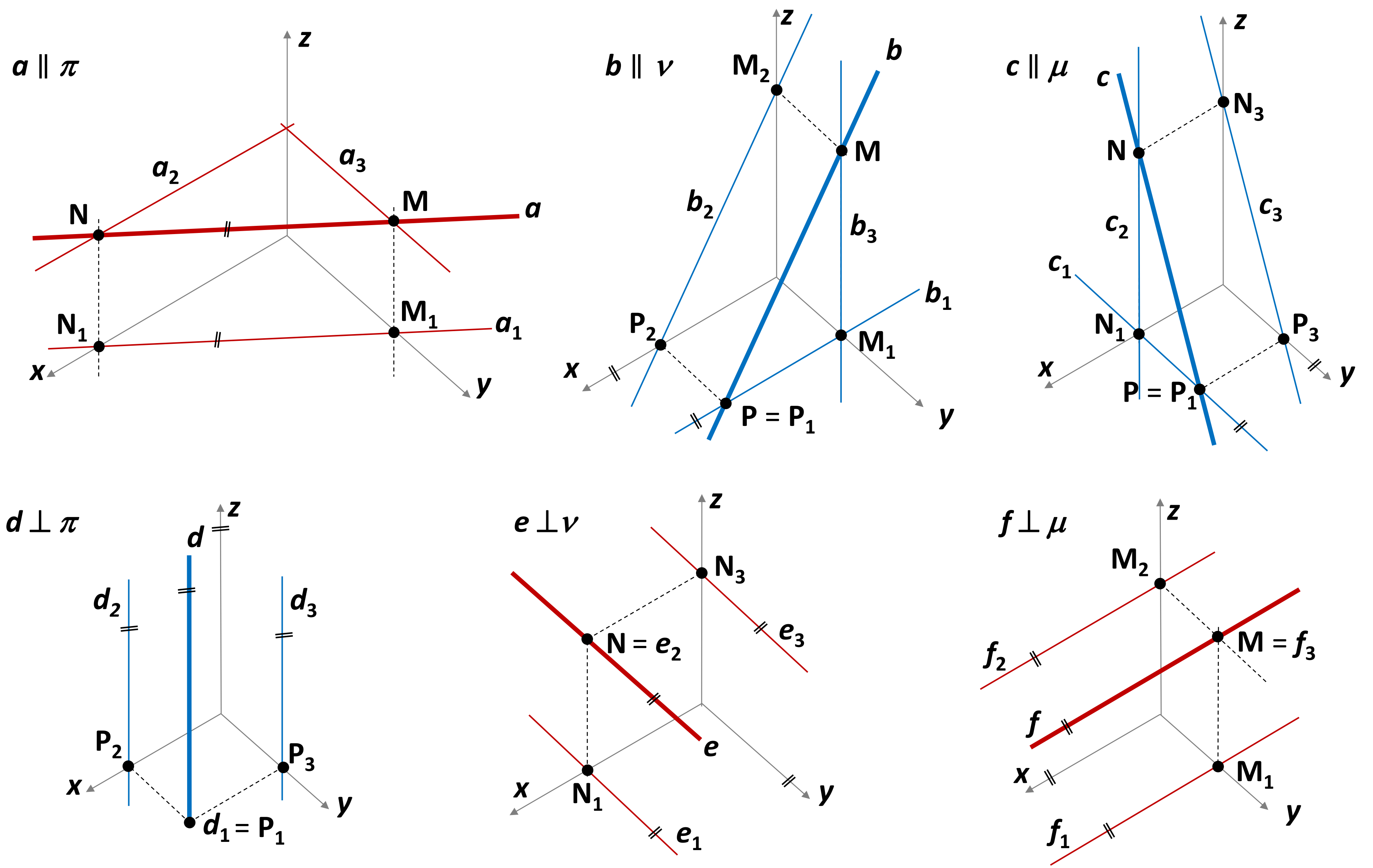
- $\mathbf{P} = \mathbf{P_1} = \boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{a_1}$,
- $\mathbf{N_1} = \boldsymbol{a_1} \cap \boldsymbol{x}$,
- $\mathbf{M_1} = \boldsymbol{a_1} \cap \boldsymbol{y}$.

$\boldsymbol{a}$ – axonometrický priemet priamky $\boldsymbol{a}$,
$\boldsymbol{a_1}$ – axonometrický pôdorys priamky $\boldsymbol{a}$,
$\boldsymbol{a_2}$ – axonometrický nárys priamky $\boldsymbol{a}$,
$\boldsymbol{a_3}$ – axonometrický bokorys priamky $\boldsymbol{a}$.

Stopníky priamky (priesečníky priamky s pomocnými priemetňami π, ν, μ):

- **pôdorysný** stopník priamky je priesečník priamky s pôdorysňou, označujeme **P**,
- **nárysný** stopník priamky je priesečník priamky s nárysňou, označujeme **N**,
- **bokorysný** stopník priamky je priesečník priamky s bokorysňou, označujeme **M**.

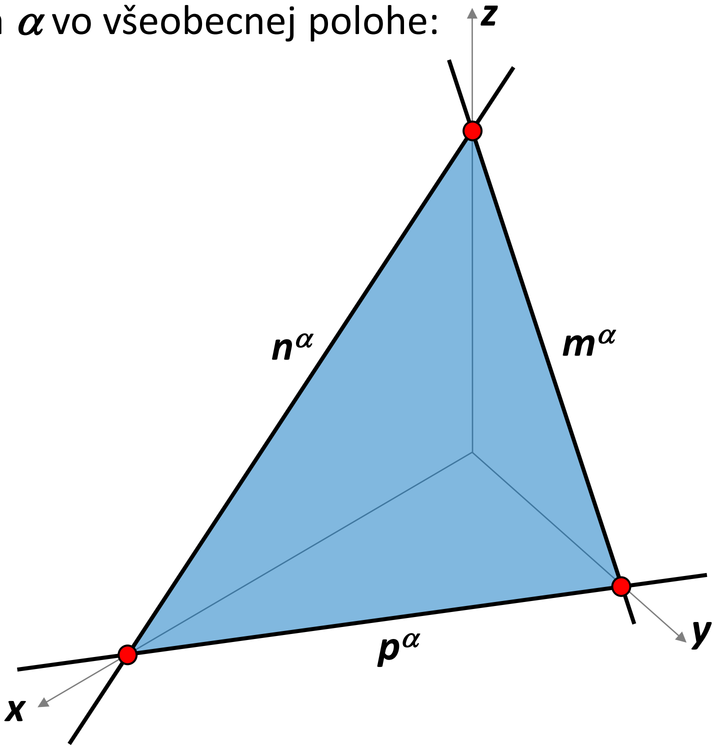
Príklad 11.4: Určte polohu každej priamky vzhľadom na súradnicové roviny π, ν, μ, zostrojte jej stopníky, axonometrický nárys a bokorys priamky.



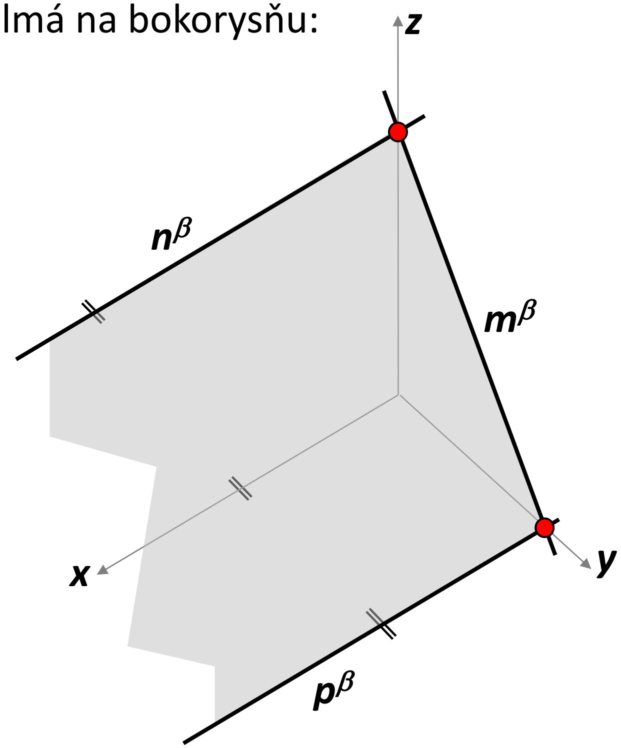
Obraz roviny v axonometrii

Veta. Obraz roviny v axonometrii je jednoznačne určený dvojicou rovnobežných alebo rôznobežných priamok, najčastejšie býva rovina určená dvojicou stôp roviny.

Rovina α vo všeobecnej polohe:



Rovina β kolmá na bokorysňu:



Stopy roviny (priesečnice roviny s pomocnými priemetňami π, ν, μ):

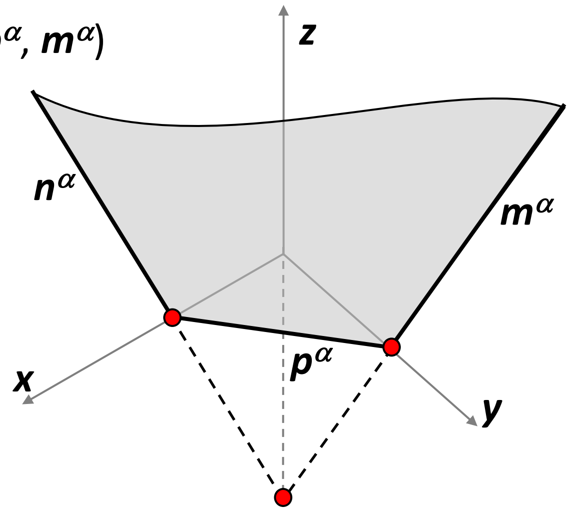
- **pôdorysná** stopa je priesečnica roviny α s pôdorysňou, označujeme p^{α},
- **nárysná** stopa je priesečnica roviny α s nárysňou, označujeme n^{α},
- **bokorysná** stopa je priesečnica roviny α s bokorysňou, označujeme m^{α}.

Stopy roviny sa pretínajú na súradnicových osiach $p^{\alpha} \cap n^{\alpha} \in x$, $p^{\alpha} \cap m^{\alpha} \in y$, $n^{\alpha} \cap m^{\alpha} \in z$, alebo dve stopy môžu byť navzájom rovnobežné.

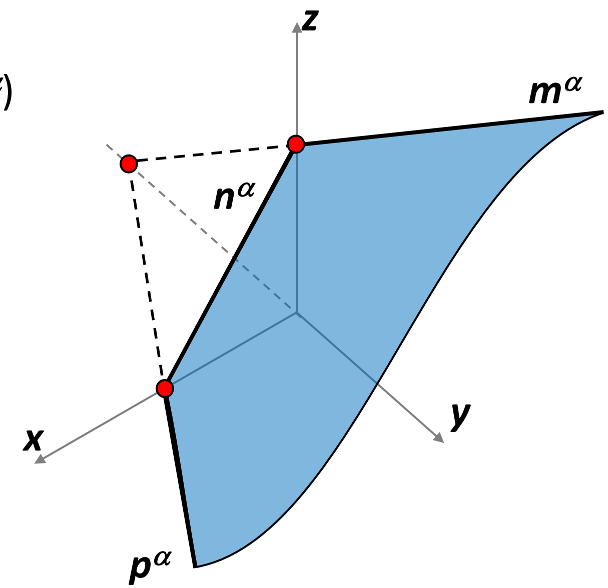
Príklad 11.5: Zostrojte chýbajúcu stopu roviny α.

Postup: Riešime pomocou priesečníkov stôp rovín so súradnicovými osami $\boldsymbol{x, y, z}$.

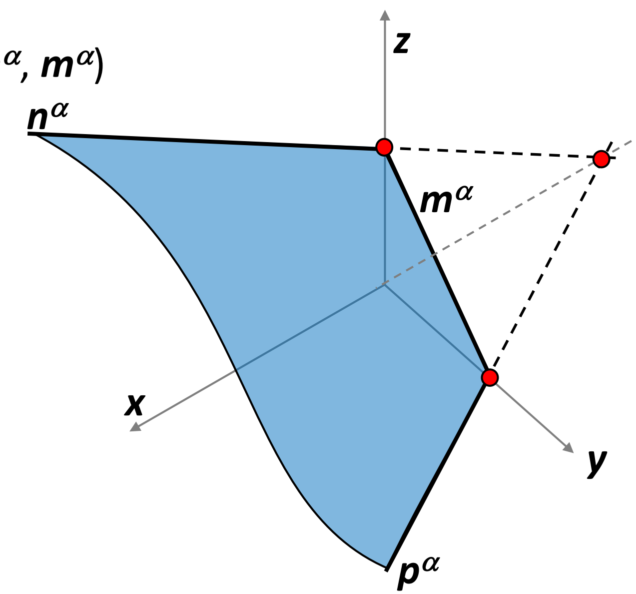
a) $\alpha\,(p^{\alpha}, m^{\alpha})$



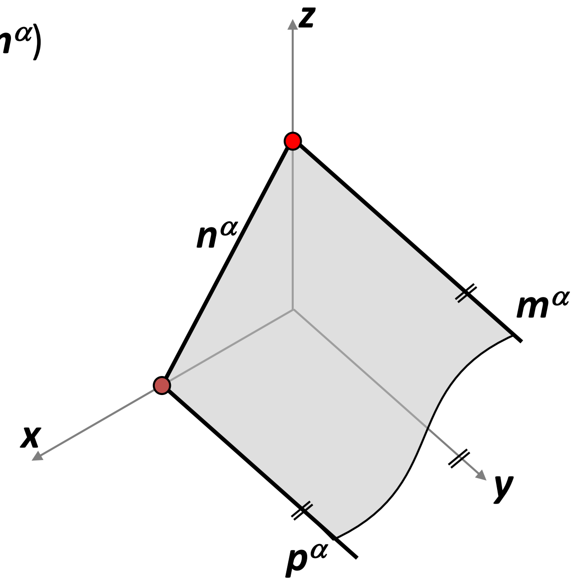
b) $\alpha\,(p^{\alpha}, n^{\alpha})$



c) $\alpha\,(n^{\alpha}, m^{\alpha})$

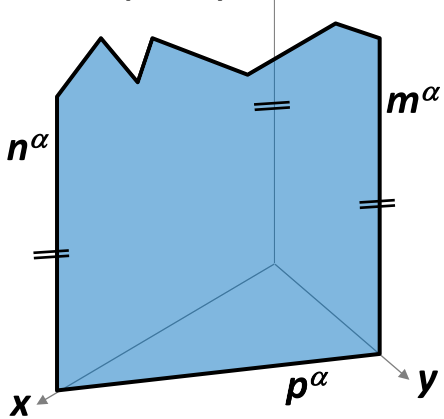


d) $\alpha\,(n^{\alpha}, m^{\alpha})$

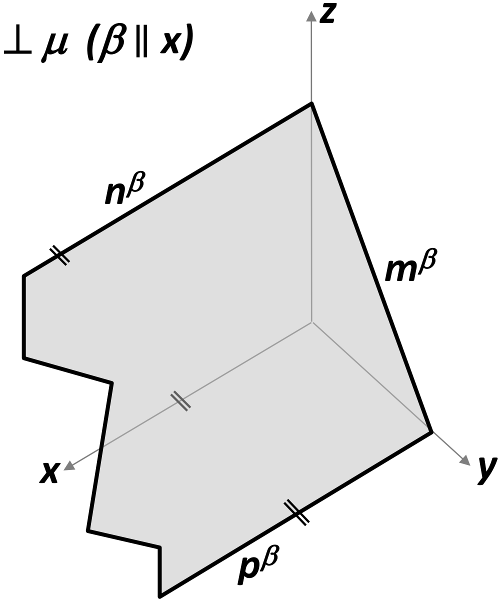


Príklad 11.6: Určte polohu každej roviny vzhľadom na roviny π, ν, μ, prípadne vzhľadom na osi $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$.

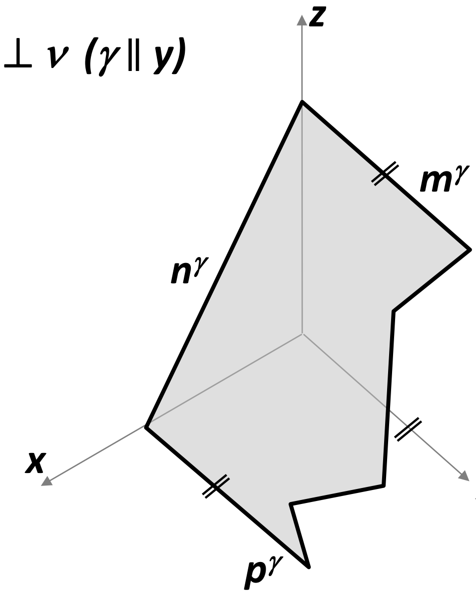
$\alpha \perp \pi$ $(\alpha \parallel z)$



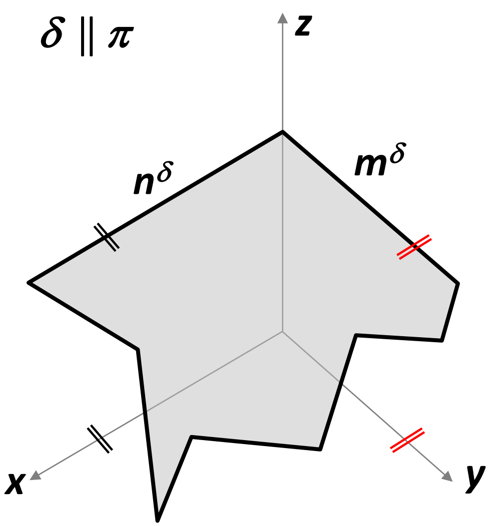
$\beta \perp \mu$ $(\beta \parallel x)$



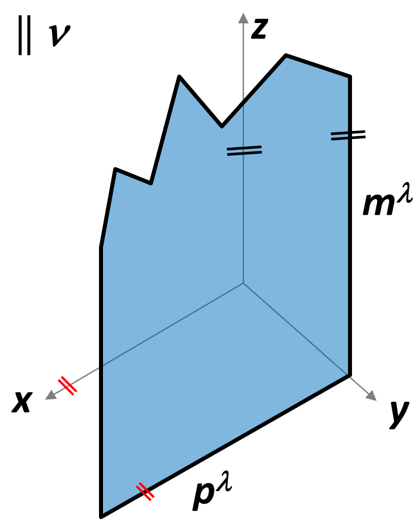
$\gamma \perp \nu$ $(\gamma \parallel y)$



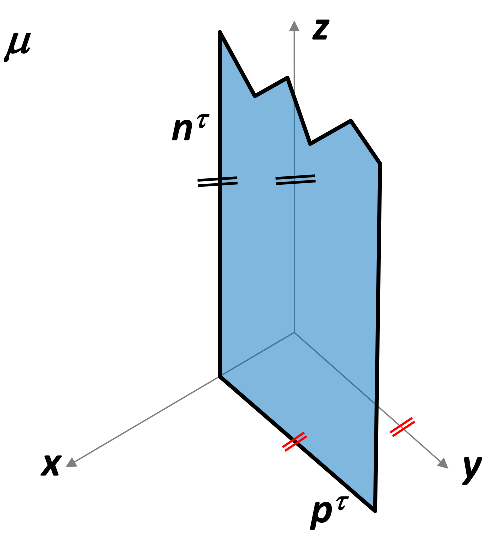
$\delta \parallel \pi$



$\lambda \parallel \nu$



$\tau \parallel \mu$

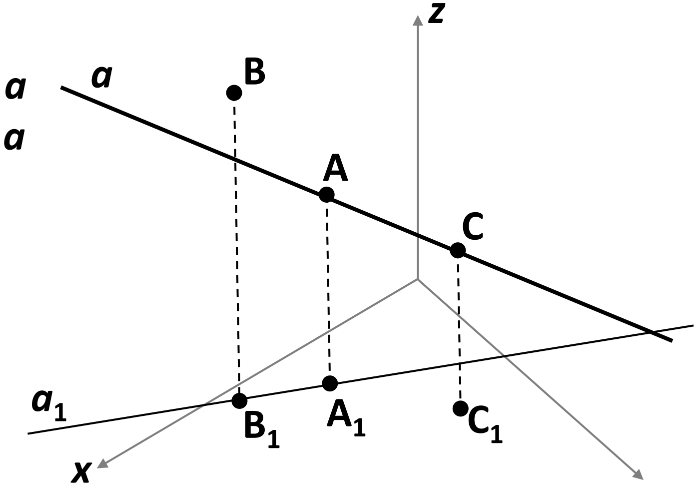


Bod na priamke

Bod **A** leží na priamke ***a***, ak platí: $\mathbf{A} \in \boldsymbol{a}$ a $\mathbf{A_1} \in \boldsymbol{a_1}$.

$\mathbf{B} \notin \boldsymbol{a}$

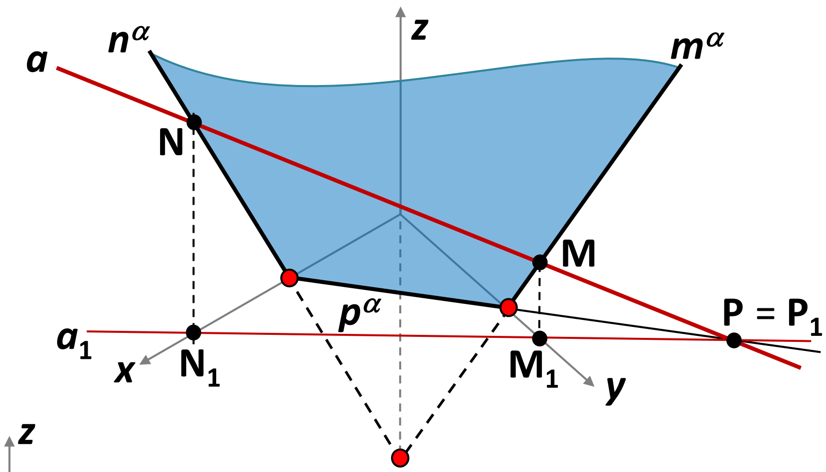
$\mathbf{C} \notin \boldsymbol{a}$



Priamka v rovine

Priamka ***a*** leží v rovine α, ak platí: stopníky priamky ***a*** ležia na stopách roviny α : $\mathbf{P} \in \boldsymbol{p}^{\alpha}$, $\mathbf{N} \in \boldsymbol{n}^{\alpha}$, $\mathbf{M} \in \boldsymbol{m}^{\alpha}$.

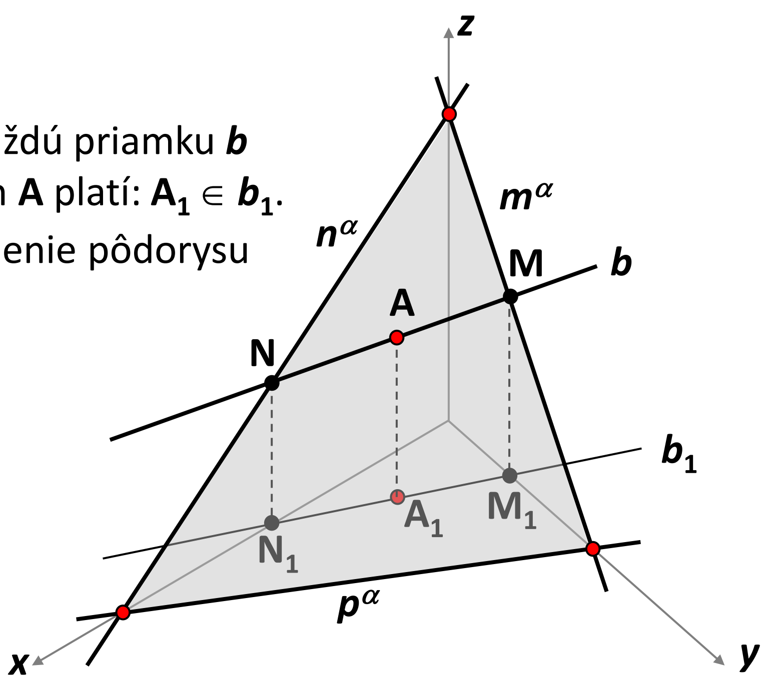
Pôdorys priamky ***a*** je určený pôdorysmi jej stopníkov.



Bod v rovine

Bod **A** leží v rovine α, ak pre každú priamku ***b*** roviny α prechádzajúcu bodom **A** platí: $\mathbf{A_1} \in \boldsymbol{b_1}$.

Tento fakt využijeme na zostrojenie pôdorysu bodu **A**.



Vzájomná poloha dvoch priamok

Priamky v priestore môžu byť:

rovnobežné

Pre obraz rovnobežných priamok a, b platí: $a \parallel b$ a $a_1 \parallel b_1$.

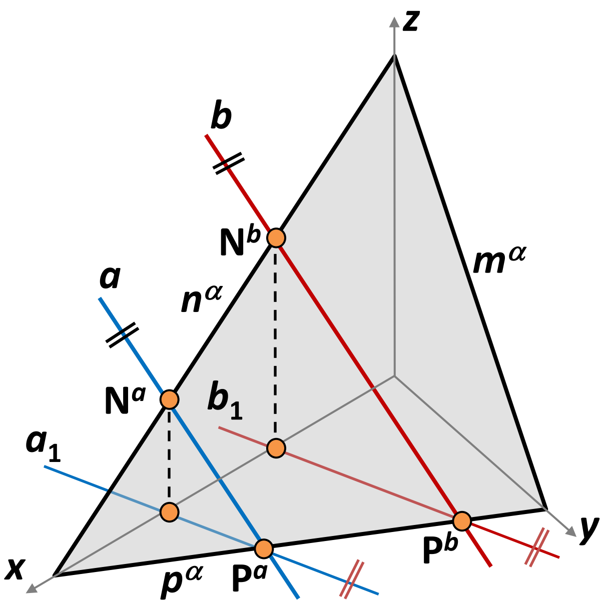
rôznobežné

Pre obraz rôznobežných priamok a, b platí: spojnica bodov $a \cap b$ a $a_1 \cap b_1$ je rovnobežná s osou z.

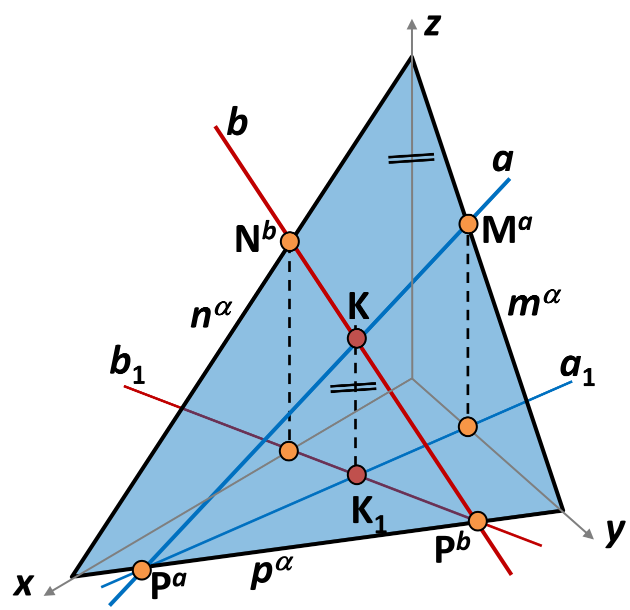
Bod **K** je priesečník priamok a, b, $KK_1 \parallel z$.

mimobežné

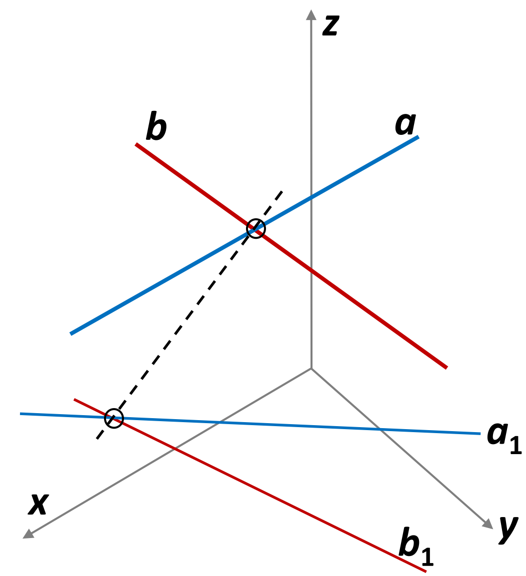
Pre obraz mimobežných priamok a, b platí: spojnica bodov $a \cap b$ a $a_1 \cap b_1$ nie je rovnobežná s osou z.



Rovnobežné priamky ležia v jednej rovine.



Rôznobežné priamky ležia v jednej rovine.

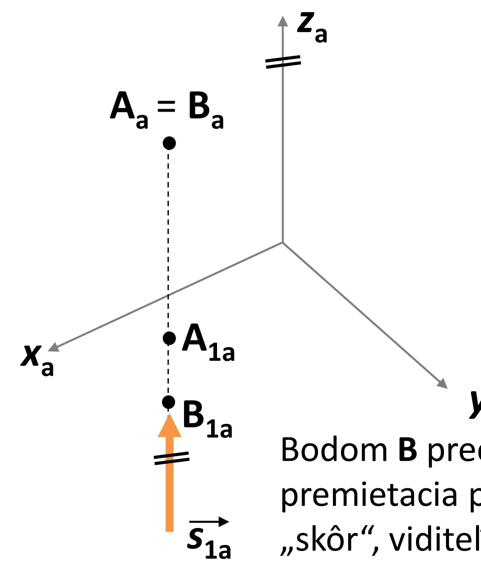


Mimobežné priamky neležia v jednej rovine.

Viditeľnosť v axonometrii

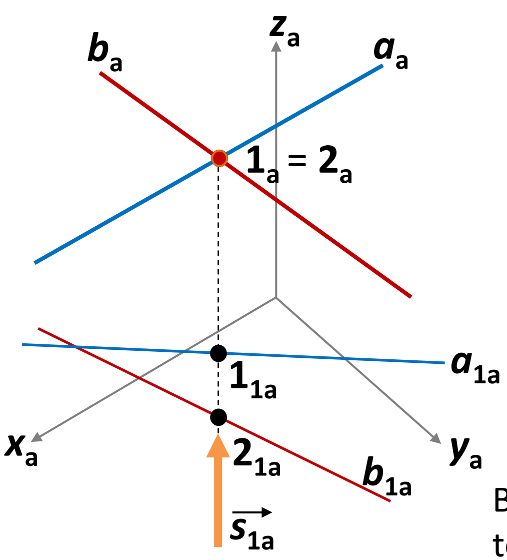
Body **A, B** sú dva rôzne body ležiace na jednej premietacej priamke. Ktorý z bodov **A, B** je viditeľný?

- Polohu pozorovateľa určíme zavedením orientácie premietacích priamok ***s***, vyjadríme to orientáciou axonometrického pôdorysu premietacej priamky: $\overrightarrow{s_{1a}} \parallel \overrightarrow{z_a}$.
- Ak je axonometrický priemet dvoch rôznych bodov totožný, viditeľný je ten bod, ktorým prechádza orientovaná premietacia priamka „skôr“, to určíme pomocou $\overrightarrow{s_{1a}}$.



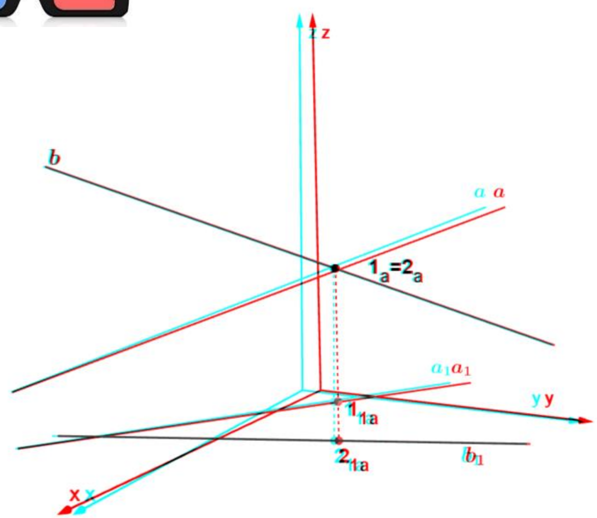
Bodom **B** prechádza premietacia priamka ***s*** „skôr“, viditeľný je bod **B**.

Príklad 11.7: Priamky ***a, b*** sú mimobežné. Zistite, či je priamka ***a*** pred priamkou ***b*** alebo naopak.



Postup:

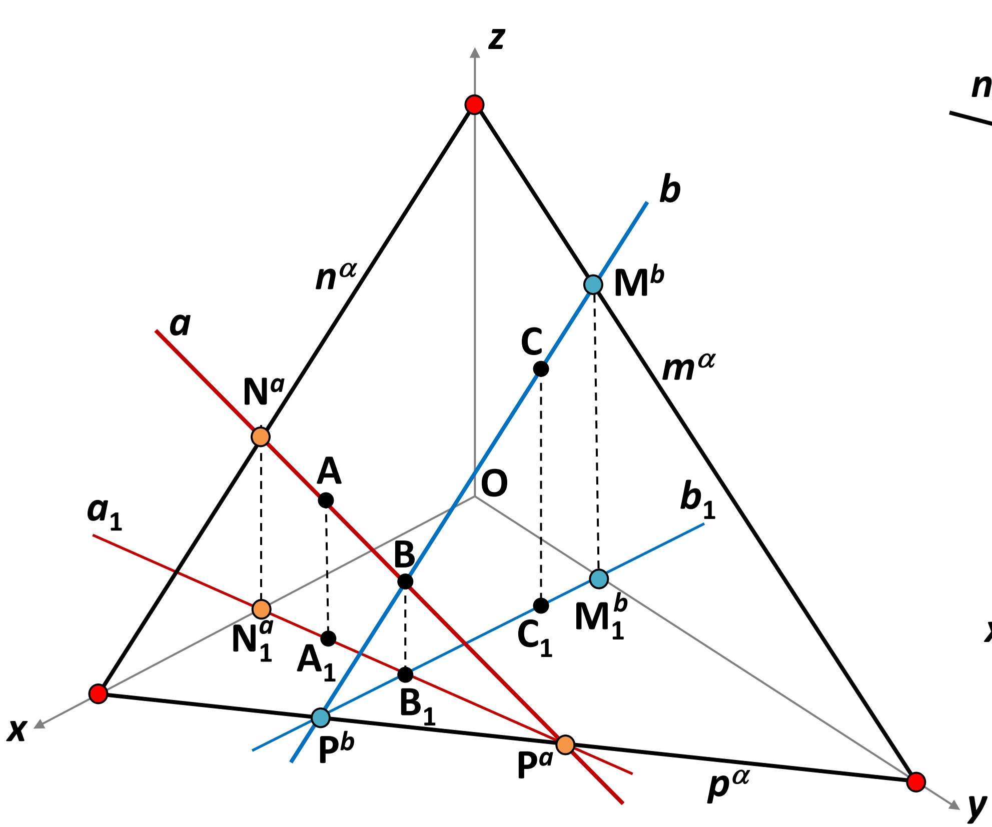
1. Bod $a_a \cap b_a$ je axonometrický priemet dvoch bodov na jednej premietacej priamke ***s***, označme ich **1**, **2**. Nech **1** $\in$ ***a***, **2** $\in$ ***b***.
2. Zostrojme pôdorysy bodov **1** a **2**.
3. Zostrojme axonometrický pôdorys orientovanej premietacej priamky s_{1a}.
4. Bod **2** je pred bodom **1**, preto priamka ***b*** je pred priamkou ***a***.



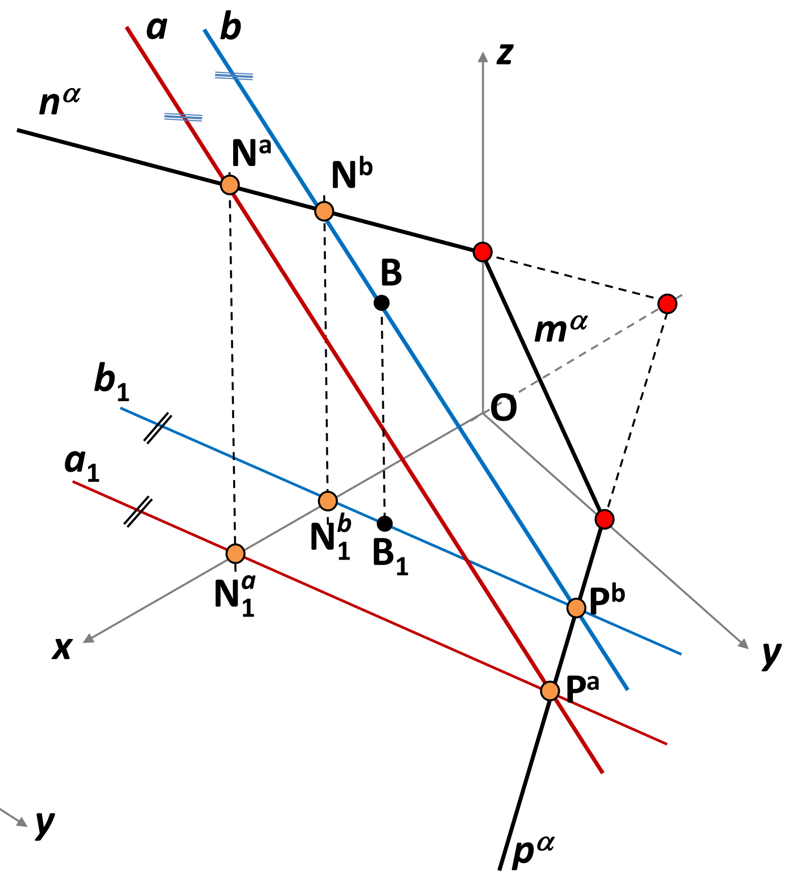
Body **1** a **2** nazývame krycie body lebo $1_a = 2_a$ a tento postup sa nazýva **metóda krycích bodov**.

Príklad 11.9: Zostrojte stopy roviny α.

a) α (**A**, **B**, **C**)



b) α (***a***, **B**)



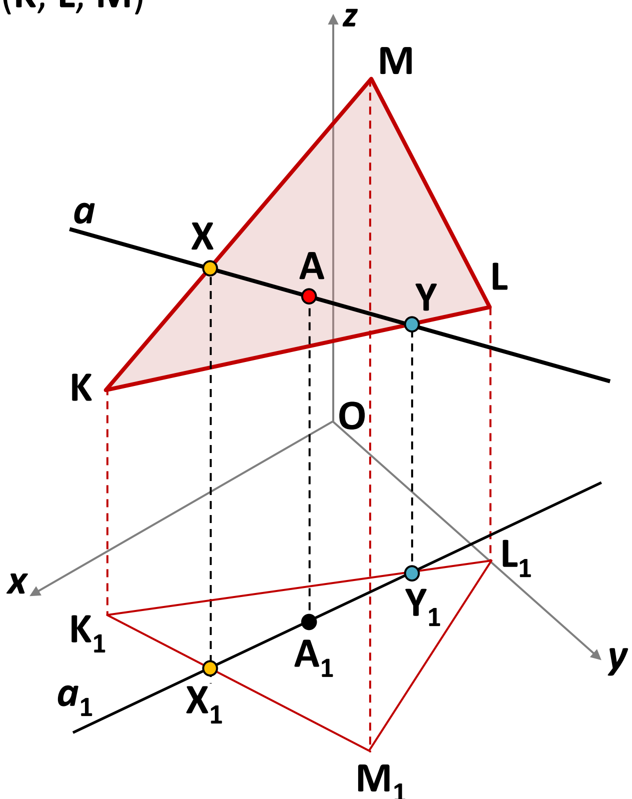
Postup: V rovine zostrojíme dve priamky a ich dostupné stopníky. Stopy roviny sú určené týmito stopníkmi a priesečníkmi roviny s osami ***x***, ***y***, ***z***.

a) v rovine α zobrazíme napríklad priamky ***a*** = **AB**, ***b*** = **BC**.

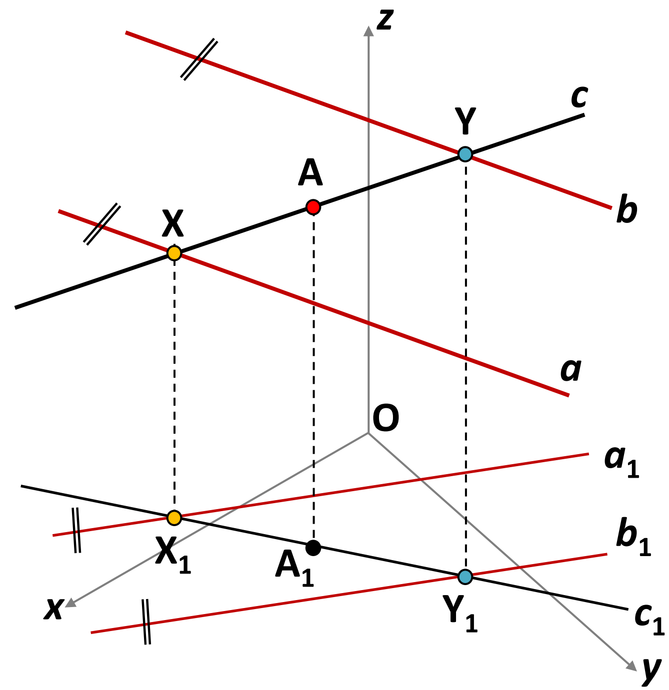
b) V rovine α zostrojíme ďalšiu priamku ***b***, **B** $\in$ ***b***, ***b*** $\parallel$ ***a***.

Príklad 11.11: Zostrojte axonometrický pôdorys bodu **A**, ktorý leží v rovine α.

a) α = (**K**, **L**, **M**)



b) α = (***a***, ***b***, ***a*** ∥ ***b***)



Postup:

1. Pôdorys zostrojíme pomocou ľubovoľnej priamky ***a*** roviny α, ktorá prechádza bodom **A**.
2. Priamka ***a*** leží v rovine **ΔKLM**, preto je s jeho stranami rôznobežná alebo rovnobežná, priesečníky označme **X, Y**.
3. Pôdorys priamky ***a*** je určený pôdorysmi bodov **X, Y**.

Postup:

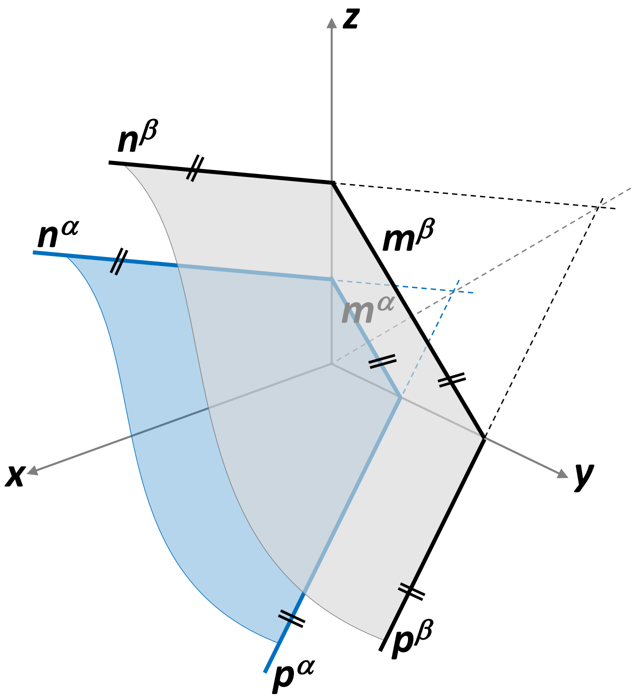
1. Pôdorys zostrojíme pomocou ľubovoľnej priamky ***c*** roviny α, ktorá prechádza bodom **A** a je rôznobežná s priamkami ***a, b***.
2. Priesečníky priamky ***c*** s priamkami ***a, b*** označíme **X, Y**.
3. Pôdorys priamky ***c*** je určený pôdorysmi bodov **X, Y**.

Vzájomná poloha dvoch rovín

Dve roviny v priestore môžu byť:

rovnobežné

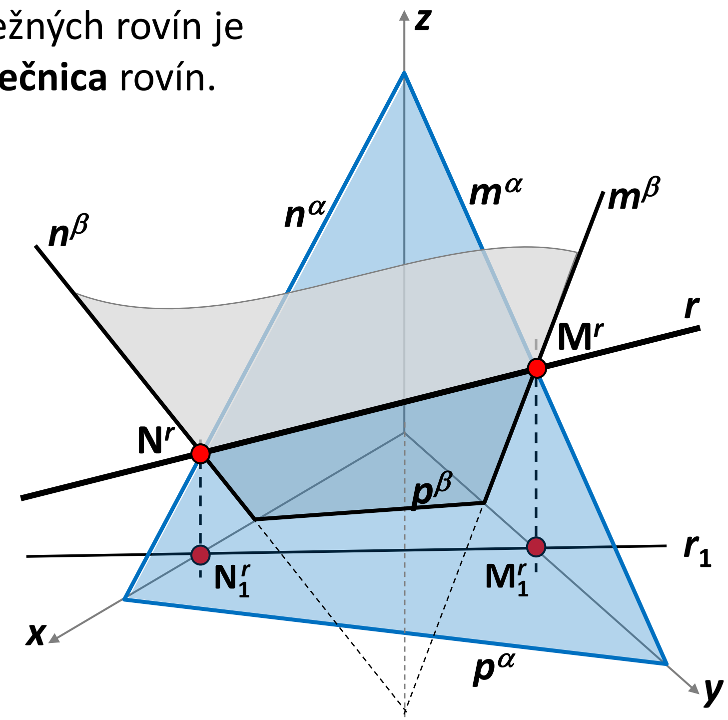
Pre obraz rovnobežných rovín α, β platí:
$p^\alpha \parallel p^\beta$ a $n^\alpha \parallel n^\beta$ a $m^\alpha \parallel m^\beta$.



rôznobežné

Roviny α, β sú rôznobežné, ak aspoň jedna dvojica stôp (p^α, p^β), (n^α, n^β), (m^α, m^β) je dvojica rôznobežných priamok.

Prienik rôznobežných rovín je priamka - **priesečnica** rovín.

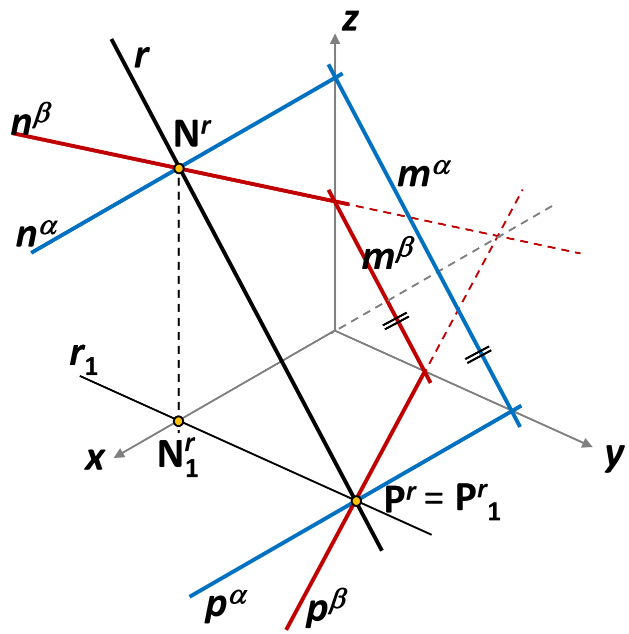


Priesečnica $r = \alpha \cap \beta$ je určená ľubovoľnou dvojicou stopníkov: $P^r = p^\alpha \cap p^\beta$, $N^r = n^\alpha \cap n^\beta$, $M^r = m^\alpha \cap m^\beta$.
Pre úplnosť riešenia dourčíme r_1.

Príklad 11.12: Zostrojte priesečnicu rovín α a β.

a) $\alpha = (\, p^{\alpha}, n^{\alpha}), \beta = (\, p^{\beta}, m^{\beta})$

Označme $r = \alpha \cap \beta$.

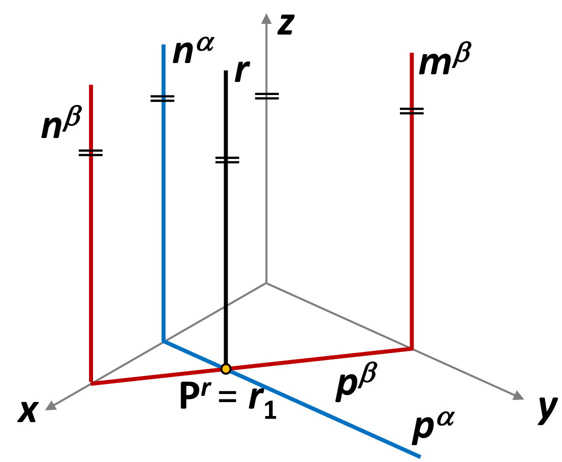


Postup:

1. $P^r = p^{\alpha} \cap p^{\beta}$, $N^r = n^{\alpha} \cap n^{\beta}$.
2. Priesečnica $r = P^rN^r$.
3. Dourčíme r_1.

b) $\alpha = (\, p^{\alpha}, m^{\alpha}), \beta = (\, p^{\beta}, m^{\beta})$

Označme $r = \alpha \cap \beta$.



$\alpha \parallel z$, $\beta \parallel z \Rightarrow r \parallel z$ a r_1 je bod.