3. kurz DG

MONGEOVA PROJEKCIA –
polohové úlohy

J. Beganová, T. Rückschlossová, Ľ. Valášková, M. Vajsáblová, Z. Tereňová: ***Deskriptívna geometria pre stavebné odbory***, STU v Bratislave, 2022, ISBN 978-80-227-5256-5.

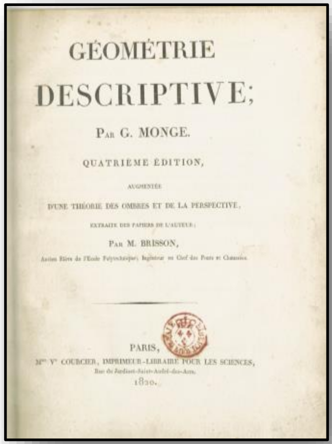
Kap. 10

10.1 Princíp zobrazenia, obraz bodu, tretia priemetňa v Mongeovej projekcii

Mongeova projekcia

Gaspard Monge

(* 10. Máj 1746 ,† 28. Júl 1818)


GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE;

Par G. MONGE.

QUATRIEME ÉDITION,

AUGMENTÉE

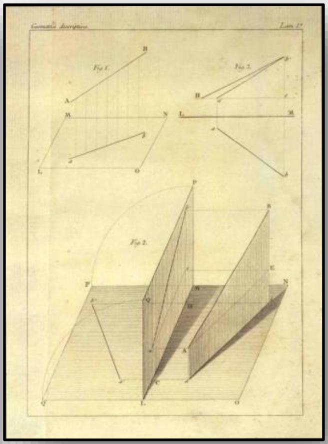
D'UNE THÉORIE DES OMBRES ET DE LA PERSPECTIVE,

EXTRAITE DES PAPIERS DE L'AUTEUR;

Par M. BRISSON,

PARIS,

1820.

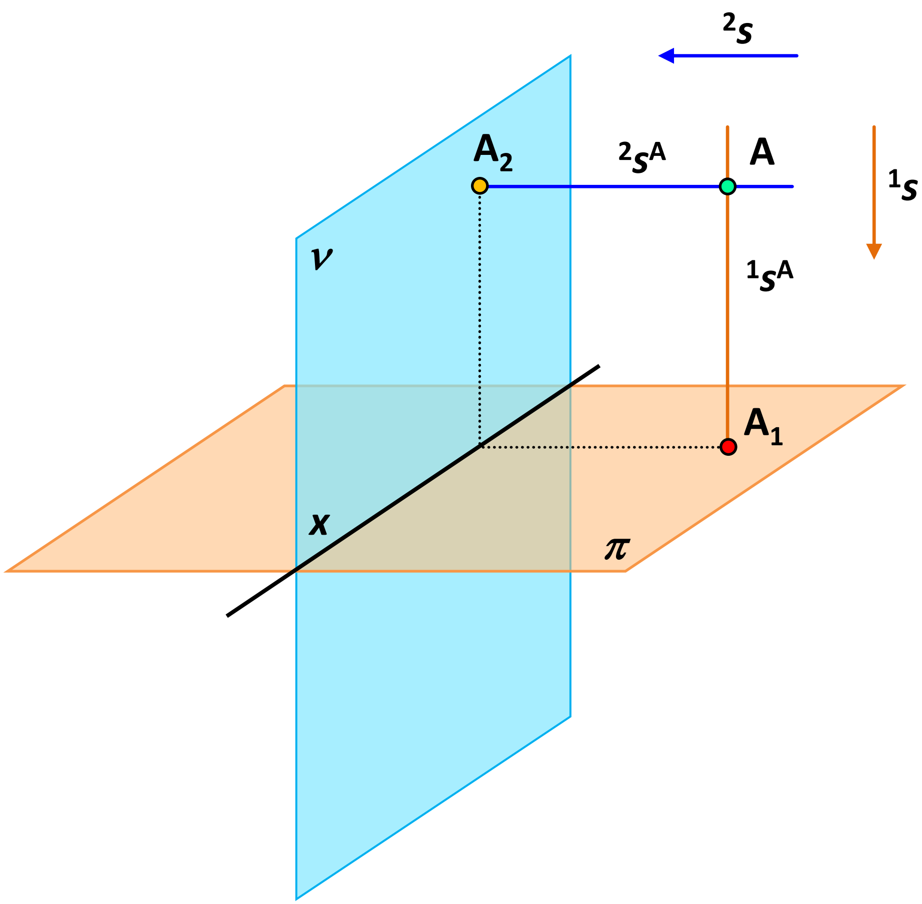


- Zobrazovacia metóda, v ktorej využívame pravouhlé premietanie na dve navzájom kolmé priemetne, sa nazýva **Mongeova projekcia** alebo tiež **Mongeovo premietanie**.
- Novú premietaciu sústavu, kde sú jednotlivé priemety na dve priemetne v združenej polohe, zaviedol **Gaspard Monge**. Bol to francúzsky vedec so širokou škálou záujmov, ktorý je považovaný za zakladateľa deskriptívnej geometrie.
- Je autorom diela *Géometrie descriptive* (1799), kde v prvej časti približuje spôsob úpravy plôch, v druhej dotykové roviny ku zakriveným plochám a normálam, v tretej priesečníky zakrivených plôch a vo štvrtej časti sa venuje iným geometrickým problémom.
- Počas Francúzskej revolúcie pôsobil aj ako politik, od roku 1792 bol ministrom námorníctva, jeho meno sa nachádza medzi 72 menami vedcov na Eiffelovej veži.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Gaspard_Monge
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k96811234.texteImage
https://www.pinterest.fr/pin/114419646770546016/

Základné pojmy a obraz bodu

Uvedieme základné pojmy pre kolmé premietanie na dve navzájom kolmé priemetne.



Priemetne a smery premietania

- π - **pôdorysňa** (1. priemetňa)
- $^1s \perp \pi$ - smer premietania

- ν - **nárysňa** (2. priemetňa)
- $^2s \perp \nu$ - smer premietania

- $\pi \perp \nu$
- $\pi \cap \nu = x$, x - **základnica**

Priemety bodu A

- $^1s^A$ – 1. premietacia priamka bodu **A**,

  $A \in {}^1s^A$, ${}^1s^A \perp \pi$, ${}^1s^A \cap \pi = A_1$,

  A_1 – **pôdorys** bodu **A**

- $^2s^A$ – 2. premietacia priamka bodu **A**,

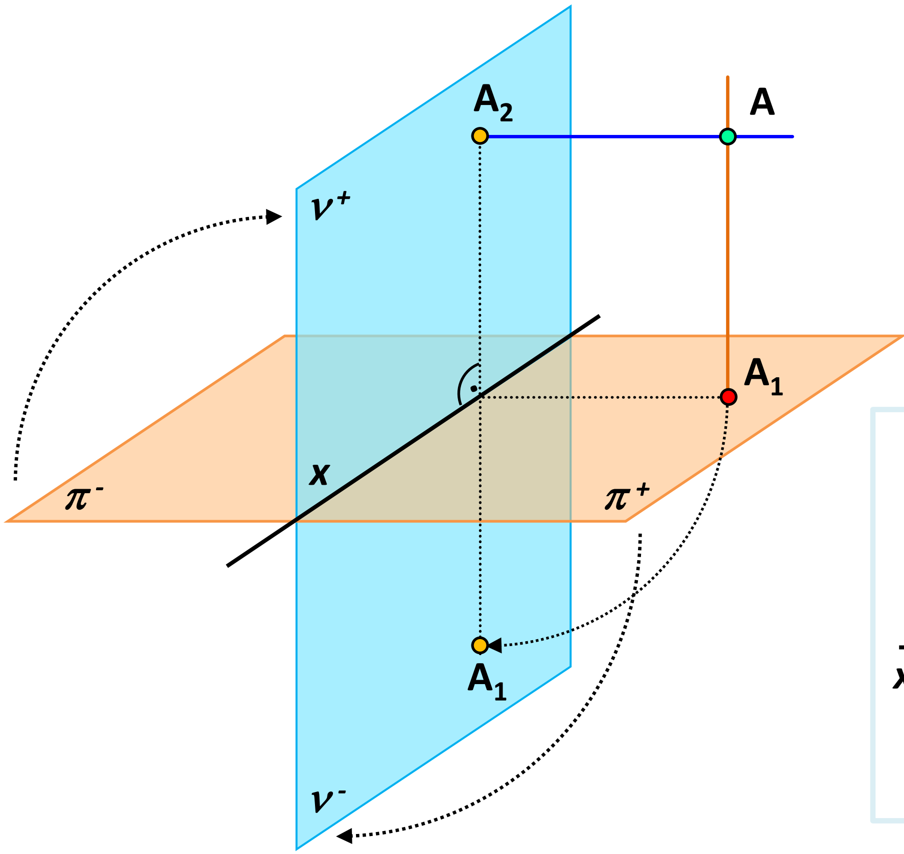
  $A \in {}^2s^A$, ${}^2s^A \perp \nu$, ${}^2s^A \cap \pi = A_2$,

  A_2 – **nárys** bodu **A**

Poznámka: *Bod* A_1 *nazývame aj* ***prvý priemet bodu A***, *podobne ako v kótovanom premietaní, predstavuje pohľad zhora. Bod* A_2 *nazývame aj* ***druhý priemet bodu A***, *zodpovedá pohľadu spredu. V kótovanom premietaní nahrádza zápis kóty.*

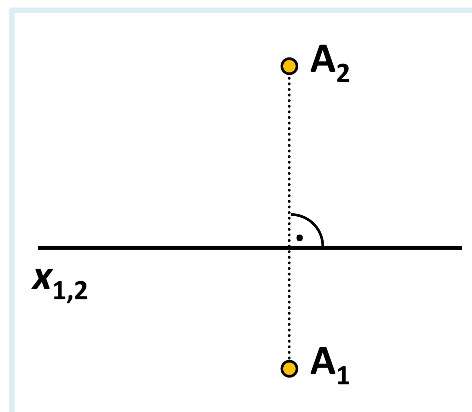
Obraz bodu — združenie priemetní

Aby sme mohli oba priemety bodu zobraziť v jednej rovine (nákresni), otočíme rovinu pôdorysne π do roviny nárysne ν o 90° okolo ich priesečnice, priamky $\boldsymbol{x}$. Pri tomto otočení splynie kladná časť roviny π so zápornou časťou roviny ν a zároveň záporná časť roviny π s kladnou časťou roviny ν.



Takéto zjednotenie pôdorysne a nárysne nazývame **združenie priemetní**.

Po združení priemetní do jednej roviny bude táto rovina umiestnená do nákresne (papier, obrazovka).



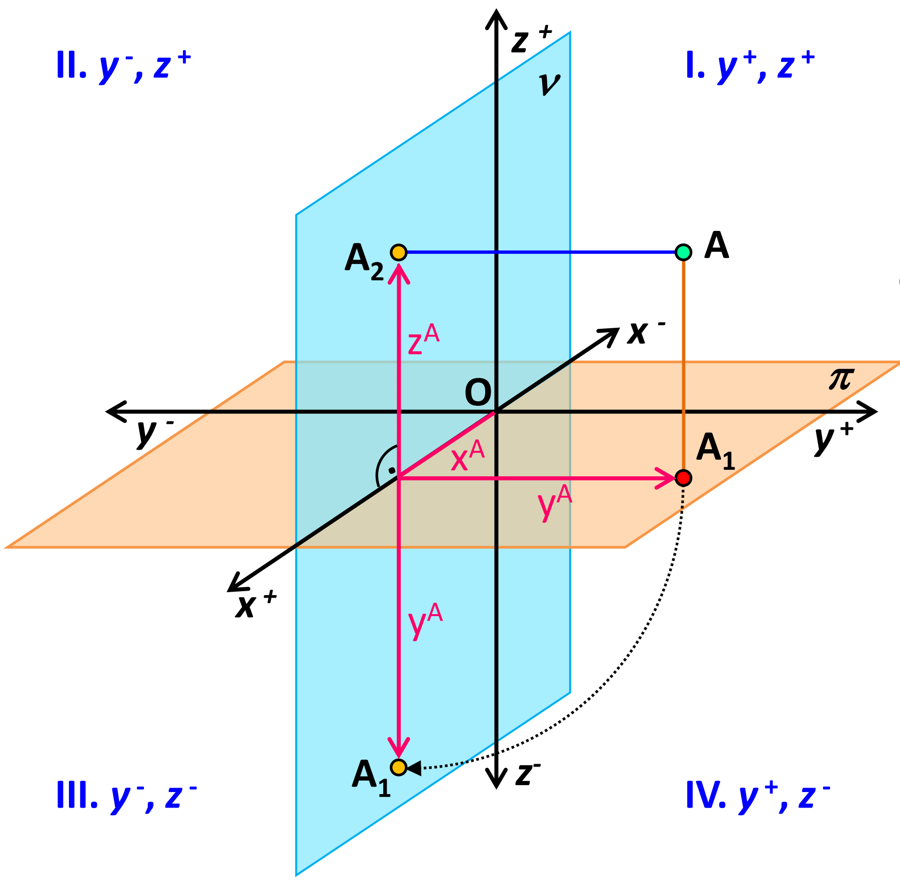
- $\mathbf{A_1A_2}$ – **ordinála** bodu **A**,

  $\mathbf{A_1A_2} \perp \boldsymbol{x}_{1,2}$
- $\mathbf{A_1}$ – **pôdorys** bodu **A**
- $\mathbf{A_2}$ – **nárys** bodu **A**

Definícia: Mongeova projekcia (kolmé premietanie na dve navzájom kolmé priemetne) je zobrazenie $\mathbf{E}^3 \to \{\, \pi,\ \nu \,\}$, $\pi \perp \nu$, ktoré každému bodu $\mathbf{A} \in \mathbf{E}^3$ jednoznačne priradí usporiadanú dvojicu združených priemetov $[\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}]$ tak, že $\mathbf{A_1A_2} \perp \boldsymbol{x}$.

Obraz bodu – súradnicová sústava

Zavedieme súradnicovú sústavu **O**(***x***, ***y***, ***z***). Os ***x*** je totožná so základnicou ($\pi \cap \nu$), os ***y*** leží v pôdorysni a os ***z*** leží v nárysni. V pravotočivej súradnicovej sústave bude kladná poloos ***x*** smerovať doľava, kladná poloos ***y*** dopredu a kladná poloos ***z*** dohora.

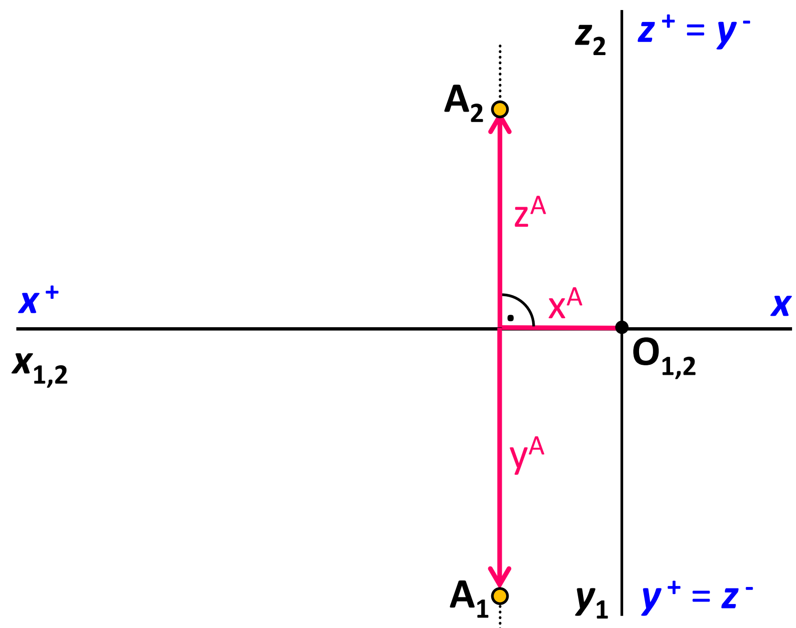


Roviny π a ν rozdeľujú priestor z hľadiska orientácie na štyri kvadranty, označené **I**, **II**, **III** a **IV**.

Zostrojíme priemety bodu **A** $[x^A, y^A, z^A]$, ktorý leží v kvadrante **I**.

Po združení priemetní prenesieme priemety bodu **A** do nákresne nasledovne:

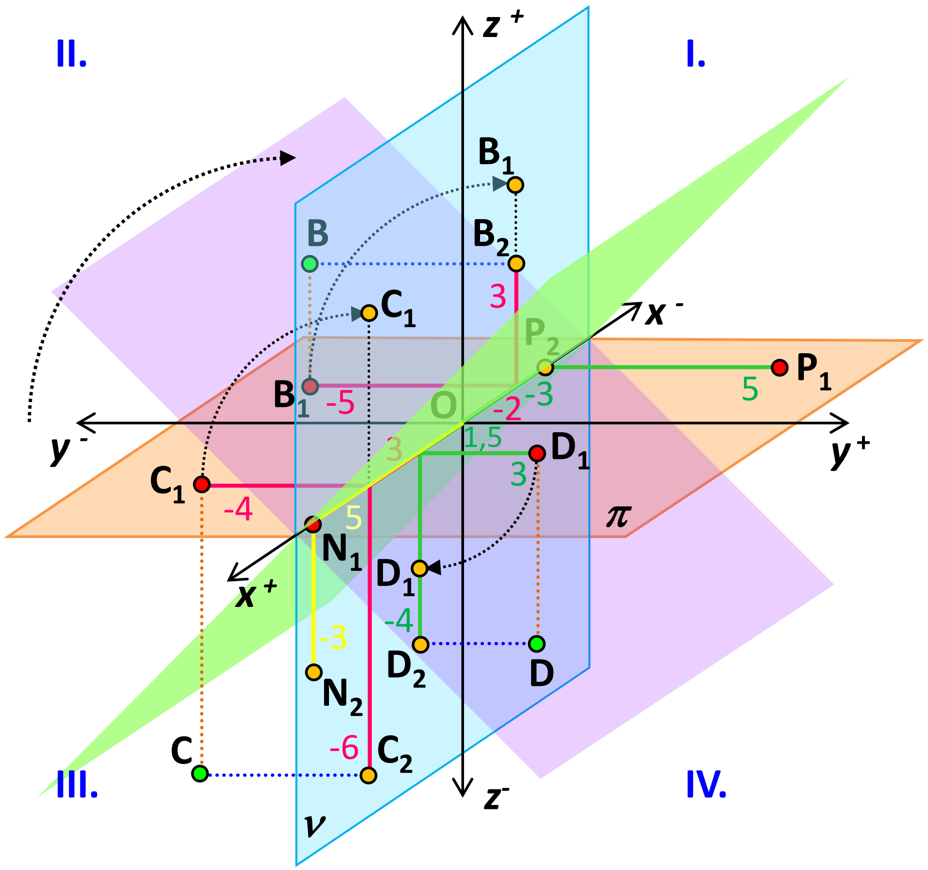
- **A**$[x^A, y^A, z^A] \rightarrow$ $\mathbf{A_1}$ $[x^A, y^A]$, $\mathbf{A_2}$ $[x^A, z^A]$

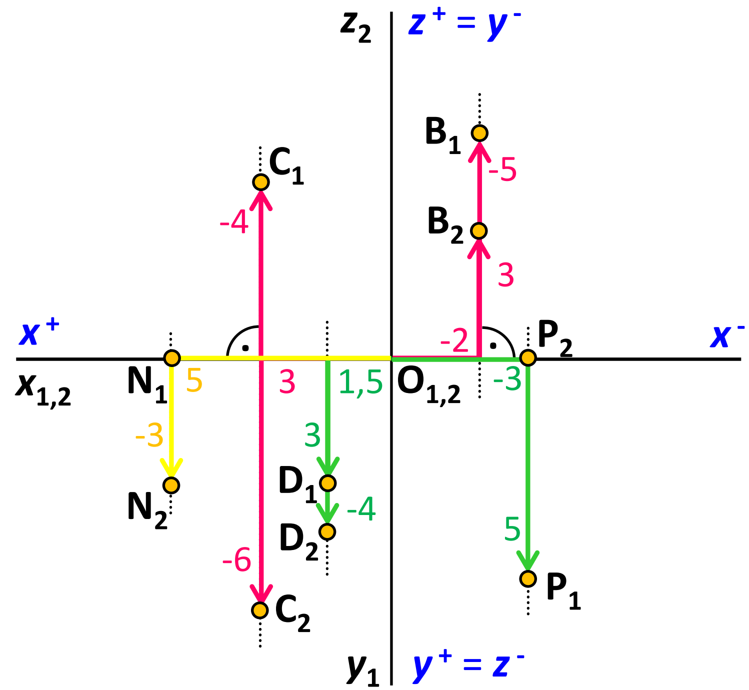


Poznámka: *Dvojica združených priemetov* $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, *ktoré ležia na kolmici na os* ***x****, určuje práve jeden bod* ***A*** *priestoru* $\mathbf{E^3}$.

Obraz bodu – súradnicová sústava

Zostrojíme združené priemety bodov **B**[-2;-5;3], **C**[3;-4;-6], **D**[1,5;3;-4], **P**[-3;5;0], **N**[5;0;-6] a určíme ich polohu v priestore.





*__Poznámka:__ Ak pôdorys a nárys bodu splývajú, bod leží v **rovine totožnosti**, ktorá leží v **II.** a **IV.** kvadrante. Ak sú pôdorys a nárys súmerné podľa osi $x_{1,2}$, bod leží v **rovine súmernosti**, ktorá leží v **I.** a **III.** kvadrante.*

Bod **B** sa nachádza v kvadrante **II.**

Bod **C** sa nachádza v kvadrante **III.**

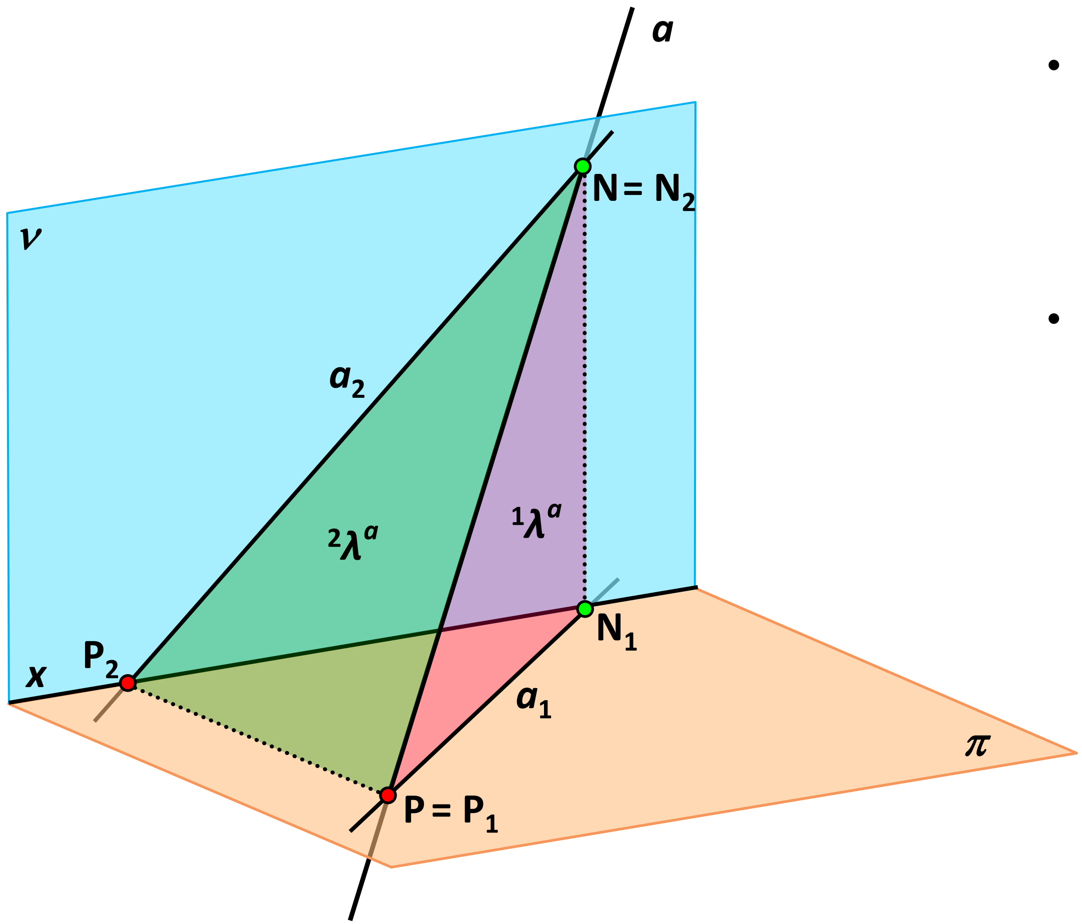
Bod **D** sa nachádza v kvadrante **IV.**

Bod **P** leží v pôdorysni.

Bod **N** leží v nárysni.

Zobrazenie priamky

Priamka ***a*** vo všeobecnej polohe vzhľadom na priemetne sa v Mongeovej projekcii premietne do dvojice priamok (a_1, a_2), ktoré nazývame združené priemety priamky ***a***.



- $^1\lambda^a$ – 1. premietacia rovina priamky ***a***,

  $^1\lambda^a \perp \pi$, $^1\lambda^a \cap \pi = a_1$,

  a_1 – **pôdorys** priamky ***a***

- $^2\lambda^a$ – 2. premietacia rovina priamky ***a***,

  $^2\lambda^a \perp \pi$, $^2\lambda^a \cap \pi = a_2$,

  a_2 – **nárys** priamky ***a***

Priesečník priamky s pôdorysňou sa nazýva **pôdorysný stopník P**.

- $a \cap \pi = P$, $P = P_1$, $P_2 \in x_{1,2}$

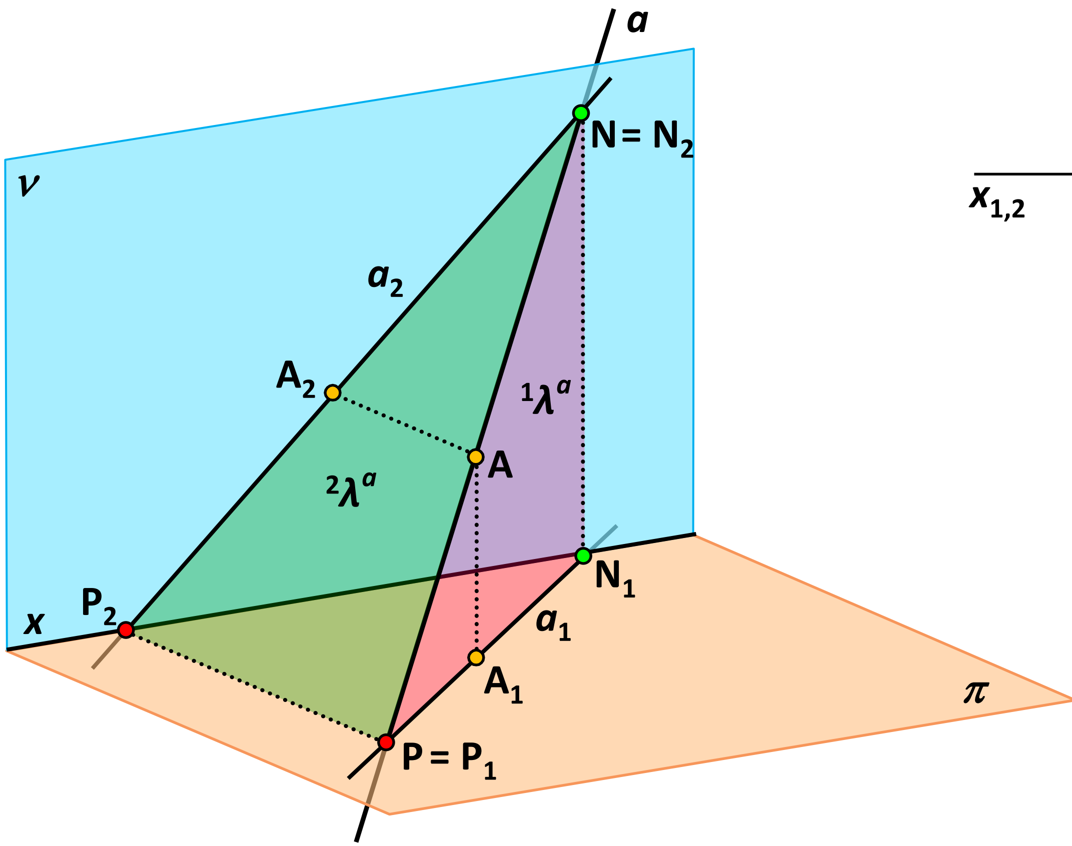
Priesečník priamky s nárysňou sa nazýva **nárysný stopník N**.

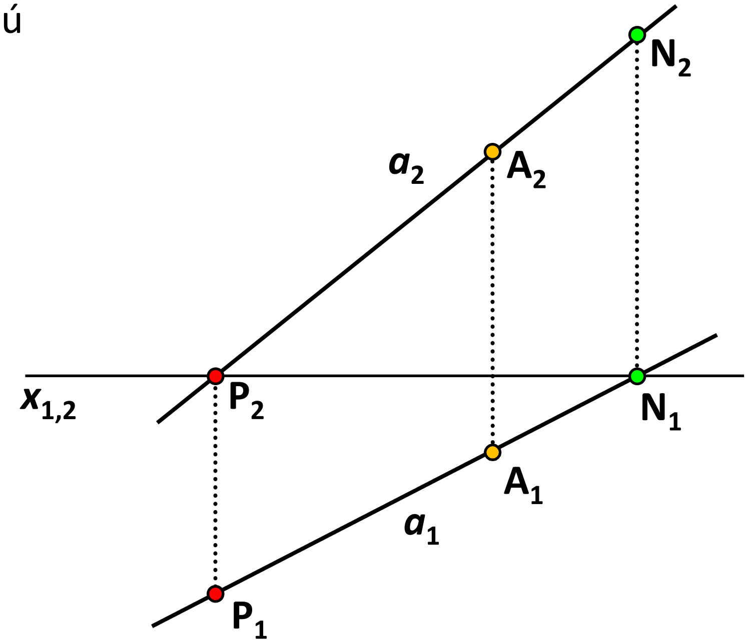
- $a \cap \nu = N$, $N = N_2$, $N_1 \in x_{1,2}$

Poznámka: *Pri práci s viacerými priamkami v jednej úlohe odlišujeme stopníky jednotlivých priamok pomocou označenia, kde horný index pomenúva konkrétnu priamku, napr.* P_1^a *alebo* N_2^b.

Zobrazenie priamky

Príklad 10.3: Určte priemety stopníkov priamky $\boldsymbol{a}$, ak sú dané jej združené priemety (a_1, a_2). Doplňte chýbajúci priemet bodu **A**, ktorý na nej leží. Daný je pôdorys A_1.



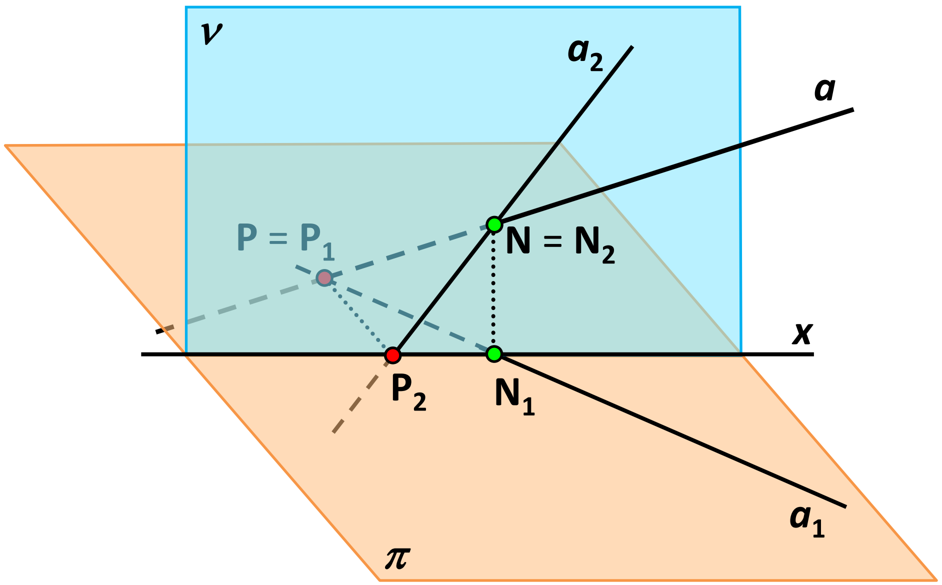


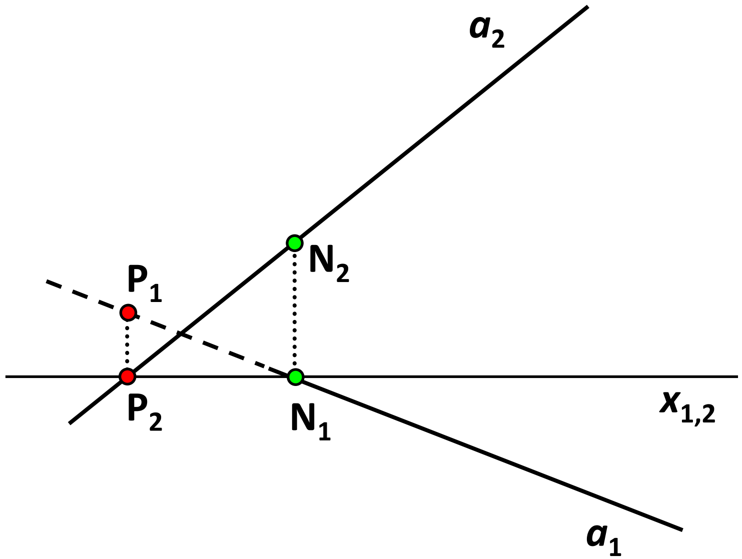
Postup:

1. N_1; $a_1 \cap x_{1,2} = N_1$.
2. N_2; $N_1 \longrightarrow N_2 \in a_2$.
3. P_2; $a_2 \cap x_{1,2} = P_2$.
4. P_1; $P_2 \longrightarrow P_1 \in a_1$.
5. A_2; $A_1 \longrightarrow A_2 \in a_2$.

Poznámka: *Ak bod **A** leží na priamke **a**, tak jeho priemet A_1 inciduje s priemetom a_1 a zároveň priemet A_2 inciduje s priemetom a_2. Vyplýva to z vlastností rovnobežného premietania.*

Príklad 10.4: Dané sú združené priemety priamky $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$). Určte stopníky priamky $\boldsymbol{a}$.





Poznámka: *Pomocou stopníkov **P** a **N** zrekonštruujeme polohu priamky **a** v priestore.*

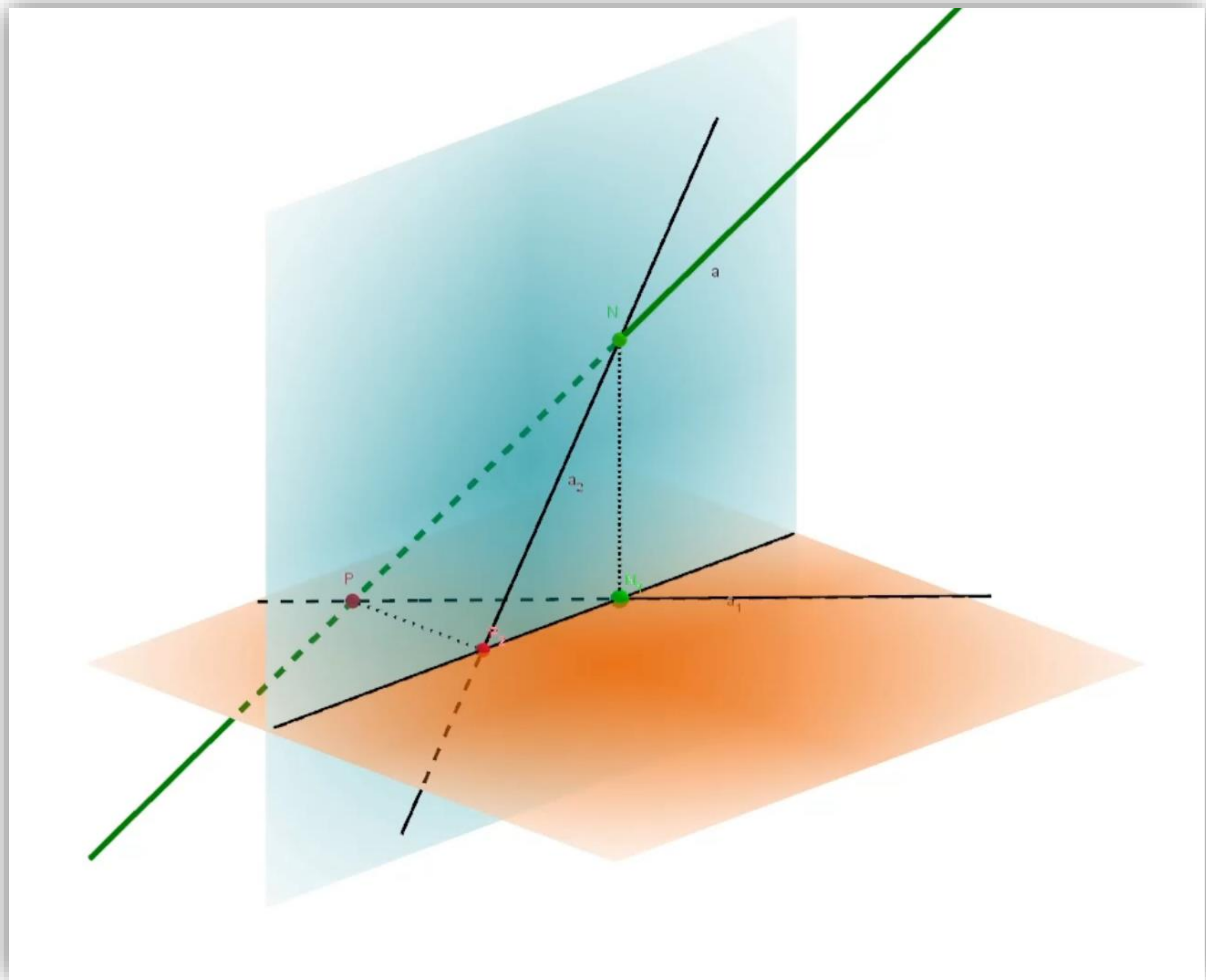
Postup:

1. $\mathbf{N_1}$; $\boldsymbol{a_1} \cap \boldsymbol{x_{1,2}} = \mathbf{N_1}$.
2. $\mathbf{N_2}$; $\mathbf{N_1} \rightarrow \mathbf{N_2} \in \boldsymbol{a_2}$.
3. $\mathbf{P_2}$; $\boldsymbol{a_2} \cap \boldsymbol{x_{1,2}} = \mathbf{P_2}$.

Po predĺžení priamky $\boldsymbol{a_1}$ dourčíme bod $\mathbf{P_1}$:

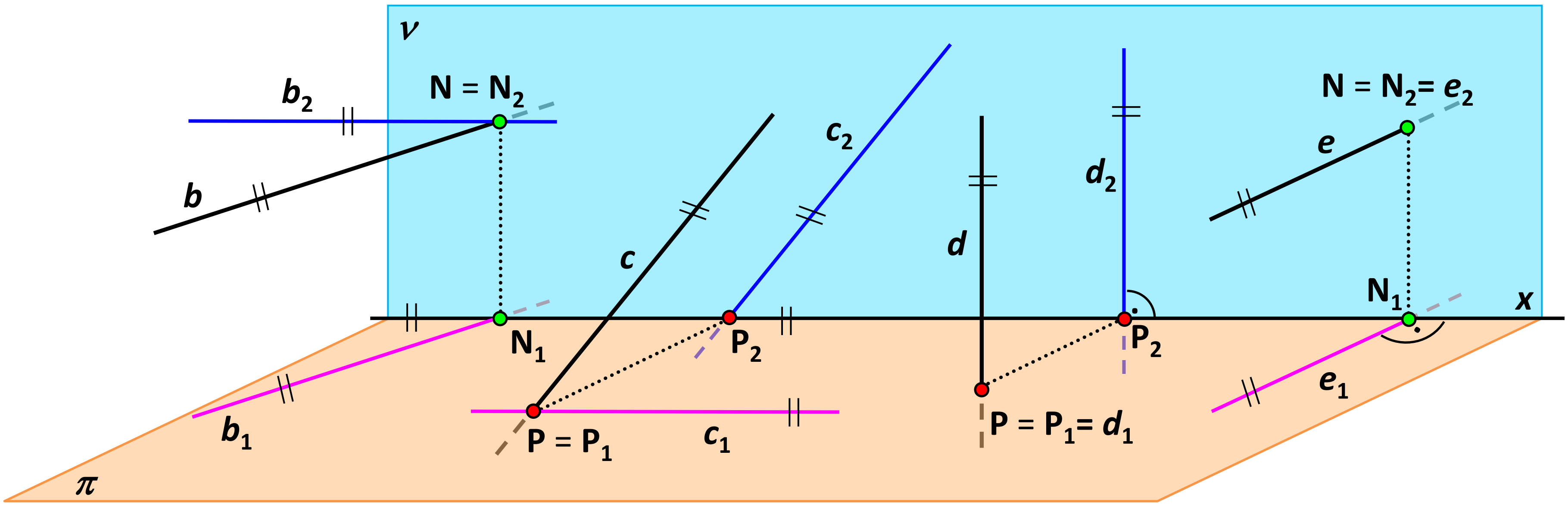
4. $\mathbf{P_1}$; $\mathbf{P_2} \rightarrow \mathbf{P_1} \in \boldsymbol{a_1}$.

Po prejdení myškou na obrázok sa objaví panel na spustenie videa.

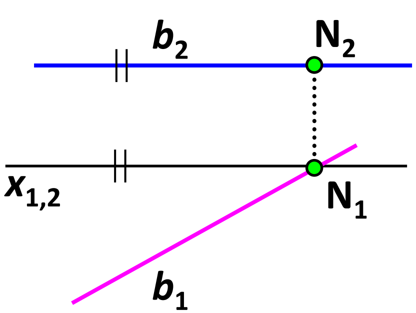


Obraz priamky v špeciálnej polohe

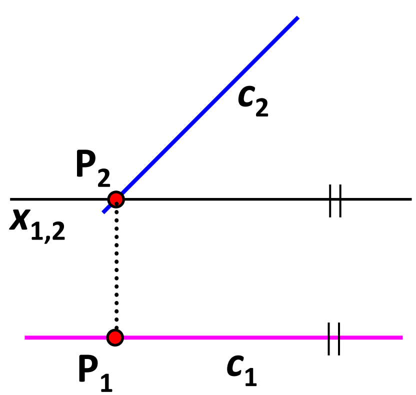
Okrem všeobecnej polohy môže mať priamka v Mongeovej projekcii špeciálnu polohu vzhľadom na pôdorysňu alebo nárysňu. V prípade, že je priamka na priemetňu kolmá, jeden z jej priemetov je bod.



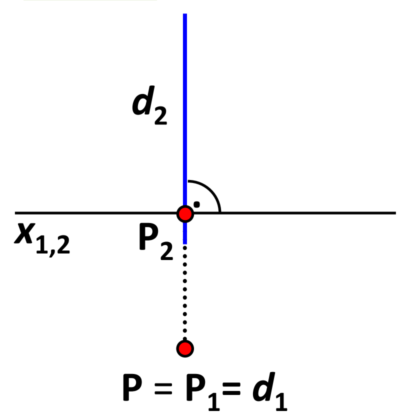
$b \parallel \pi \rightarrow b_2 \parallel x_{1,2}$



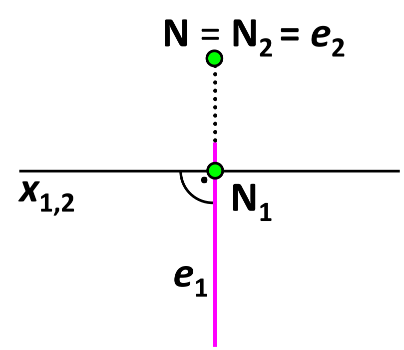
$c \parallel \nu \rightarrow c_1 \parallel x_{1,2}$



$d \perp \pi \rightarrow d_2 \perp x_{1,2}$

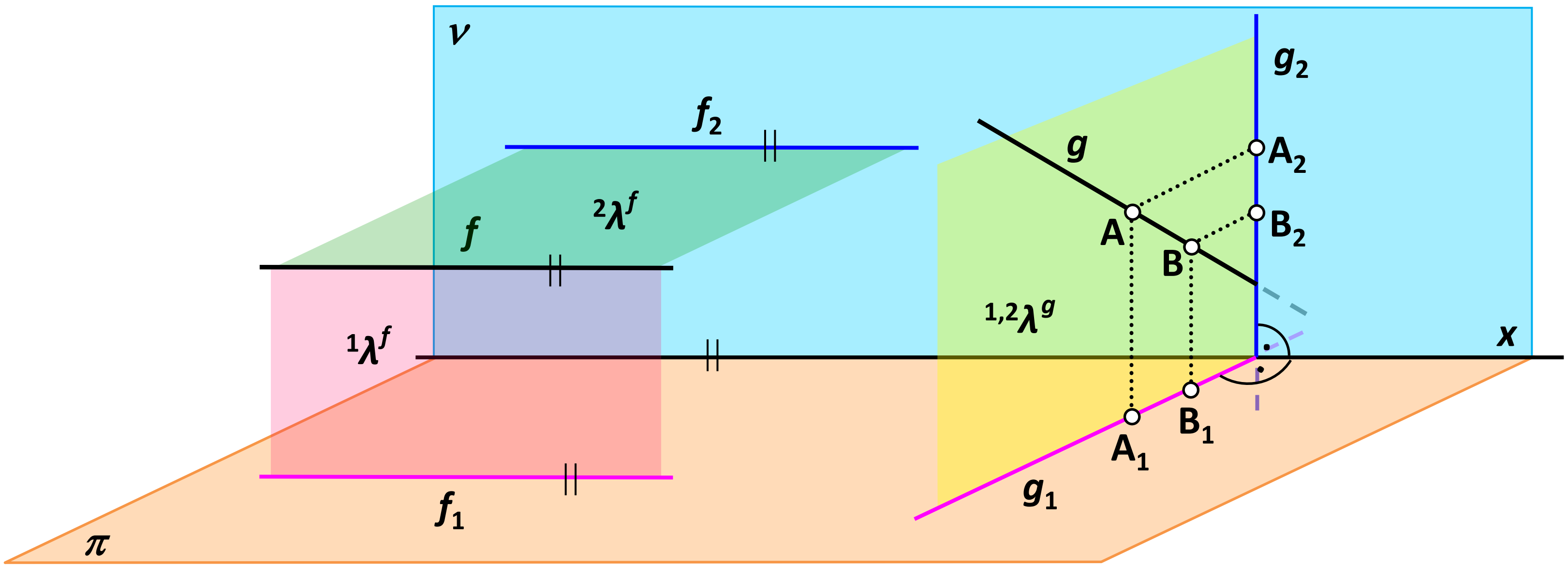


$e \perp \nu \rightarrow e_1 \perp x_{1,2}$



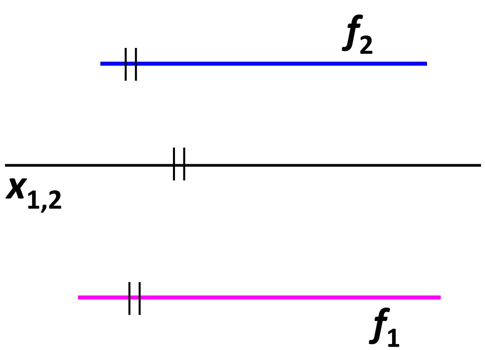
Obraz priamky v špeciálnej polohe

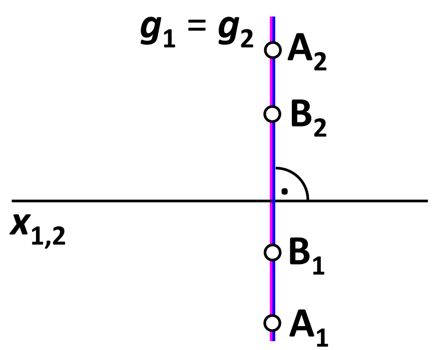
Ďalšie špeciálne polohy má priamka v Mongeovej projekcii vzhľadom na základnicu $\boldsymbol{x}$. Môže byť rovnobežná s $\boldsymbol{x}$ (t.j. leží v rovine rovnobežnej s $\boldsymbol{x}$) alebo je kolmá na $\boldsymbol{x}$ (t.j. leží v rovine kolmej na $\boldsymbol{x}$).



$f \parallel x$ $\rightarrow f_1 \parallel x_{1,2},\ f_2 \parallel x_{1,2}$

$g \perp x$ $\rightarrow g_1 = g_2 \perp x_{1,2}$

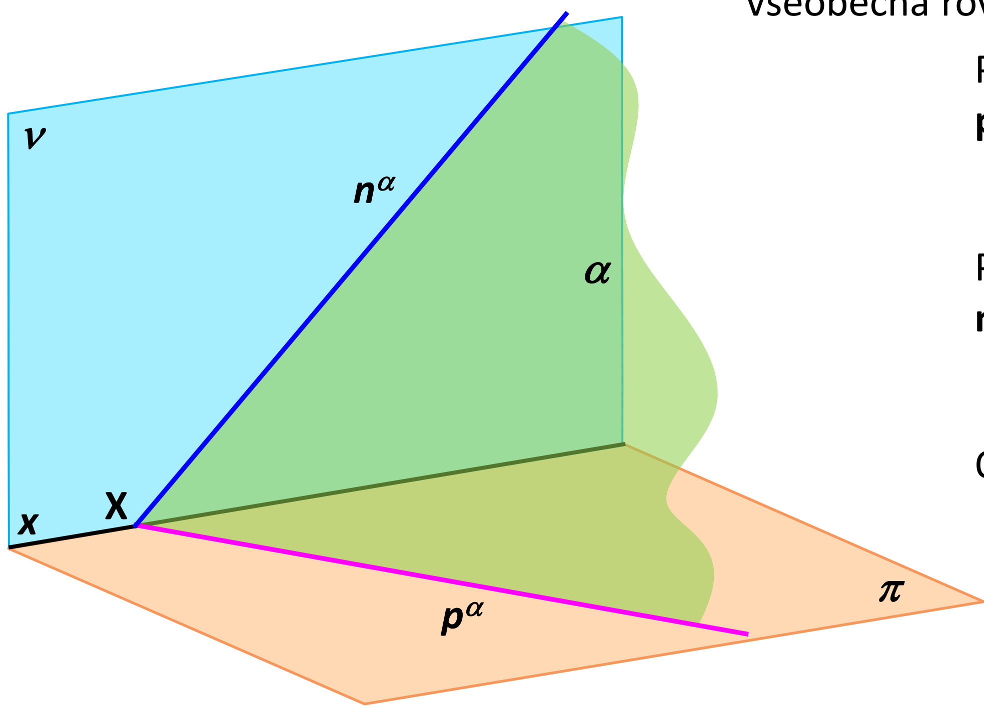




Aby bola priamka kolmá na os $\boldsymbol{x}$ jednoznačte určená, musí byť daná priemetmi ľubovoľných 2 bodov, ktoré s ňou incidujú.

Zobrazenie roviny

Pôdorysom roviny α, ktorá je vo všeobecnej polohe vzhľadom na priemetne (t.j. nie je so žiadnou priemetňou rovnobežná ani na ňu kolmá) je celá pôdorysňa, jej nárysom je celá nárysňa.



Všeobecná rovina α pretína obidve priemetne v tzv. **stopách**.

Priesečnica roviny α s pôdorysňou sa nazýva **pôdorysná stopa** a označuje sa p^α.

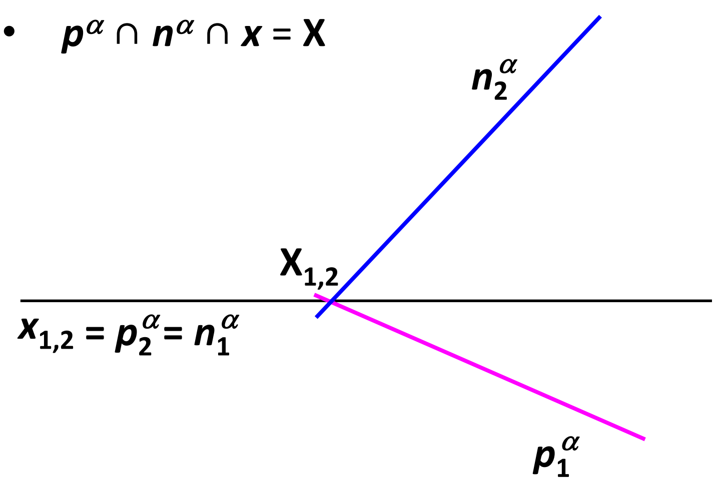
- $\alpha \cap \pi = p^\alpha$, $p^\alpha = p_1^\alpha$, $p_2^\alpha = x_{1,2}$

Priesečnica roviny α s nárysňou sa nazýva **nárysná stopa** a označuje sa n^α.

- $\alpha \cap \nu = n^\alpha$, $n^\alpha = n_2^\alpha$, $n_1^\alpha = x_{1,2}$

Obidve stopy sa pretínajú v bode na základnici x.

- $p^\alpha \cap n^\alpha \cap x = X$



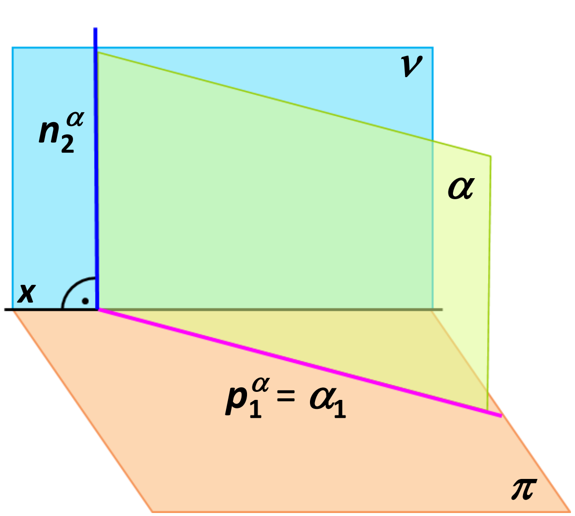
Rovina je určená:

- trojicou nekolineárnych bodov,
- priamkou a bodom, ktorý na nej neleží,
- dvojicou rôznobežných priamok,
- dvojicou rovnobežných priamok.

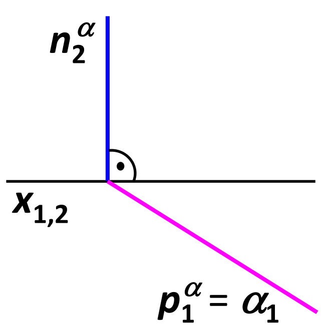
Poznámka: *Ak to konštrukcia nevyžaduje, zobrazujeme iba „viditeľné časti“ stôp.*

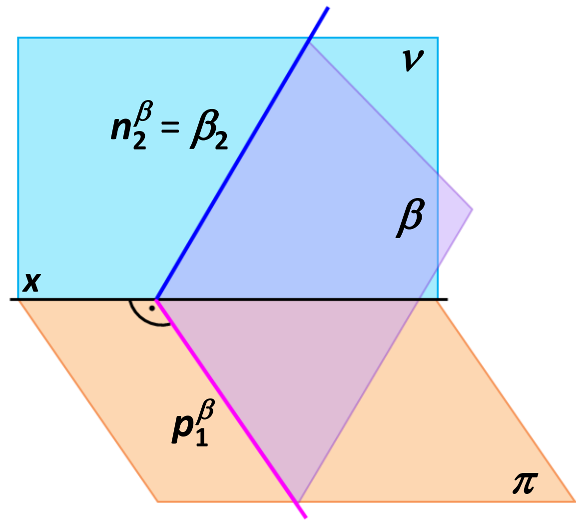
Obraz roviny v špeciálnej polohe

Okrem všeobecnej polohy môže mať rovina vzhľadom na priemetne špeciálnu polohu. Je to napríklad rovina kolmá na jednu priemetňu (premietacia rovina), prípadne na obe priemetne.

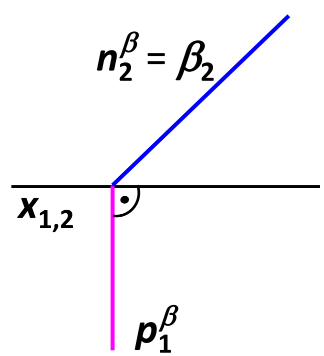


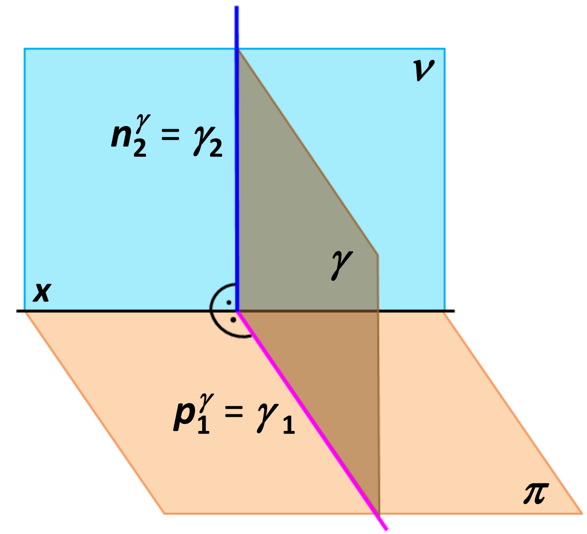
$\alpha \perp \pi \rightarrow p_1^\alpha = \alpha_1,\ n_2^\alpha \perp x_{1,2}$





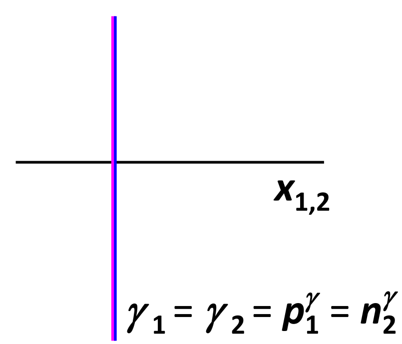
$\beta \perp \nu \rightarrow p_1^\beta \perp x_{1,2},\ n_2^\beta = \beta_2$





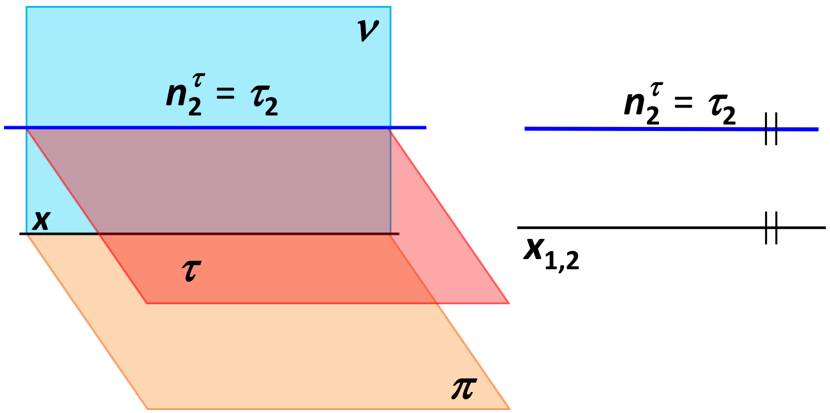
$\gamma \perp x \rightarrow p_1^\gamma = \gamma_1 \perp x_{1,2},$

$\rightarrow n_2^\gamma = \gamma_2 \perp x_{1,2}$

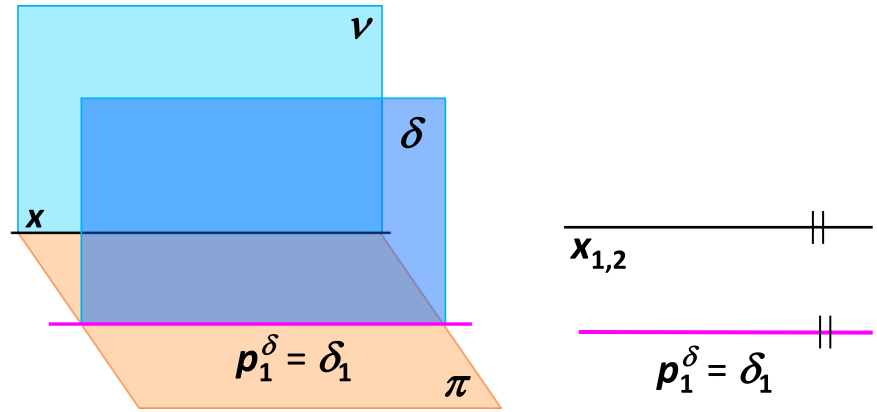


Obraz roviny v špeciálnej polohe

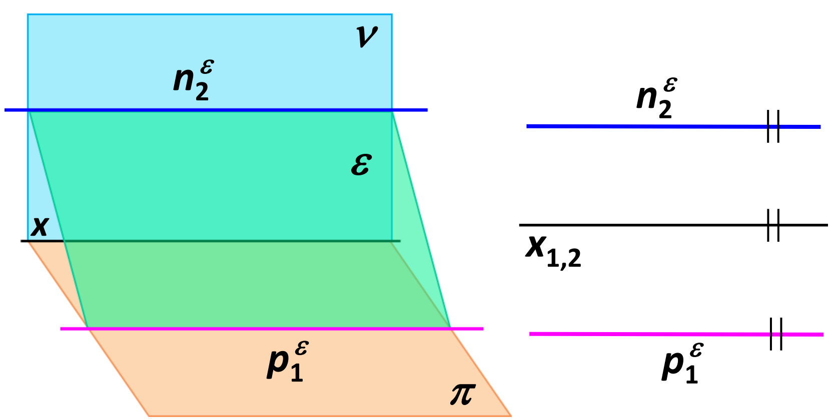
Ako ďalšie špeciálne polohy roviny uvádzame prípady, keď je rovina rovnobežná s niektorou z priemetní (hlavná rovina) a rovina rovnobežná s osou ***x*** alebo rovina, ktorá osou ***x*** prechádza.



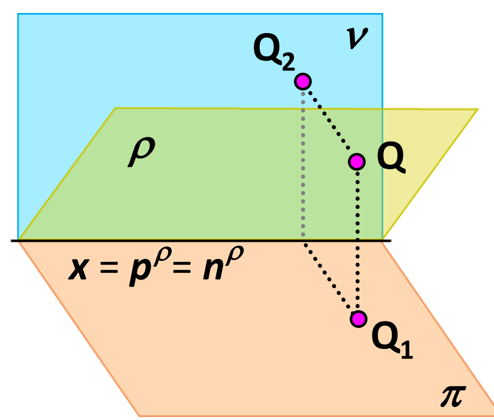
$\tau \parallel \pi \rightarrow n_2^\tau = \tau_2 \parallel x_{1,2}$

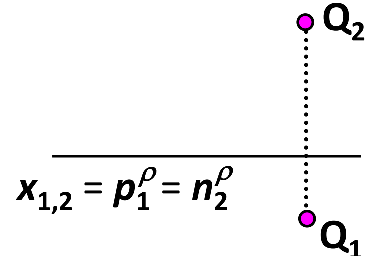


$\delta \parallel \nu \rightarrow p_1^\delta = \delta_1 \parallel x_{1,2}$



$\varepsilon \parallel x_{1,2} \rightarrow p_1^\varepsilon \parallel n_2^\varepsilon \parallel x_{1,2}$





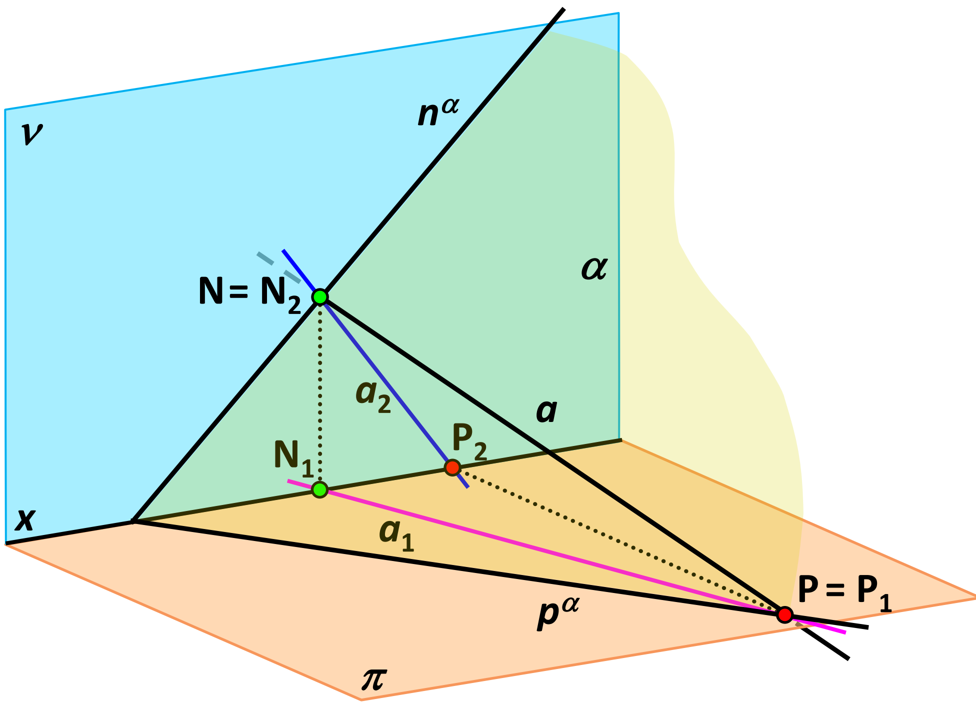
$x_{1,2} \in \rho \rightarrow x_{1,2} = p_1^\rho = n_2^\rho$

Aby bola rovina incidujúca s osou ***x*** jednoznačne určená, musí byť dourčená priemetmi bodu alebo priamky, ktoré v nej ležia.

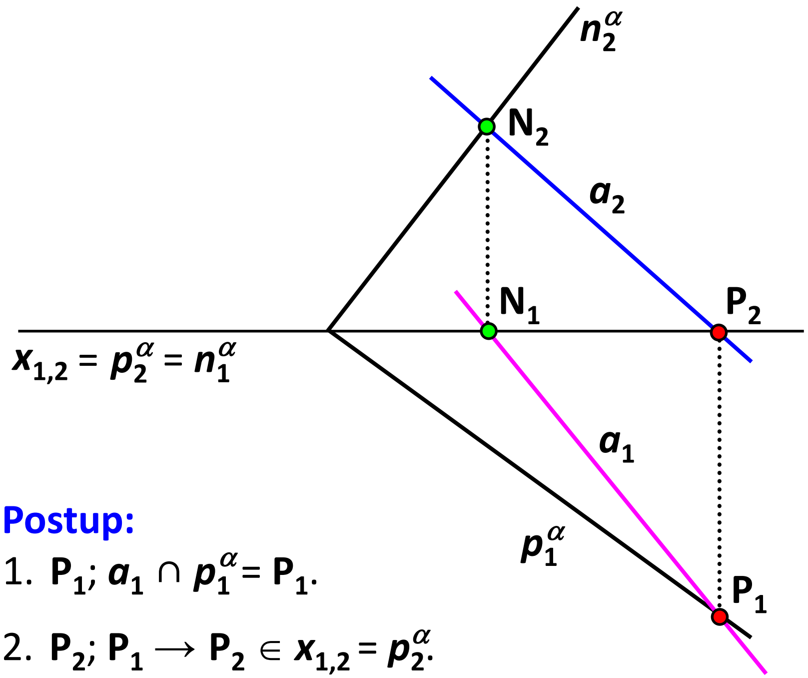
Priamka ležiaca v rovine

Priamka $\boldsymbol{a}$, ktorá leží v rovine α, má svoje stopníky (ak existujú) na stopách roviny, t.j. pôdorysný stopník priamky leží na pôdorysnej stope roviny a nárysný stopník leží na nárysnej stope roviny.

- $a \in \alpha \rightarrow \mathbf{P}^a \in p^\alpha, \mathbf{N}^a \in n^\alpha$



Príklad 10.5: Daný je pôdorys a_1 priamky $\boldsymbol{a}$. Určte nárys a_2 priamky $\boldsymbol{a}$ tak, aby priamka ležala v rovine $\alpha\,(p_1^\alpha, n_2^\alpha)$.



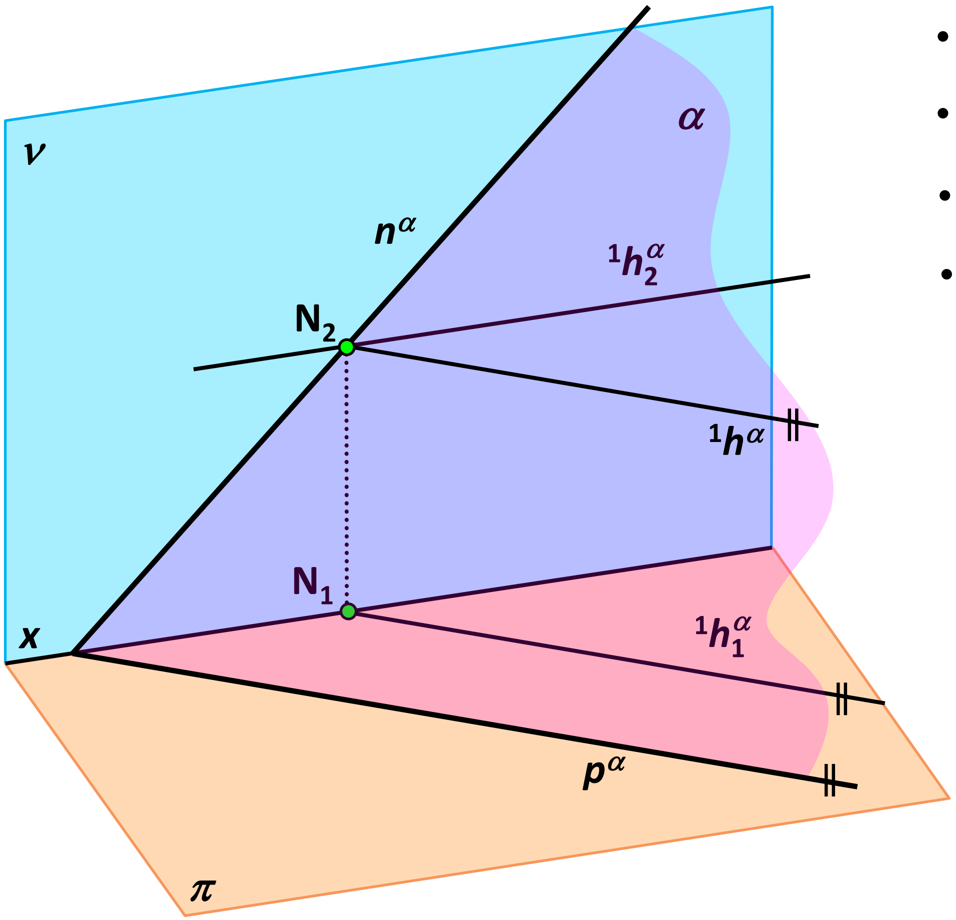
Postup:

1. $\mathbf{P}_1$; $a_1 \cap p_1^\alpha = \mathbf{P}_1$.
2. $\mathbf{P}_2$; $\mathbf{P}_1 \rightarrow \mathbf{P}_2 \in x_{1,2} = p_2^\alpha$.
3. $\mathbf{N}_1$; $x_{1,2} = n_1^\alpha$, $a_1 \cap x_{1,2} = \mathbf{N}_1$.
4. $\mathbf{N}_2$; $\mathbf{N}_1 \rightarrow \mathbf{N}_2 \in n_2^\alpha$.
5. a_2; $a_2 = \mathbf{N}_2\mathbf{P}_2$.

Poznámka: *V prípade, že rovina je určená ľubovoľnými priamkami alebo bodmi, ktoré v nej ležia, pri hľadaní jej stôp využijeme stopníky priamok ležiacich v rovine.*

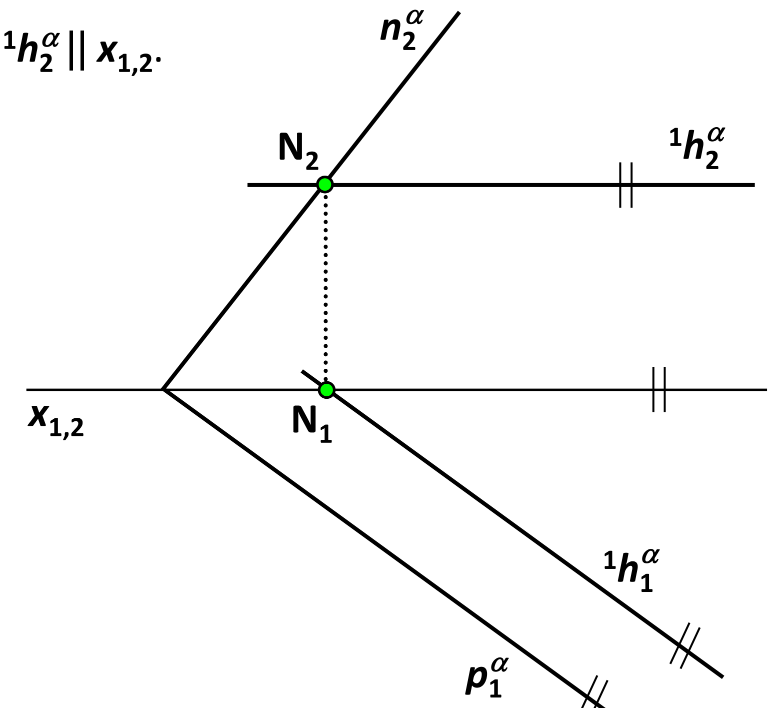
Hlavné a spádové priamky 1. osnovy

Významné priamky v rovine sú jej **hlavné** a **spádové priamky**. Hlavné priamky sú priamky, ktoré ležia v rovine a sú rovnobežné s priemetňou (a teda aj so stopou roviny). Spádové priamky sú priamky roviny, ktoré sú kolmé na hlavné priamky. V Mongeovej projekcii má rovina dve osnovy hlavných a dve osnovy spádových priamok.

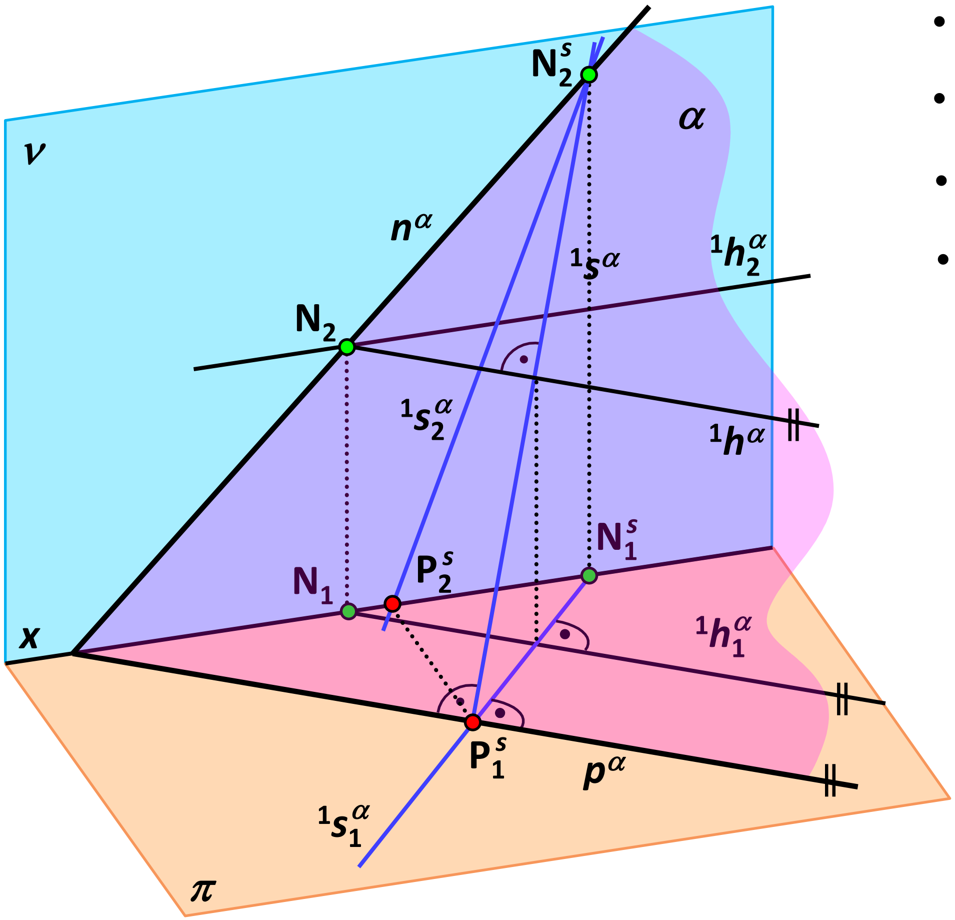


Hlavná priamka 1. osnovy

- $^1h^\alpha$ - hlavná priamka 1. osnovy roviny α,
- $^1h^\alpha \parallel \pi$, $^1h^\alpha \parallel p^\alpha$,
- $^1h_1^\alpha \parallel p_1^\alpha$,
- $^1h_2^\alpha \parallel x_{1,2}$.

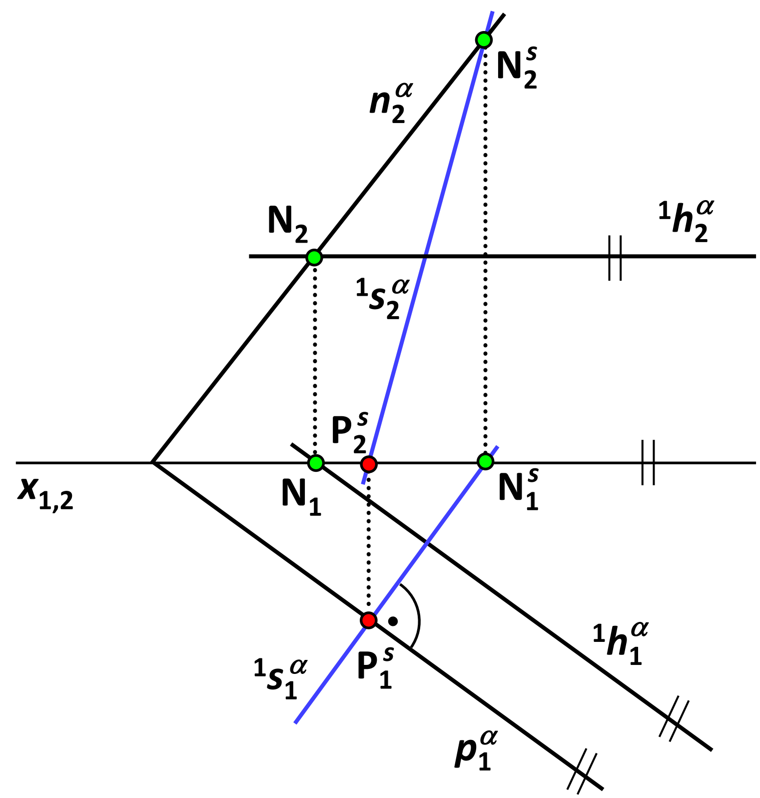


Hlavné a spádové priamky 1. osnovy



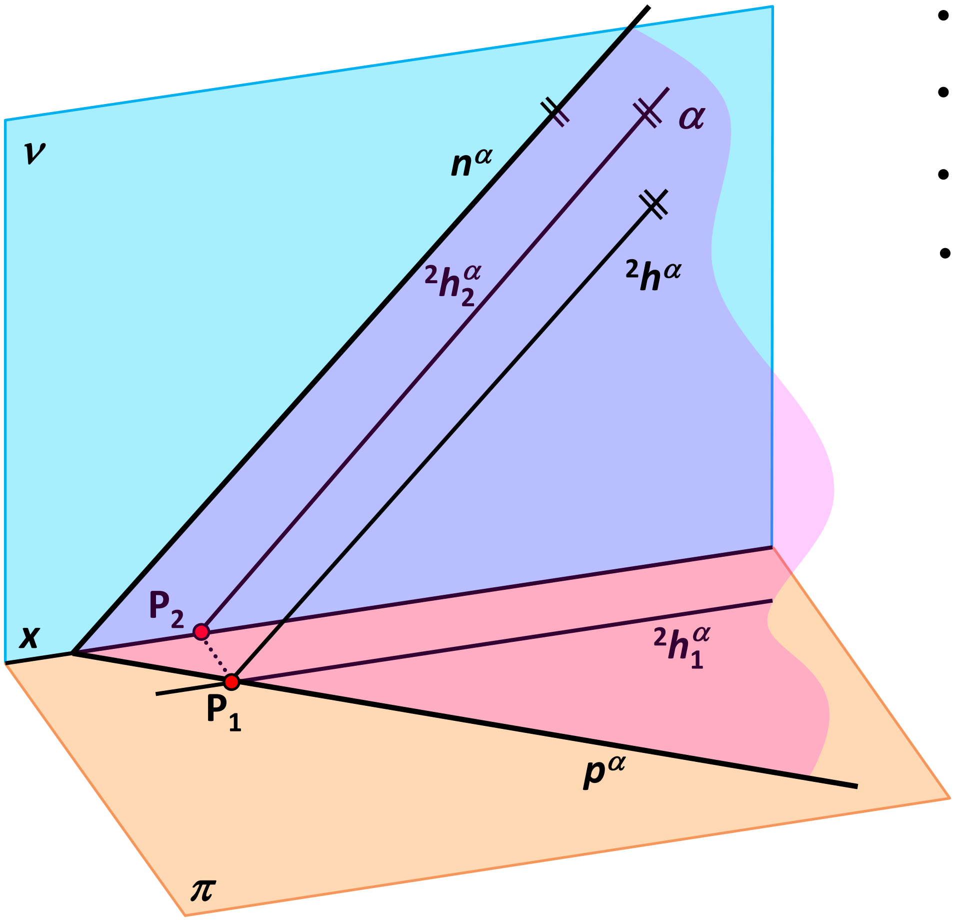
Spádová priamka 1. osnovy

- $^1s^\alpha$ - spádová priamka 1. osnovy roviny α,
- $^1s^\alpha \perp {}^1h^\alpha \rightarrow {}^1s^\alpha \perp p^\alpha$,
- $^1s_1^\alpha \perp p_1^\alpha$, $^1s_1^\alpha \perp {}^1h_1^\alpha$,
- $^2s_2^\alpha$ dourčíme ako priamku v rovine α.



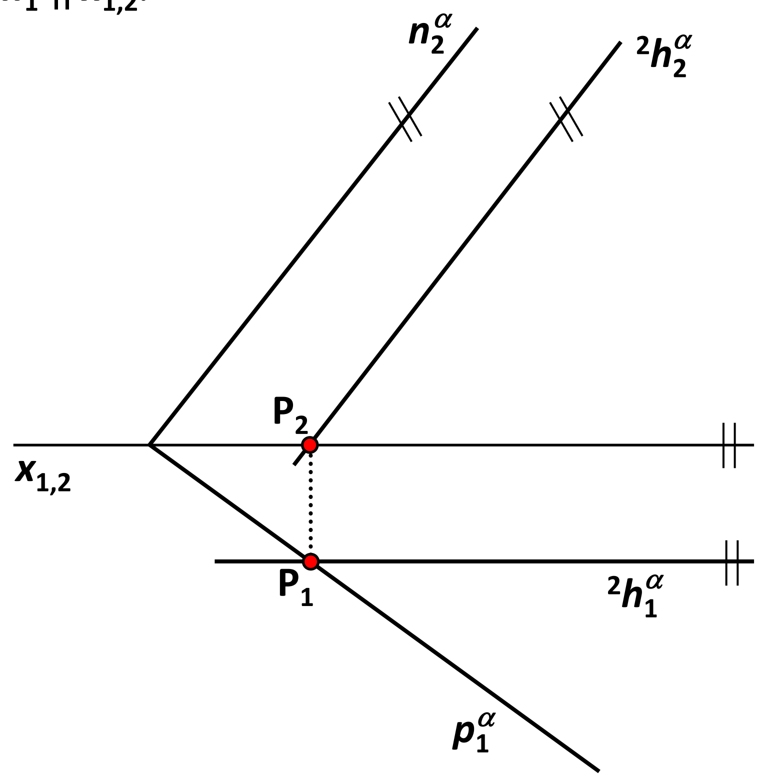
Poznámka: *Každým bodom roviny prechádza práve jedna z každej osnovy hlavných a spádových priamok.*

Hlavné a spádové priamky 2. osnovy

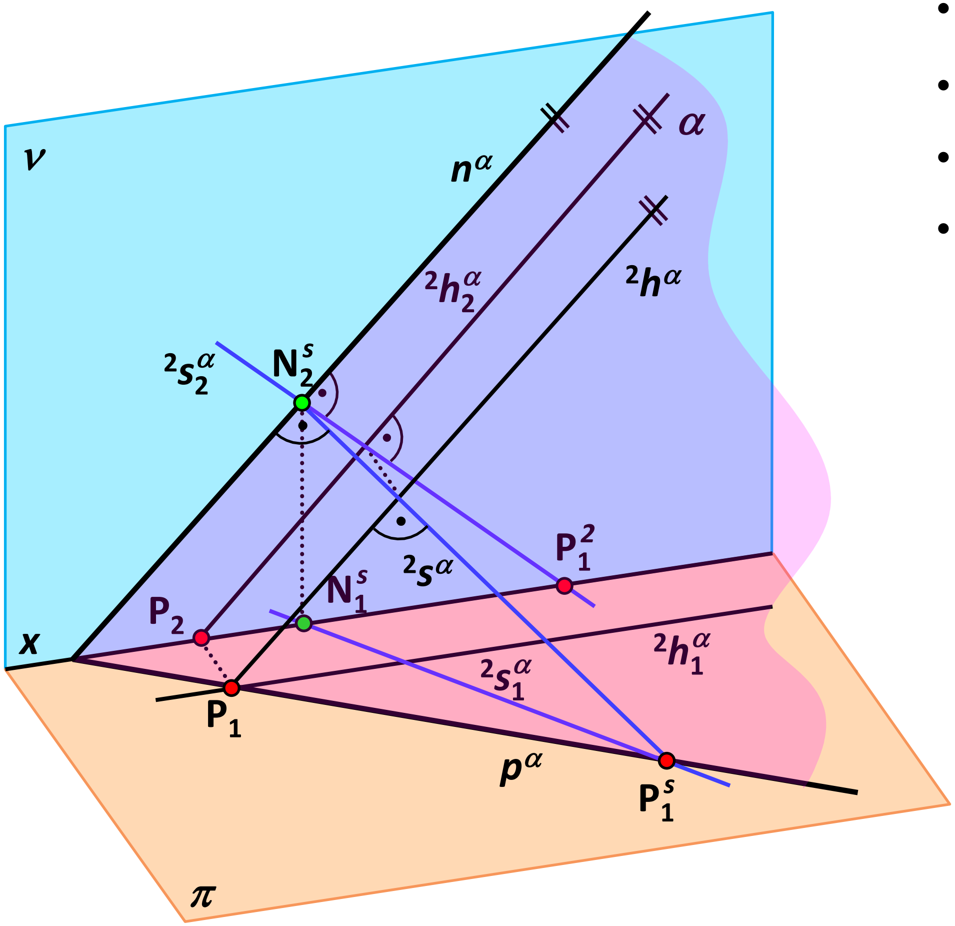


Hlavná priamka 2. osnovy

- $^2h^{\alpha}$ - hlavná priamka 2. osnovy roviny α,
- $^2h^{\alpha} \parallel \nu$, $^2h^{\alpha} \parallel n^{\alpha}$,
- $^2h_2^{\alpha} \parallel n_2^{\alpha}$,
- $^2h_1^{\alpha} \parallel x_{1,2}$.

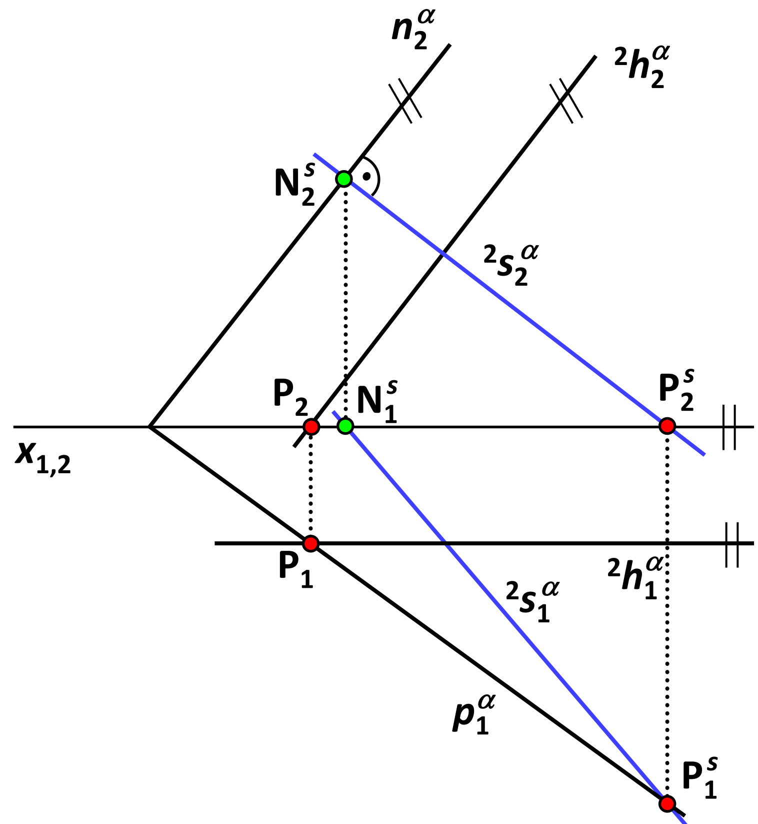


Hlavné a spádové priamky 2. osnovy



Spádová priamka 2. osnovy

- $^2s^{\alpha}$ - spádová priamka 2. osnovy roviny α,
- $^2s^{\alpha} \perp {}^2h^{\alpha} \rightarrow {}^2s^{\alpha} \perp n^{\alpha}$,
- $^2s_2^{\alpha} \perp n_2^{\alpha}$, $^2s_2^{\alpha} \perp {}^2h_2^{\alpha}$,
- $^2s_1{}^{\alpha}$ dourčíme ako priamku v rovine α.

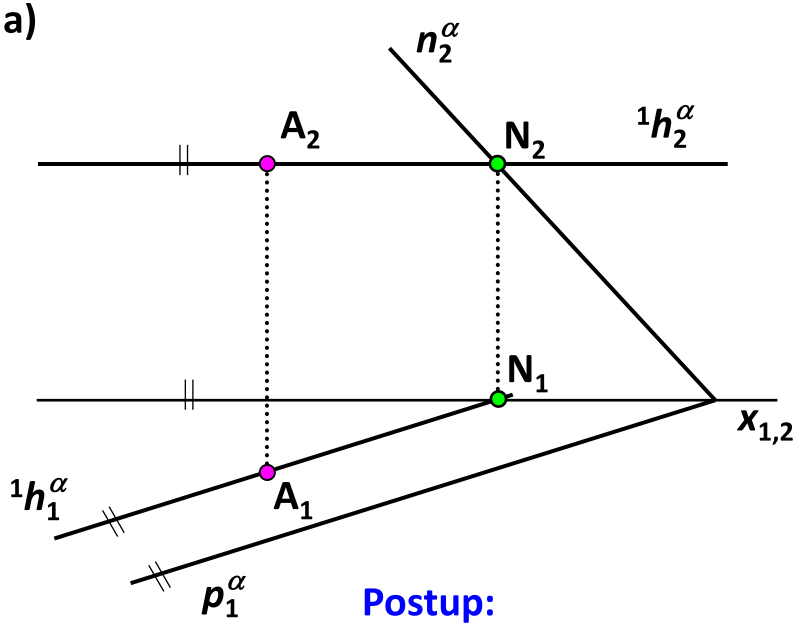


Bod ležiaci v rovine

Hlavné priamky v rovine sa často používajú na určenie chýbajúcich priemetov bodov ležiacich v rovine. Okrem hlavných priamok však na tento účel môžeme použiť ľubovoľnú priamku roviny s dostupnými stopníkmi.

Príklad 10.6: Daný je pôdorys $\mathbf{A_1}$ bodu **A**. Určte nárys $\mathbf{A_2}$ bodu **A** tak, aby bod **A** ležal v rovine $\alpha\,(p_1^\alpha, n_2^\alpha)$.

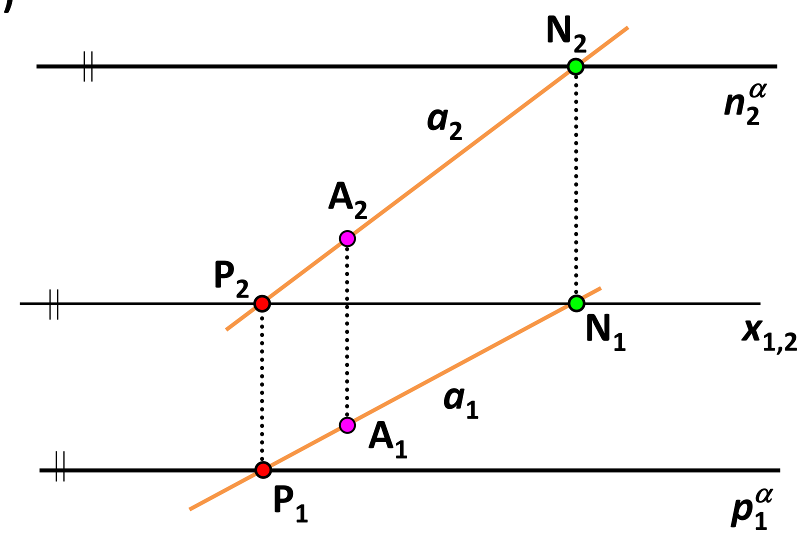
a)



Postup:

1. $^1h_1^\alpha$; $A_1 \in {}^1h_1^\alpha$, $^1h_1^\alpha \parallel p_1^\alpha$.
2. N_1; $^1h_1^\alpha \cap x_{1,2} = N_1$.
3. N_2; $N_1 \rightarrow N_2 \in n_2^\alpha$.
4. $^1h_2^\alpha$; $N_2 \in {}^1h_2^\alpha$, $^1h_2^\alpha \parallel x_{1,2}$.
5. A_2; $A_1 \rightarrow A_2 \in {}^1h_2^\alpha$.

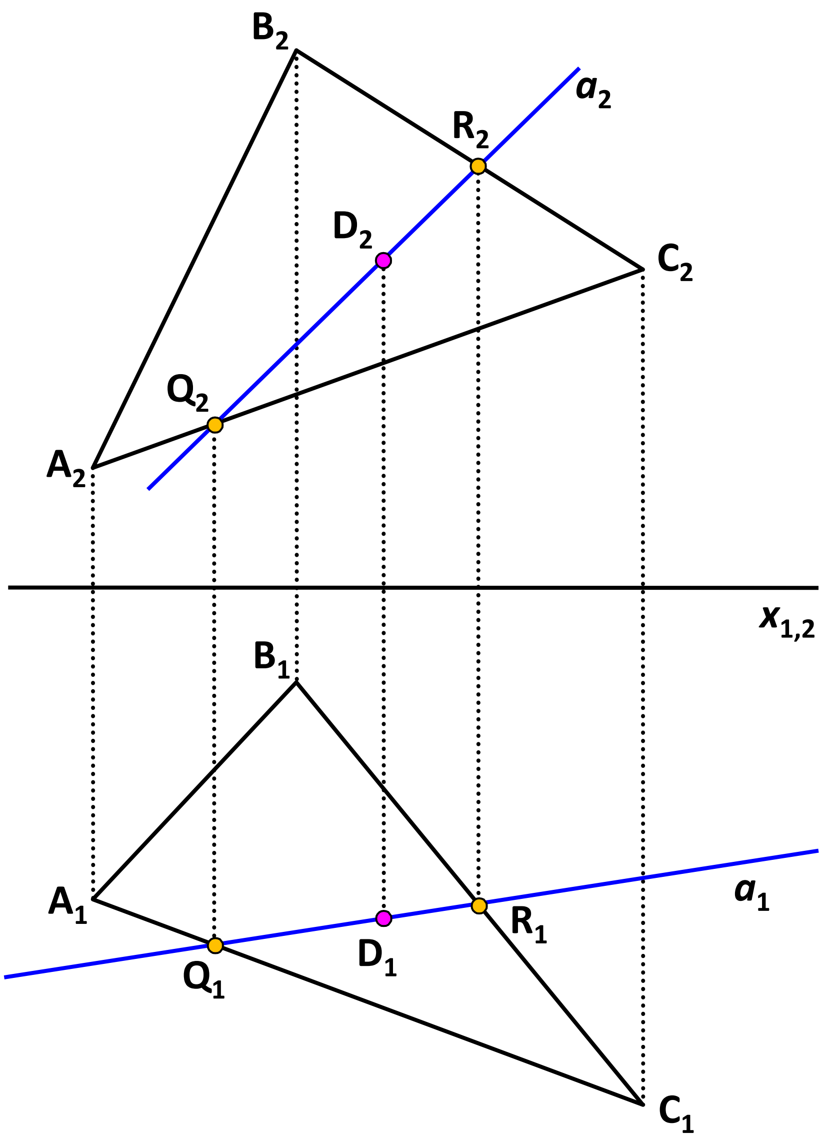
b)



Postup:

1. a_1; $A_1 \in a_1$, $a_1 \nparallel x_{1,2}$.
2. P_1, N_1; $a_1 \cap p_1^\alpha = P_1$, $a_1 \cap x_{1,2} = N_1$.
3. P_2, N_2; $P_1 \rightarrow P_2 \in x_{1,2}$, $N_1 \rightarrow N_2 \in n_2^\alpha$.
4. a_2; $a_2 = N_2P_2$.
5. A_2; $A_1 \rightarrow A_2 \in a_2$.

Príklad 10.7: Daný je pôdorys $\mathbf{D_1}$ bodu **D**. Určte nárys $\mathbf{D_2}$ bodu **D** tak, aby bod **D** ležal v rovine α. Rovina α je určená bodmi $\mathbf{A(A_1,A_2)}$, $\mathbf{B(B_1,B_2)}$, $\mathbf{C(C_1,C_2)}$.



Zostrojíme priemety ľubovoľnej priamky ***a*** roviny α, ktorá prechádza bodom **D**. Využijeme pritom spoločné body priamky ***a*** so stranami trojuholníka ABC.

Postup:

1. a_1; $\mathbf{D_1} \in a_1$, a_1 - ľubovoľná.
2. $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{R_1}$; $a_1 \cap \mathbf{A_1C_1} = \mathbf{Q_1}$,
   $a_1 \cap \mathbf{A_1B_1} = \mathbf{R_1}$.
3. $\mathbf{Q_2}$, $\mathbf{R_2}$; $\mathbf{Q_1} \rightarrow \mathbf{Q_2} \in \mathbf{A_2C_2}$,
   $\mathbf{R_1} \rightarrow \mathbf{R_2} \in \mathbf{B_2C_2}$.
4. a_2; $a_2 = \mathbf{Q_2R_2}$.
5. $\mathbf{D_2}$; $\mathbf{D_1} \rightarrow \mathbf{D_2} \in a_2$.