

Rozvinuteľné priamkové plochy

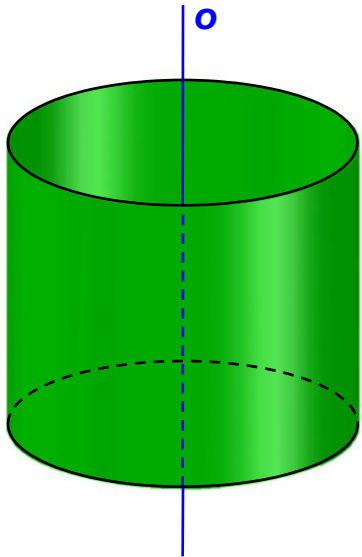
Priamková plocha je **rozvinuteľná**, ak na nej ležia iba torzálne priamky.

Rozvinuteľné priamkové plochy rozdeľujeme na:

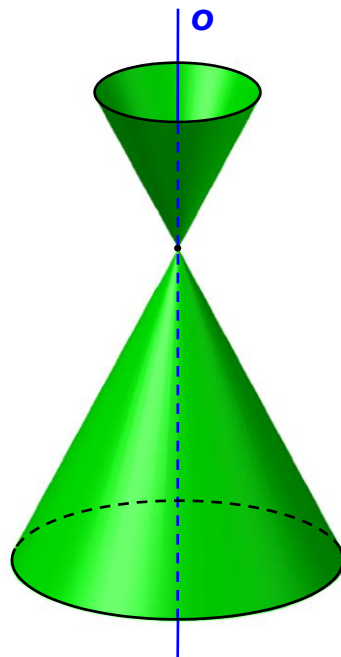
- rovinu,
- valcové plochy,
- kužeľové plochy,
- plochy dotyčníc priestorovej čiary.

Poznámka: Hranolové a ihlanové plochy sú zložené z častí rovín a sú rozvinuteľné po častiach.

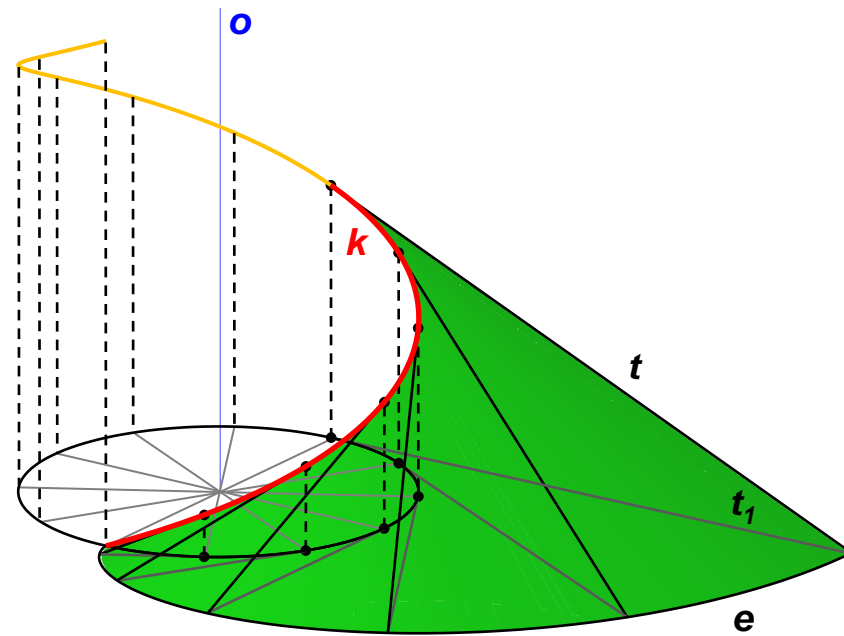
Príklady rozvinuteľných plôch:



Rotačná valcová plocha



Rotačná kužeľová plocha



Plocha dotyčníc skrutkovice k

Hranolová plocha

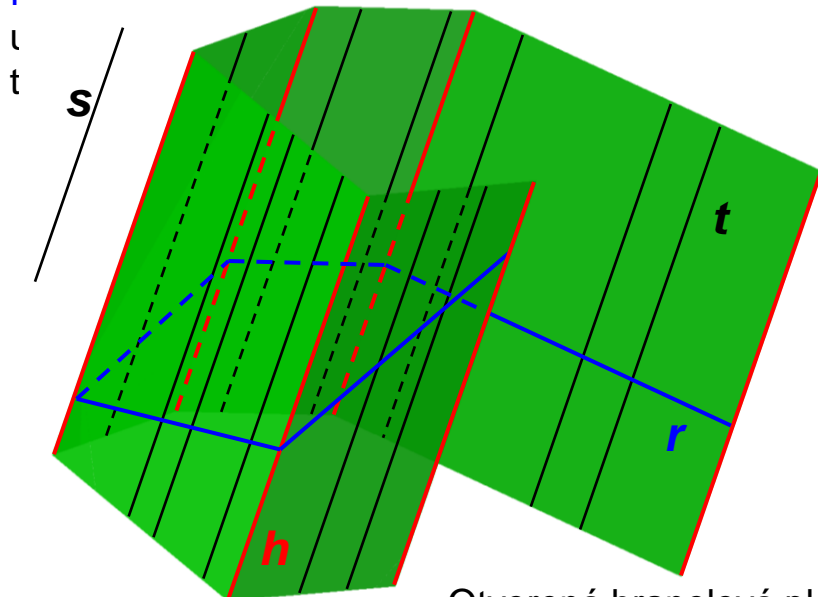
Nech r je lomená čiara (vytvorená z úsečiek) a s je priamka, ktorá nie je rovnobežná so žiadnou úsečkou lomenej čiary r ani so žiadnou rovinou, v ktorej ležia dve úsečky lomenej čiary r .

Hranolová plocha je množina všetkých priamok, ktoré sú rovnobežné s priamkou s a pretínajú lomenú čiaru r .

Lomená čiara r sa nazýva **riadiaca (určujúca) čiara** hranolovej plochy.

Priamka t hranolovej plochy sa nazýva **tvoriaca priamka** ($t \parallel s$, t pretína riadiacu čiaru r).

Poznámka: Riadiaca lomená čiara r hranolovej plochy môže byť rovinná alebo priestorová, otvorená alebo uzavretá. Hranolová plocha je **uzavretá**. Ak je riadiaca čiara r otvorená,



Otvorená hranolová plocha

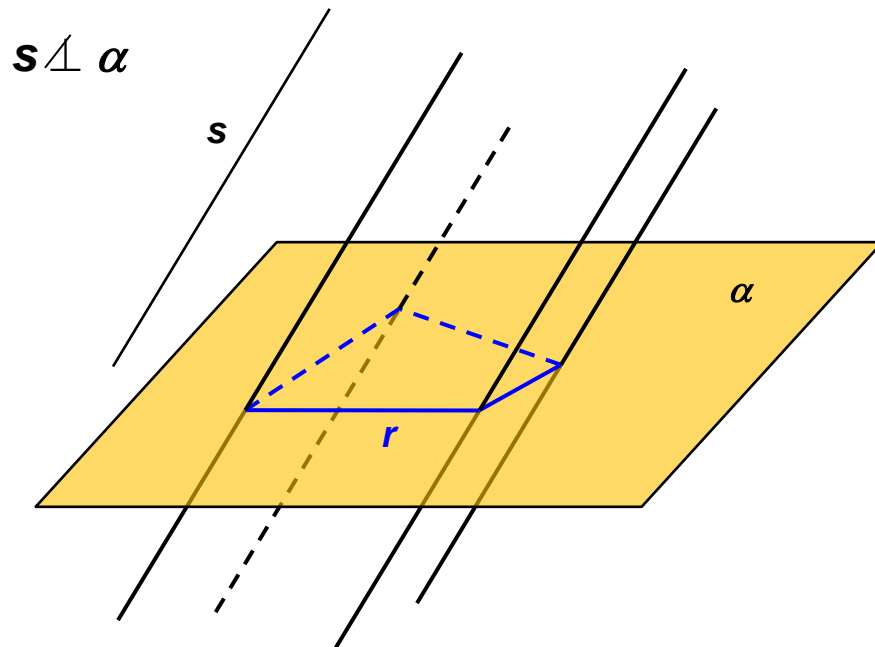
Hrana h je tvoriaca priamka, ktorá prechádza vrcholom riadiacej lomenej čiary r .

Stena je množina všetkých tvoriacich priamok plochy, ktoré pretínajú jednu úsečku riadiacej lomenej čiary r , t. j. stena je rovinný pás ohraničený dvoma susednými hranami plochy.

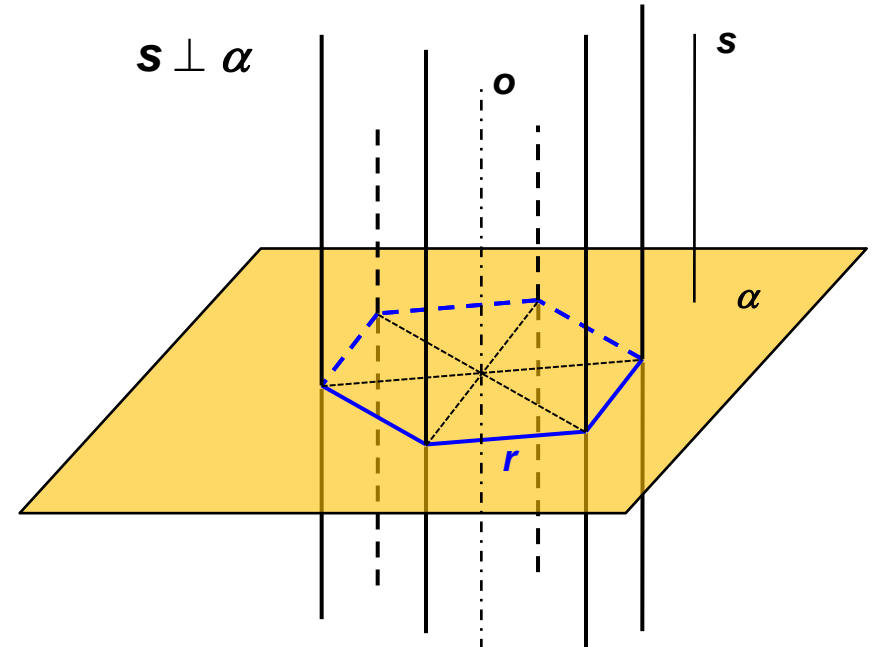
Hranolová plocha sa nazýva **kolmá**, ak jej riadiaca čiara r leží v rovine α , ktorá je kolmá na priamku s .

Hranolová plocha sa nazýva **šikmá**, ak jej riadiaca čiara r leží v rovine, ktorá nie je kolmá na priamku s .

Kolmá hranolová plocha sa nazýva **pravidelná**, ak jej riadiaca čiara r je pravidelný n -uholník. Priamka prechádzajúca stredom pravidelného n -uholníka a rovnobežná s tvoriacimi priamkami sa nazýva **os hranolovej plochy**.



Uzavretá šikmá hranolová plocha



Pravidelná 6-boká hranolová plocha

Poznámka: S pojmom hranolová plocha súvisia aj pojmy hranolový priestor a hranol:

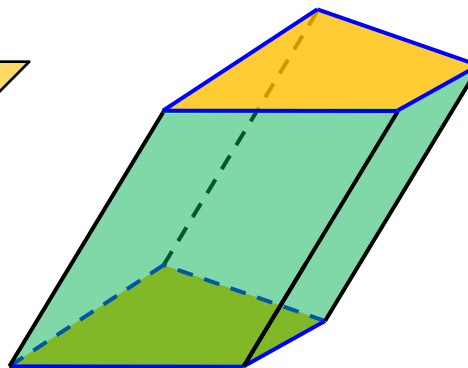
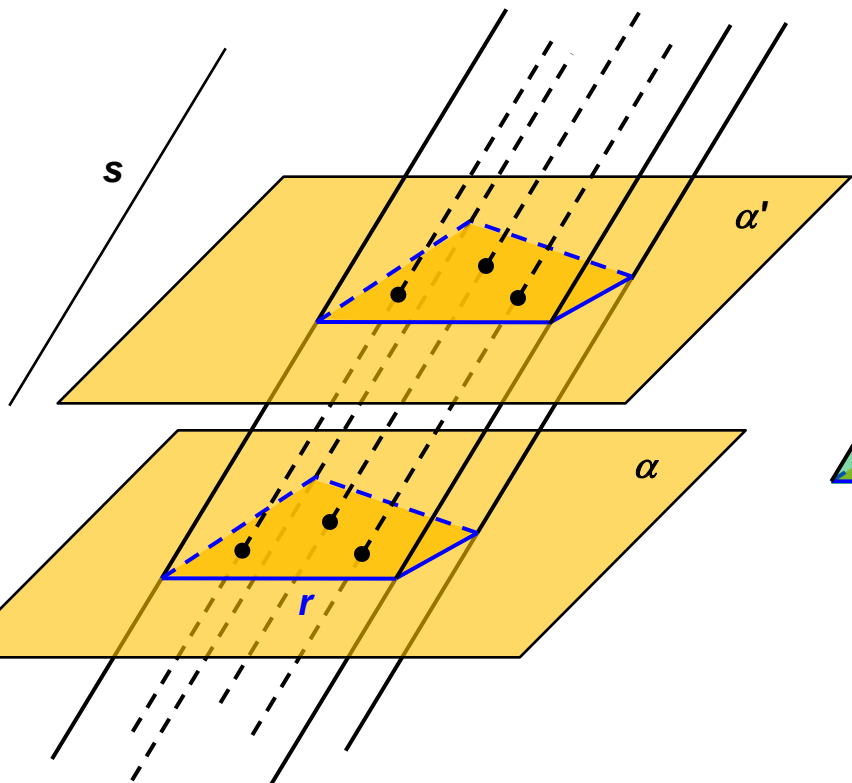
Nech r je ľubovoľný n -uholník v rovine α a s je priamka rôznobežná s rovinou α .

Hranolový priestor je množina všetkých priamok, ktoré sú rovnobežné s priamkou s a pretínajú n -uholník r a jeho vnútro.

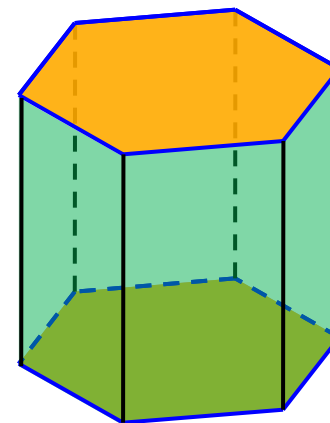
Hranol je časť hranolového priestoru ohraničená dvoma rovnobežnými rovinami α, α' , ktoré nie sú rovnobežné s priamkou s . Prienik hranolového priestoru s rovinami α, α' nazývame **podstavy hranola** a sú to zhodné n -uholníky.

Ak je priamka s kolmá na rovinu podstavy hranola, tak je hranol **kolmý**.

Kolmý hranol, ktorého podstavy sú pravidelné n -uholníky sa nazýva **pravidelný n -boký hranol**.



Hranol



Pravidelný 6-boký hranol

Valcová plocha

Nech k je krivka a s je priamka, ktorá nie je rovnobežná so žiadnou dotyčnicou krivky k .

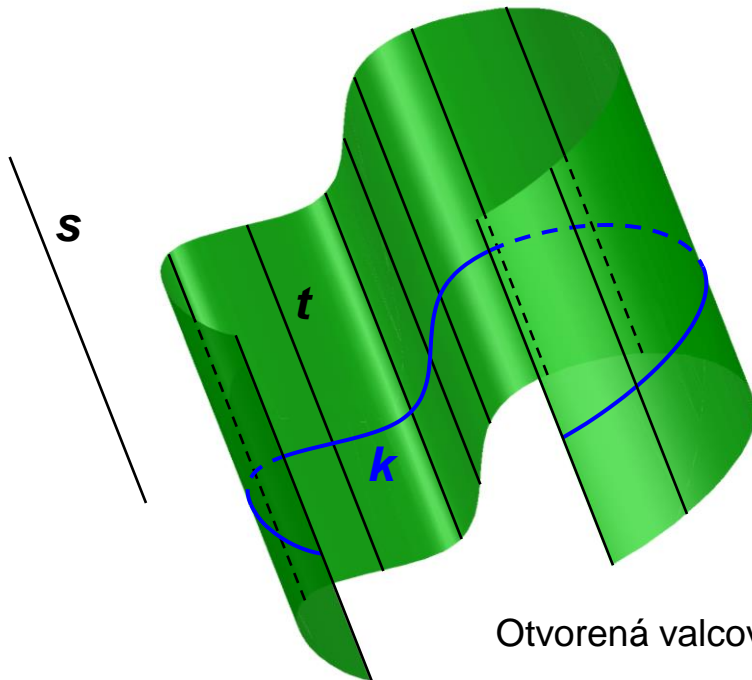
Valcová plocha je množina všetkých priamok, ktoré sú rovnobežné s priamkou s a pretínajú krivku k .

Krivka k sa nazýva **riadiaca (určujúca) čiara** valcovej plochy.

Priamka t valcovej plochy sa nazýva **tvořiacia priamka** ($t \parallel s$, t pretína riadiacu čiaru k).

Poznámka: Riadiaca krivka k valcovej plochy môže byť rovinná alebo priestorová, otvorená alebo uzavretá.

Ak je riadiaca krivka k uzavretá, tak aj valcová plocha je **uzavretá**. Ak je riadiaca krivka k otvorená, tak aj valcová plocha je **otvorená**.



Otvorená valcová plocha

Valcová plocha sa nazýva **kolmá**, ak jej riadiaca krivka k leží v rovine α , ktorá je kolmá na priamku s .

Valcová plocha sa nazýva **šikmá**, ak jej riadiaca krivka k leží v rovine, ktorá nie je kolmá na priamku s .

Ak je riadiacou krivkou valcovej plochy kružnica, tak sa plocha nazýva **kružnicová valcová plocha**. Priamka incidentná so stredom kružnice a rovnobežná s tvoriacimi priamkami sa nazýva **os kružnicovej valcovej plochy**.

Kolmá kružnicová valcová plocha je **rotačná valcová plocha**.

Poznámka: Rotačná valcová plocha vznikne aj rotáciou priamky p okolo priamky o , pričom $p \parallel o$ (pozri kapitolu R2 v prvej časti skrípt www.math.sk/skriptaDG2/1).

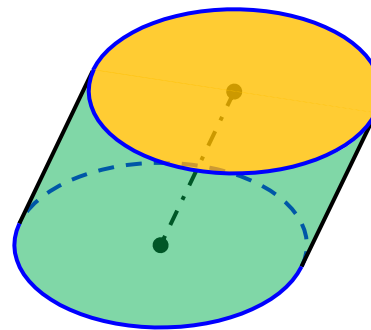
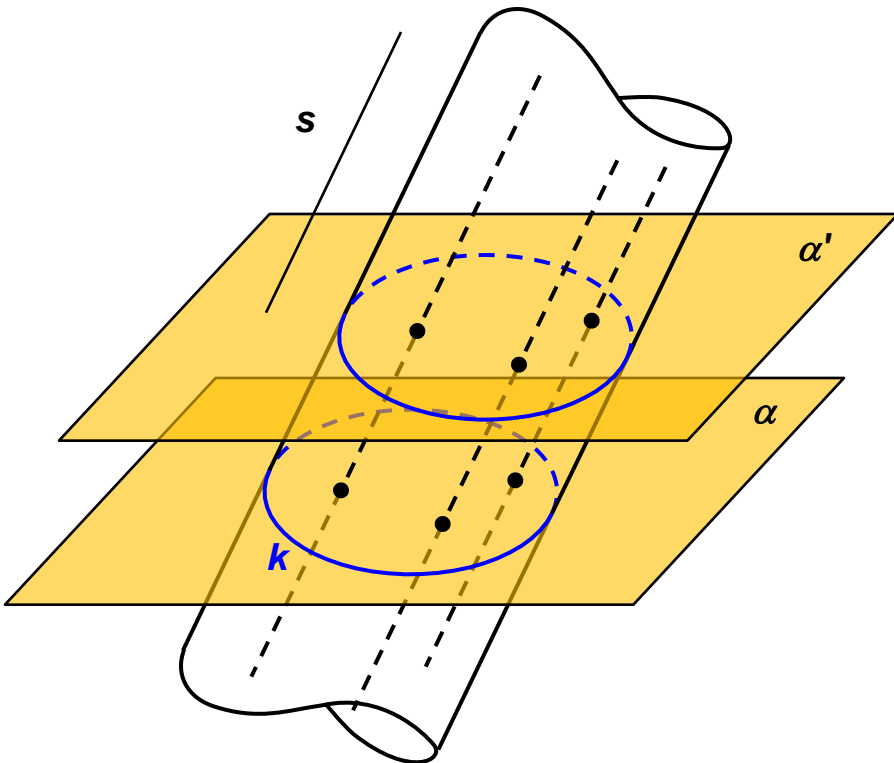
Poznámka: S pojmom valcová plocha súvisia aj pojmy valcový priestor a valec:

Nech k je ľubovoľná uzavretá krivka v rovine α a s je priamka rôznobežná s rovinou α .

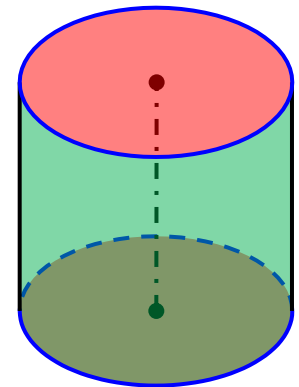
Valcový priestor je množina všetkých priamok, ktoré sú rovnobežné s priamkou s a pretínajú krivku k a jej vnútro.

Valec je časť valcového priestoru ohraničená dvoma rovnobežnými rovinami α, α' , ktoré nie sú rovnobežné s priamkou s . Prienik valcového priestoru s rovinami α, α' nazývame **podstavy valca** a sú zhodné.

Valec, ktorého podstavy sú kružnice a priamka s je kolmá na roviny α, α' , sa nazýva **rotačný valec**.



Valec



Rotačný valec

Ihlanová plocha

Nech r je lomená čiara a V je bod, ktorý neleží na lomenej čiare r ani v žiadnej rovine určenej dvoma úsečkami lomenej čiary r .

Ihlanová plocha je množina všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom V a pretínajú lomenú čiaru r .

Lomená čiara r sa nazýva **radiaca (určujúca) čiara** ihlanovej plochy.

Bod V sa nazýva **vrchol** ihlanovej plochy.

Priamka t ihlanovej plochy sa nazýva **tvoriaca priamka** ($V \in t$, t pretína radiacu čiaru r).

Poznámka: Radiaca lomená čiara r ihlanovej plochy môže byť rovinná alebo priestorová, otvorená alebo uzavretá. Ak je radiaca čiara r uzavretá, tak aj ihlanová plocha je **uzavretá**. Ak je radiaca čiara r otvorená, tak aj ihlanová plocha je **otvorená**.



Otvorená ihlanová plocha

Hrana h je tvoriaca priamka, ktorá prechádza vrcholom radiacej lomenej čiary r .

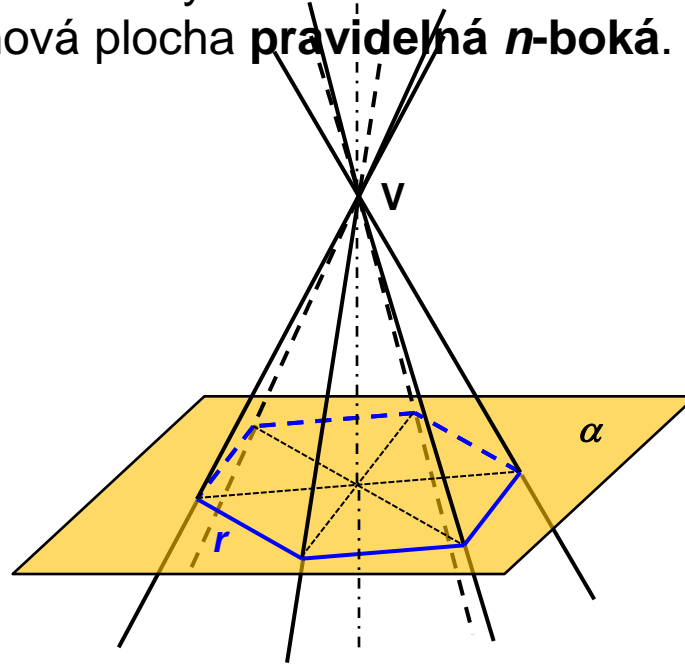
Stena je množina všetkých tvoriacich priamok plochy, ktoré pretínajú jednu úsečku radiacej lomenej čiary r , t. j. stena je časť roviny ohraničená dvoma susednými hranami plochy.

Nech je určujúca čiara r pravidelný n -uholník. Priamka o určená vrcholom V a stredom pravidelného n -uholníka je **os ihlanovej plochy**.

Ak je určujúca čiara r pravidelný n -uholník a os ihlanovej plochy nie je kolmá na rovinu

n -uholníka, tak je ihlanová plocha **šikmá**.

Ak je určujúca čiara r pravidelný n -uholník a os ihlanovej plochy je kolmá na rovinu n -uholníka, tak je ihlanová plocha **pravidelná n -boká**.



Pravidelná 6-boká ihlanová plocha

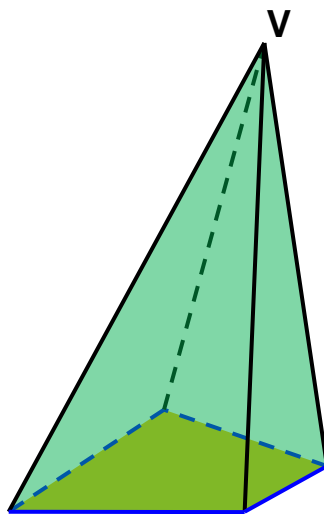
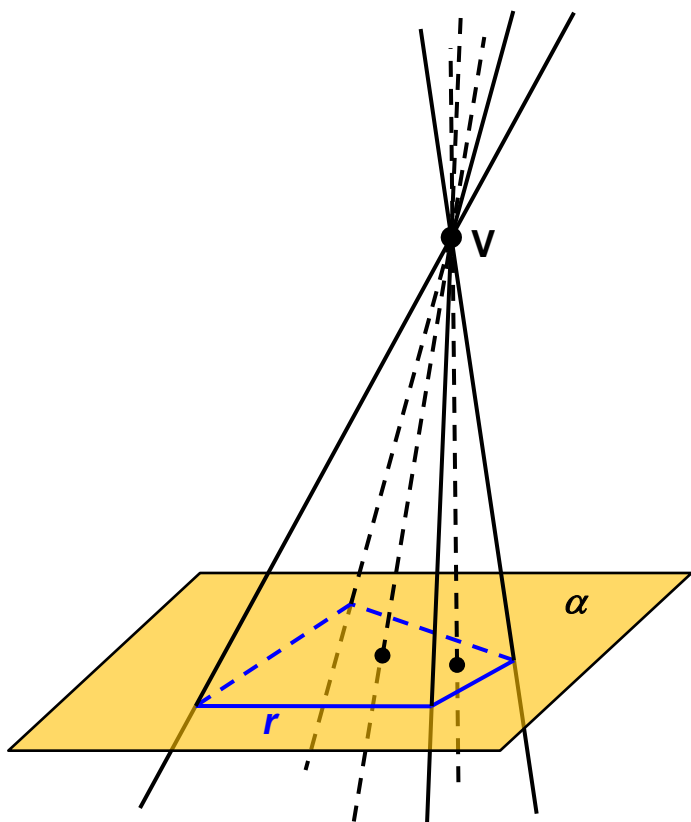
Poznámka: S pojmom ihlanová plocha súvisia aj pojmy ihlanový priestor a ihlan:

Nech r je ľubovoľný n -uholník v rovine α a V je bod, ktorý neleží v rovine α .

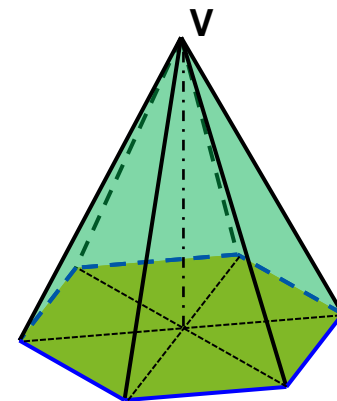
Ihlanový priestor je množina všetkých priamok, ktoré prechádzajú vrcholom V a pretínajú radiaci n -uholník r a jeho vnútro.

Ihlan je časť ihlanového priestoru ohraničená vrcholom a rovinou α radiaceho n -uholníka. Prienik ihlanového priestoru s rovinou α sa nazýva **podstava ihlana**.

Ak je podstava ihlana pravidelný n -uholník a os je kolmá na rovinu podstavy, tak ihlan nazývame **pravidelný**.



Ihlan



Pravidelný 6-boký ihlan

Kužel'ová plocha

Nech k je krivka a V je bod, ktorý neleží na krivke k ani v rovine krivky k .

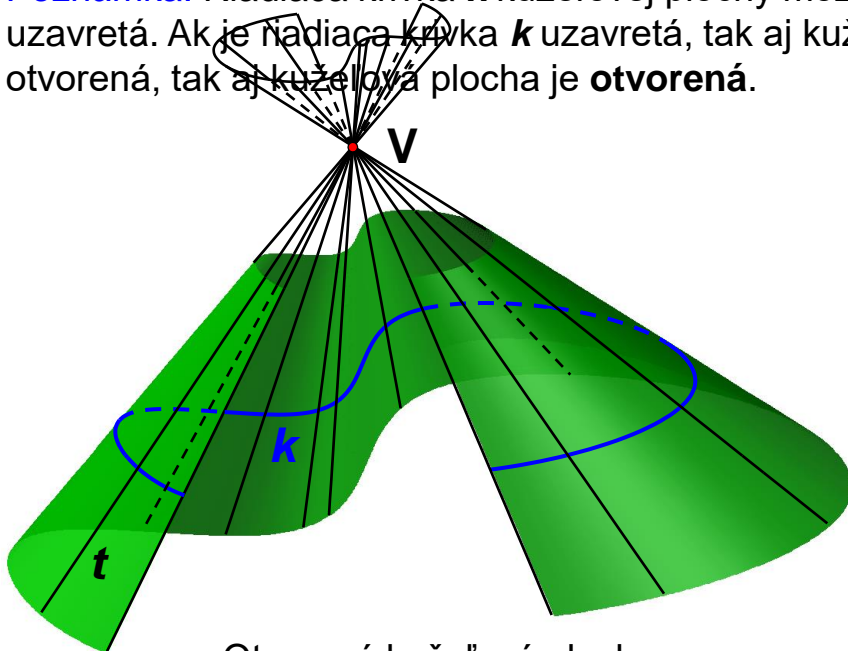
Kužel'ová plocha je množina všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom V a pretínajú krivku k .

Krivka k sa nazýva **radiaca (určujúca) čiara** kužel'ovej plochy.

Bod V sa nazýva **vrchol** kužel'ovej plochy.

Priamka t kužel'ovej plochy sa nazýva **tvoriaca priamka** ($V \in t$, t pretína radiacu čiaru k).

Poznámka: Radiaca krivka k kužel'ovej plochy môže byť rovinná alebo priestorová, otvorená alebo uzavretá. Ak je radiaca krivka k uzavretá, tak aj kužel'ová plocha je **uzavretá**. Ak je radiaca krivka k otvorená, tak aj kužel'ová plocha je **otvorená**.



Otvorená kužel'ová plocha

Ak je riadiacou krivkou kužeľovej plochy kružnica, tak sa plocha nazýva **kružnicová kužeľová plocha**. Priamka určená stredom kružnice a vrcholom **V** plochy sa nazýva **os** kružnicovej kužeľovej plochy.

Ak riadiaca kružnica kužeľovej plochy leží v rovine kolmej na os plochy, tak je plocha **rotačná kužeľová plocha**.

Poznámka: Rotačná kužeľová plocha vznikne aj rotáciou priamky **p** okolo priamky **o**, pričom priamky **p** a **o** sú navzájom rôznobežné (pozri kapitolu R2 v prvej časti skrípt www.math.sk/skriptaDG2/1).

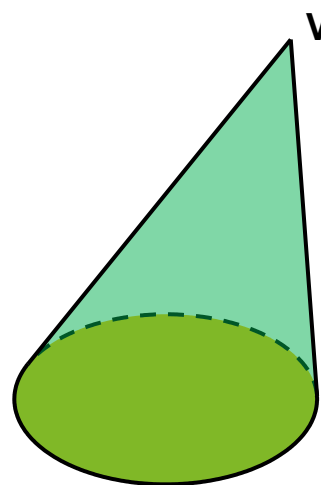
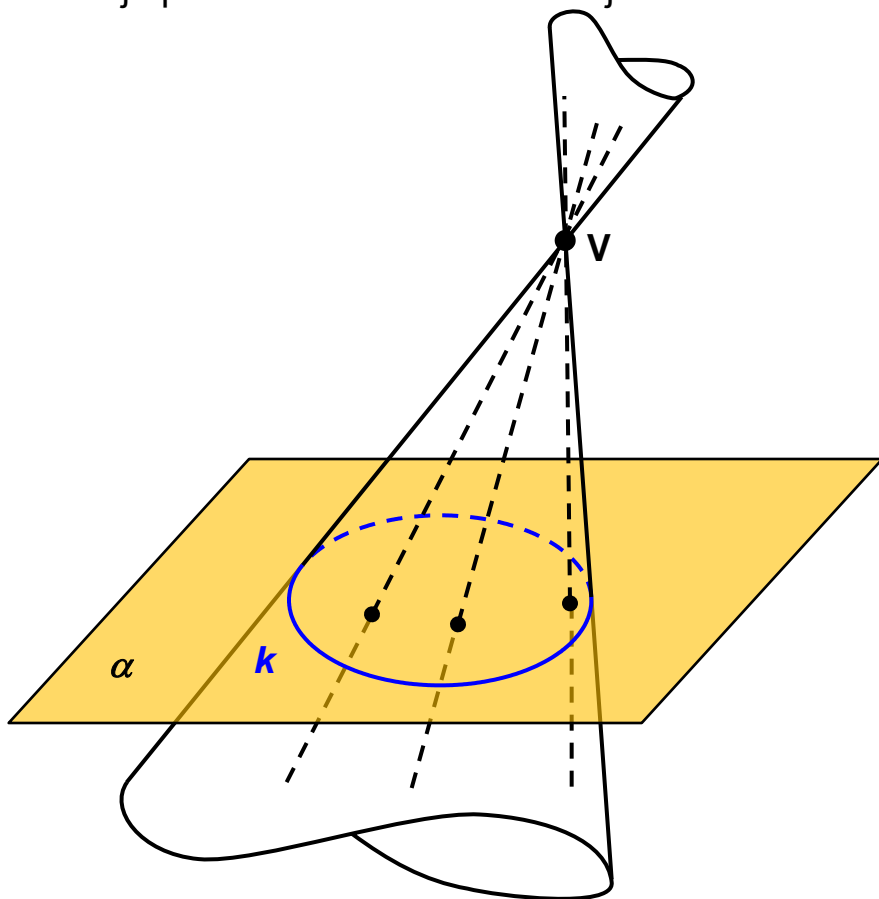
Poznámka: S pojmom kuželová plocha súvisia aj pojmy kuželový priestor a kužel:

Nech k je ľubovoľná uzavretá krivka v rovine α a V je bod, ktorý neleží v rovine α .

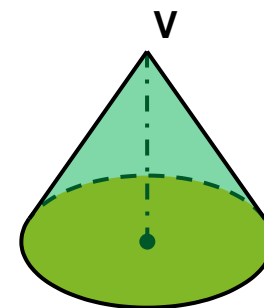
Kuželový priestor je množina všetkých priamok, ktoré prechádzajú vrcholom V a pretínajú riadiacu krivku k a jej vnútro.

Kužel' je časť kuželového priestoru ohraničená vrcholom V a rovinou α riadiacej krivky. Prienik kuželového priestoru s rovinou α sa nazýva **podstava kužela**.

Ak je podstava kužela kruh a os je kolmá na rovinu podstavy, tak je **kužel' rotačný**.



Kužel'



Rotačný kužel'

Mongeova projekcia



Gaspard Monge (1746-1818)

- ❑ francúzsky matematik, geometer, fyzik, politik, minister námorníctva, ...
- ❑ jeho meno sa nachádza medzi menami vedcov na Eiffelovej veži
- ❑ práca „Géométrie descriptive“ vyšla knižne r.1798-1799, v nej zaviedol kolmé premietanie na dve k sebe kolmé priemetne, čo umožnilo riešiť úlohy, ktoré dovtedy boli úplne neriešiteľné alebo len veľmi ťažko riešiteľné

Mongeova projekcia - definícia

Združenie priemetní
(otočenie pôdorysne do nárysne okolo osi x)

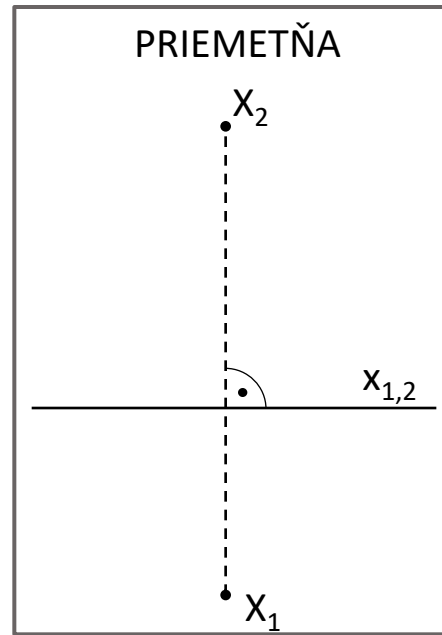
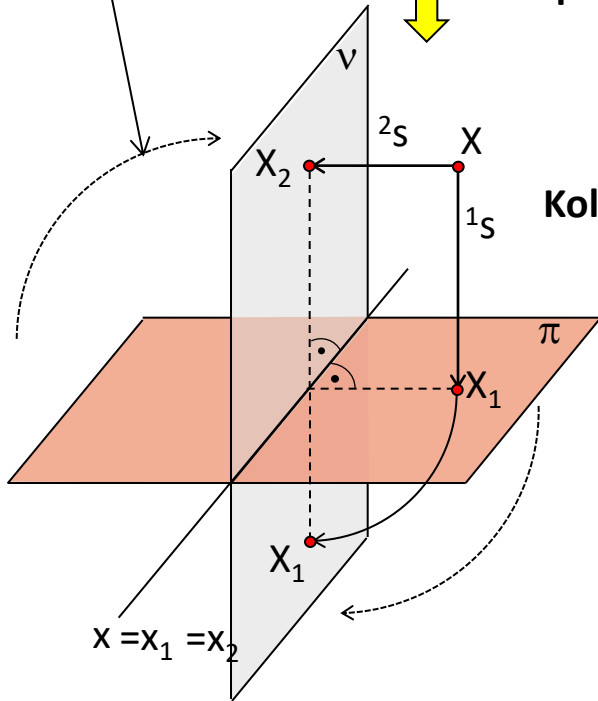
Kolmé premietanie do pôdorysne

π – pôdorysňa (prvá priemetňa)

v – nárysňa (druhá priemetňa)

x – základnica, os x

Kolmé premietanie do nárysne



$^1s, X \in ^1s \wedge ^1s \perp \pi$ – prvá premietacia priamka bodu X

X_1 – pôdorys bodu X (prvý priemet)

$^2s, X \in ^2s \wedge ^2s \perp v$ – druhá premietacia priamka bodu X

X_2 – nárys bodu (druhý priemet)

$x_{1,2}$ – pôdorys aj nárys osi x

$X_1X_2 \perp x_{1,2}$ – ordinála bodu X

(X_1, X_2) – obraz bodu X v Mongeovej projekcii, združené priemety bodu X.

Definície:

Nech π a v sú dve kolmé roviny v priestore \mathbb{E}^3 . X je ľubovoľný bod v priestore \mathbb{E}^3 . X_1 je kolmý priemet bodu X do π , X_2 je kolmý priemet bodu X do v . Roviny π a v združíme, čím získame usporiadanú dvojicu (X_1, X_2) bodov v nárysi. Platí: $X_1X_2 \perp x$, spojnicu X_1X_2 nazývame **ordinála** bodu X .

Usporiadaná dvojica bodov (X_1, X_2) v nárysi, pre ktorú platí $X_1X_2 \perp x$, je obrazom bodu X v Mongeovej projekcii, hovoríme tiež, že body X_1, X_2 sú **združené priemety** bodu X . Zo združených priemetov bodu v priemetni vieme bod rekonštruovať v priestore **jednoznačne**.

Mongeova projekcia je vzájomne jednoznačné zobrazenie bodov priestoru \mathbb{E}^3 na usporiadané dvojice združených priemetov bodu v nárysi.

Súradnice bodu

π, ν, μ - súradnicové roviny

μ - bokorysňa (tretia priemetňa) $\mu, \mu \perp \pi$ a $\mu \perp \nu$

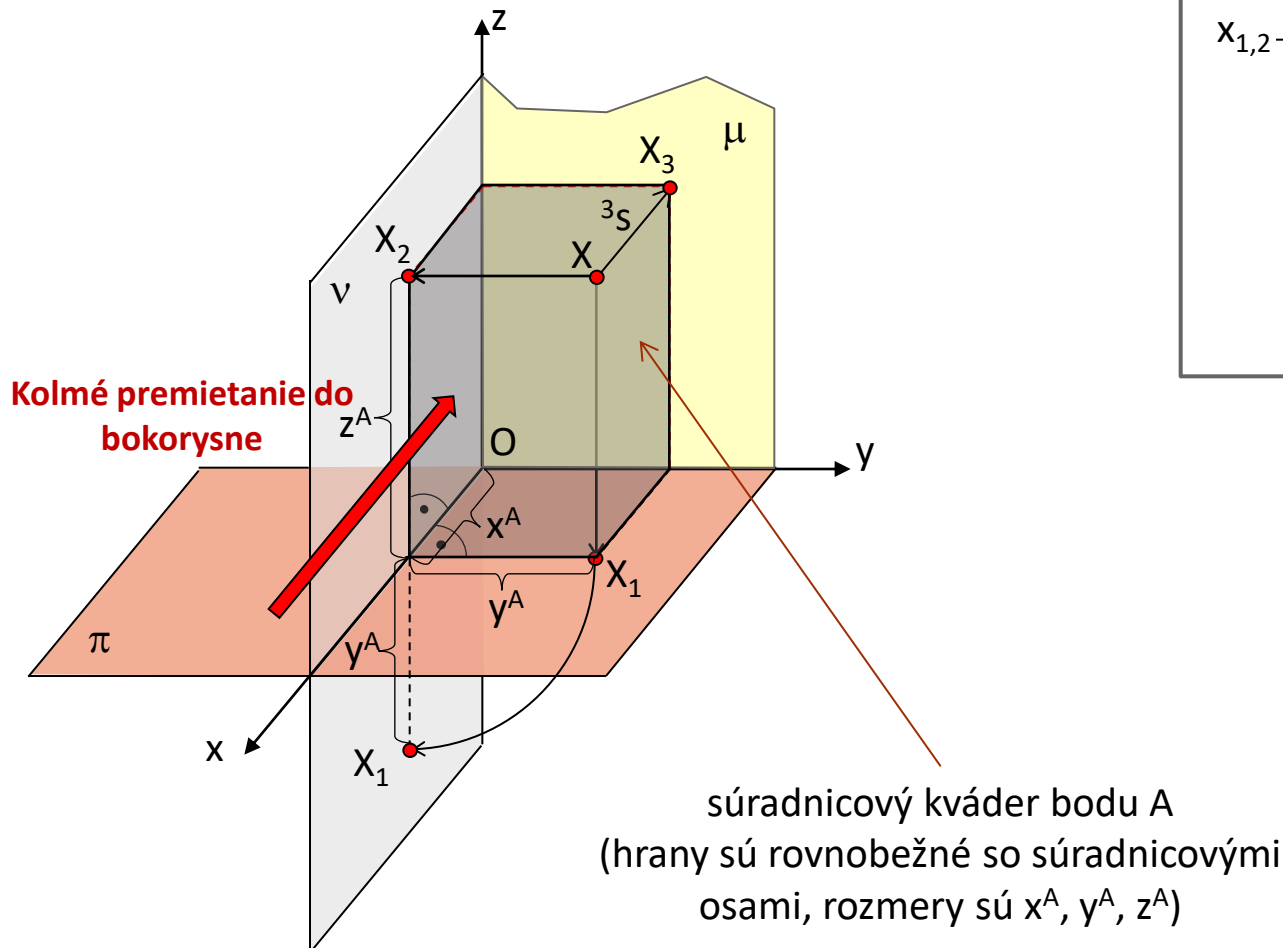
$O = \pi \cap \nu \cap \mu$ - začiatok súr. sústavy

x, y, z - súradnicové osi

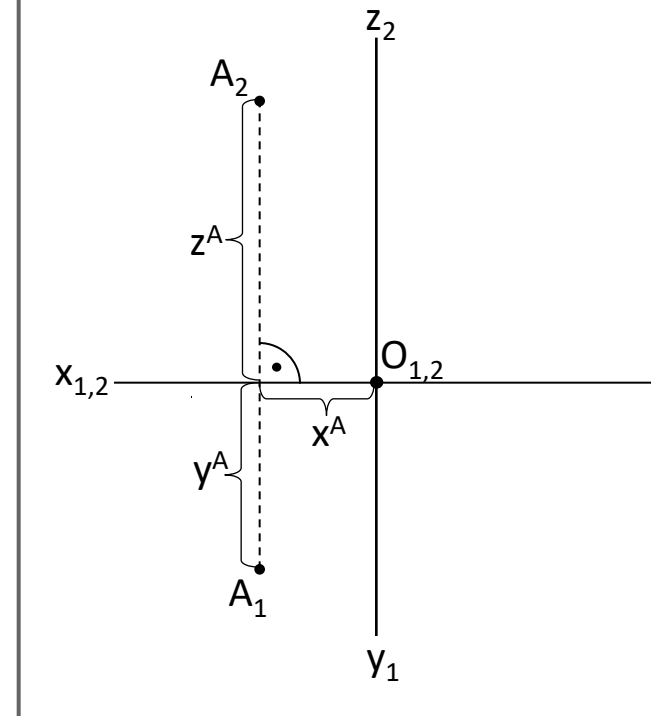
$y = \pi \cap \mu, z = \nu \cap \mu$ - súradnicové osi

${}^3s, X \in {}^3s \wedge {}^3s \perp \mu$ - tretia premietacia priamka bodu X

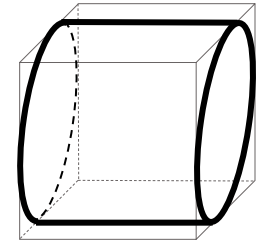
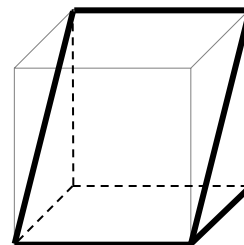
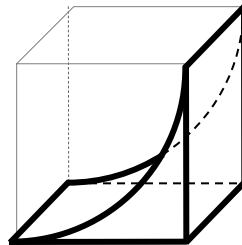
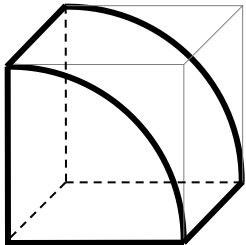
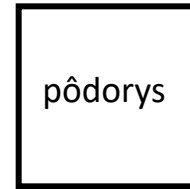
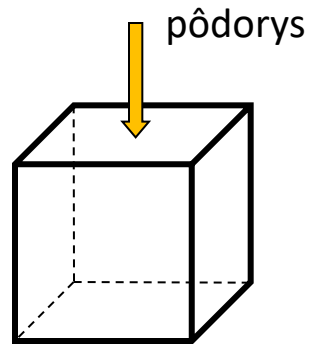
X_3 - bokorys bodu X (tretí priemet)



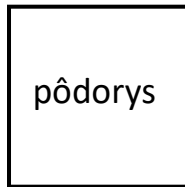
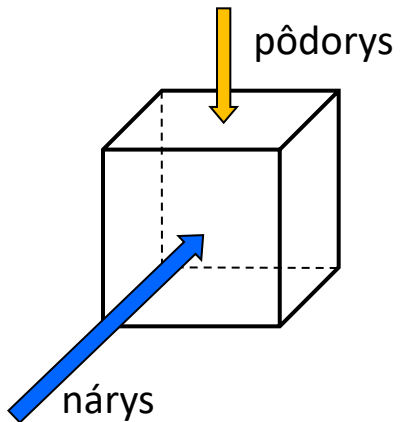
PRIEMETŇA



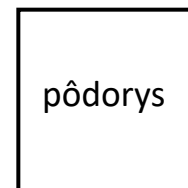
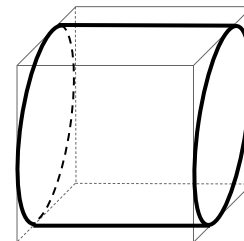
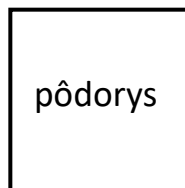
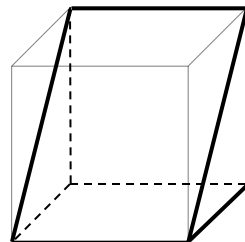
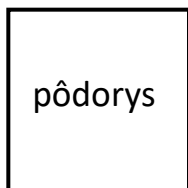
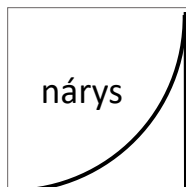
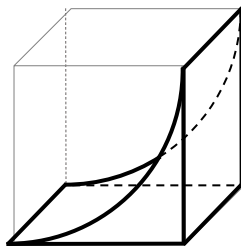
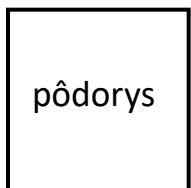
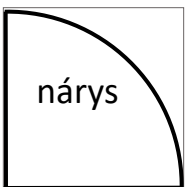
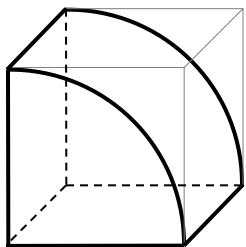
Nakreslite aspoň tri telesá, ktorých pôdorys je štvorec.



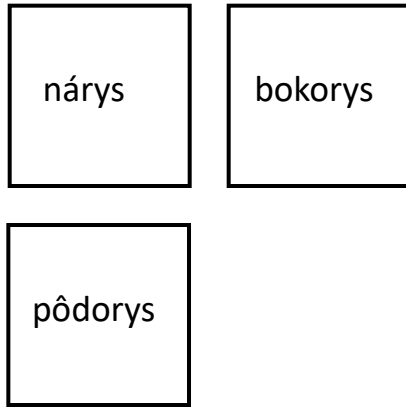
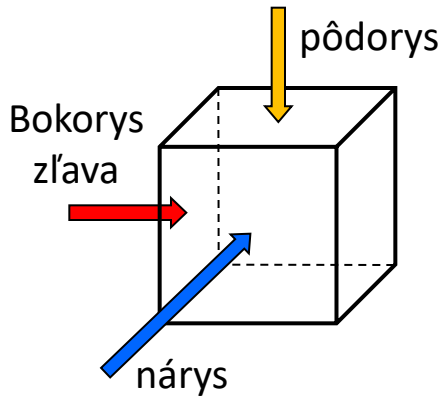
Pôdorysy telies sú rovnaké štvorce.



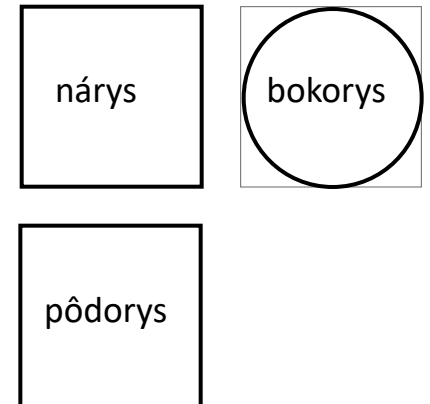
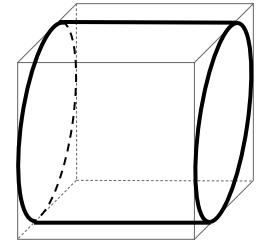
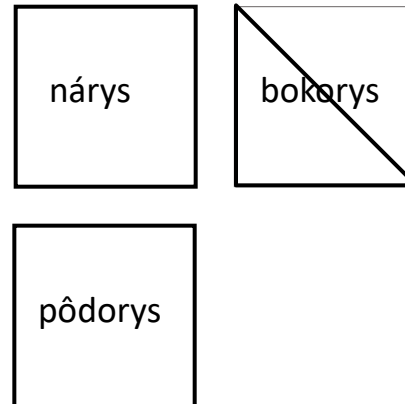
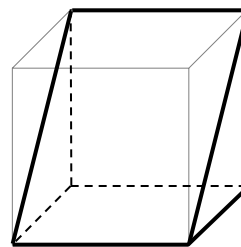
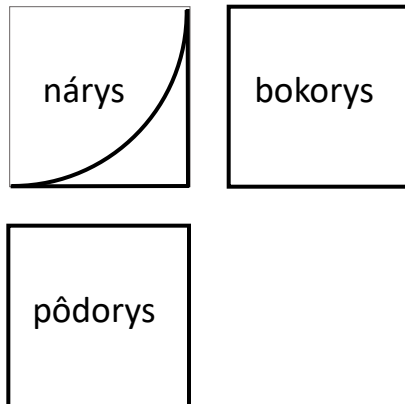
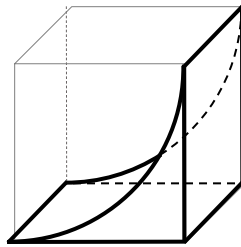
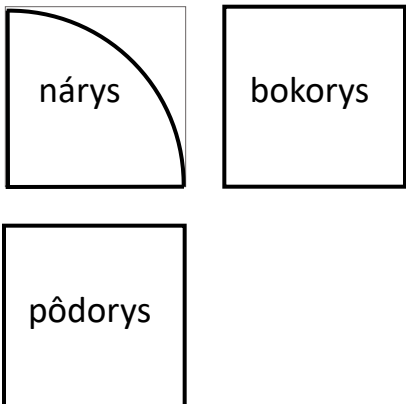
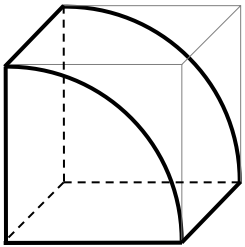
Pridajme druhý priemet: **NÁRYS**



Pôdorysy aj nárysy telies sú rovnaké štvorce.



Pridajme tretí priemet: BOKORYS



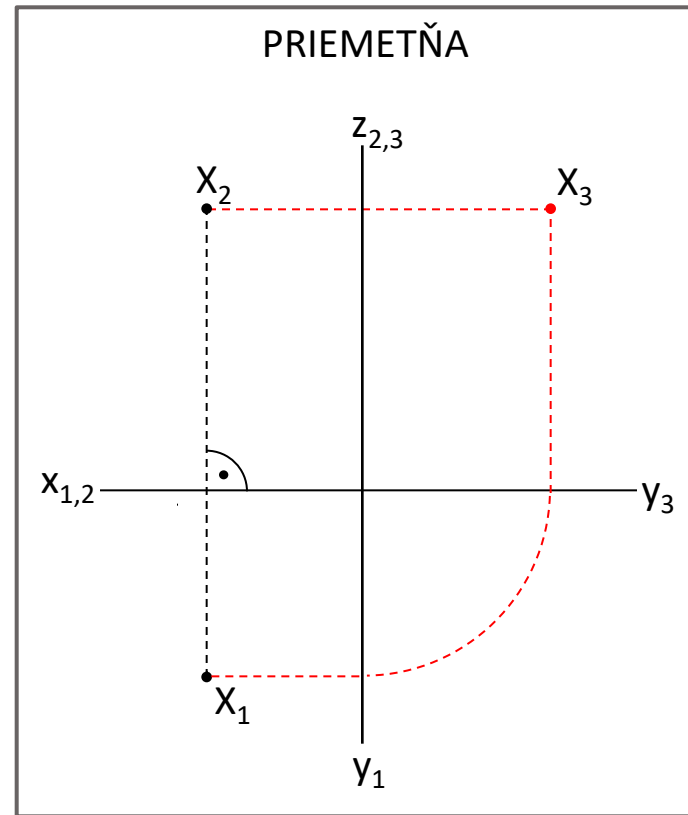
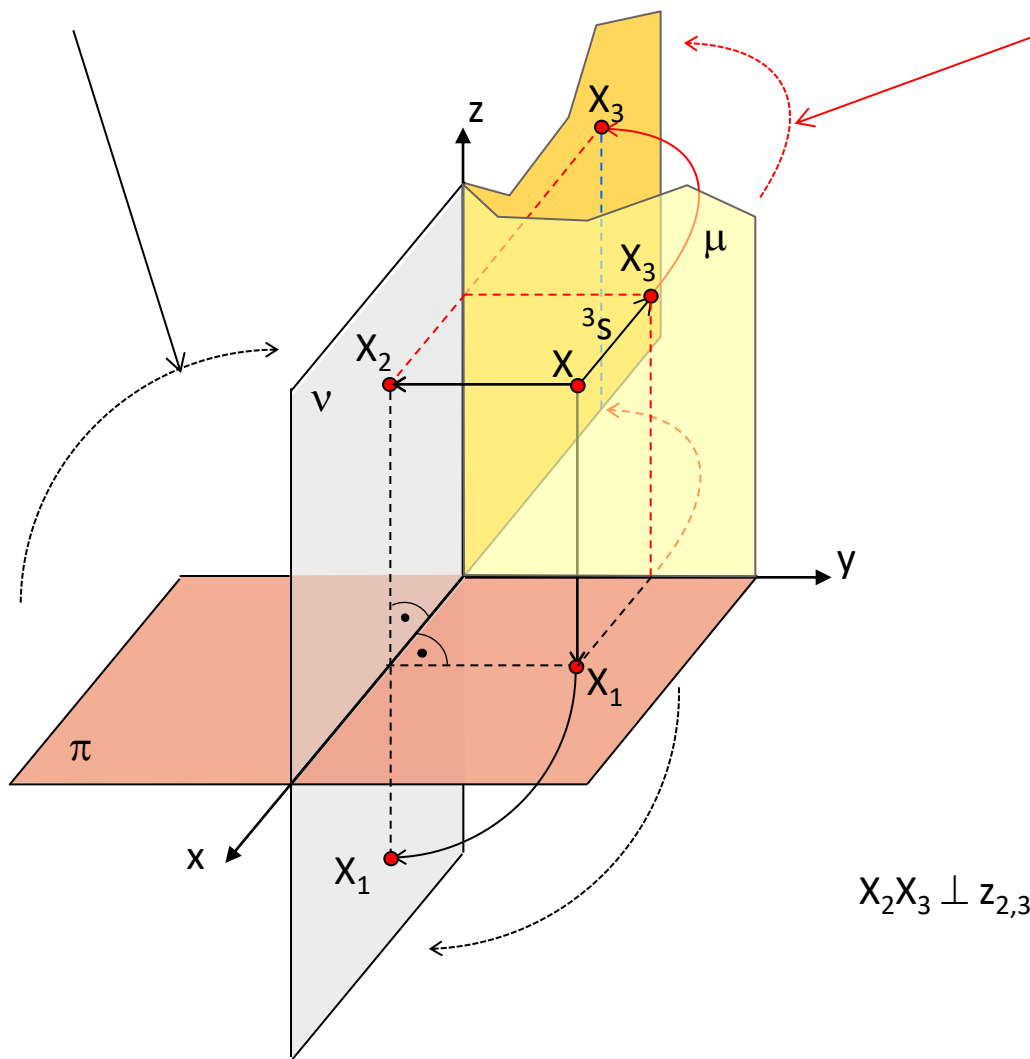
Mongeova projekcia – bokoryšňa

Združenie pôdorysne s nárysňou

(otočenie pôdorysne do nárysne okolo osi x)

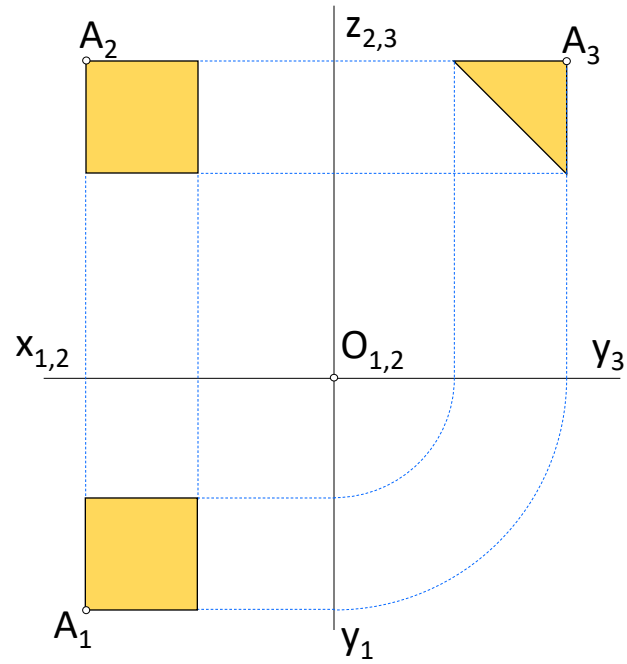
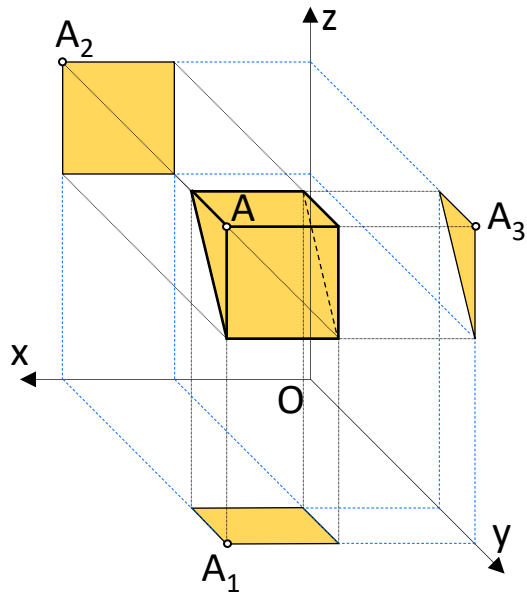
Združenie bokorysne s nárysňou

(otočenie bokorysne do nárysne okolo osi z)

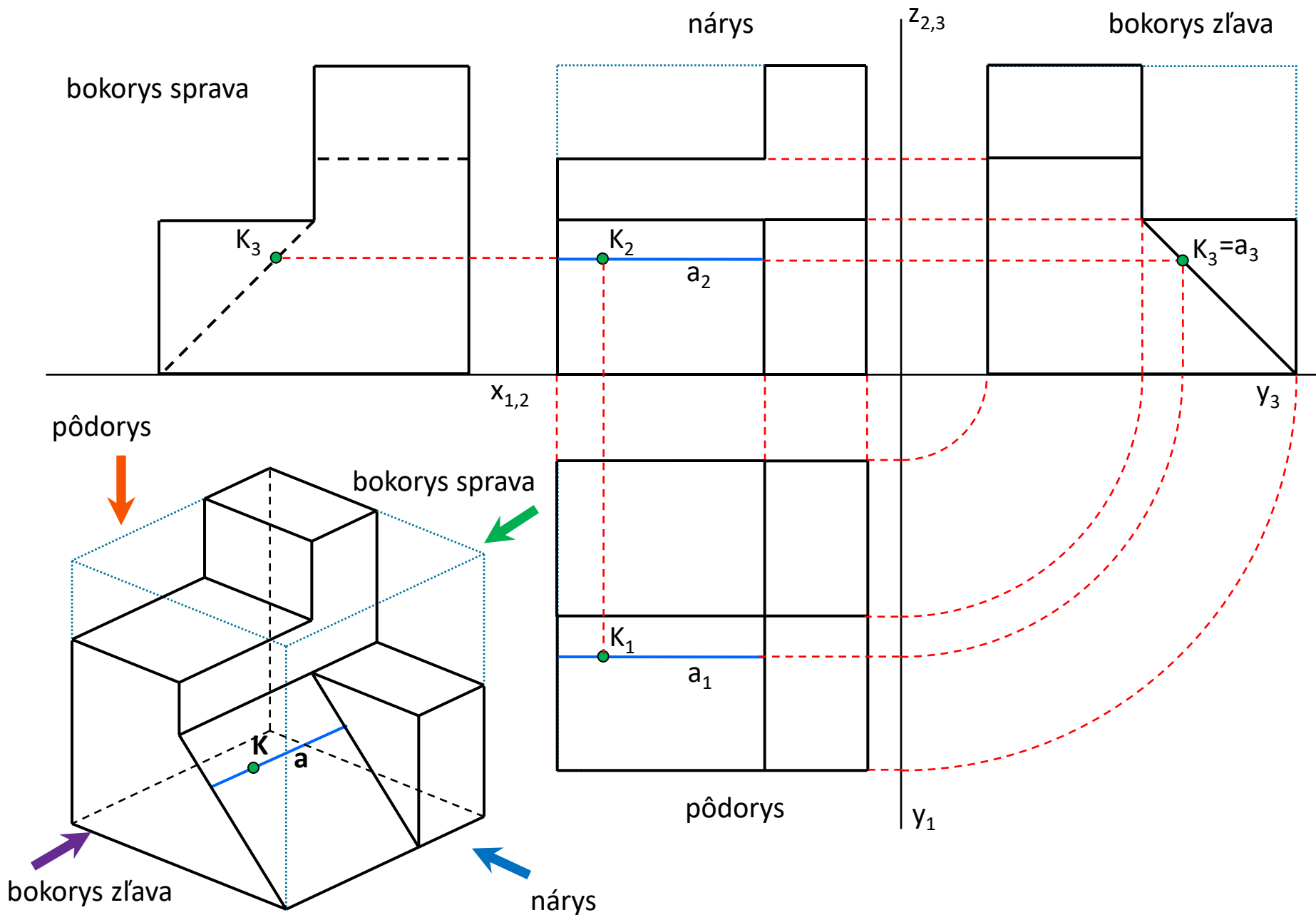


$X_2X_3 \perp z_{2,3}$ – ordinála medzi nárysňou a bokorysňou

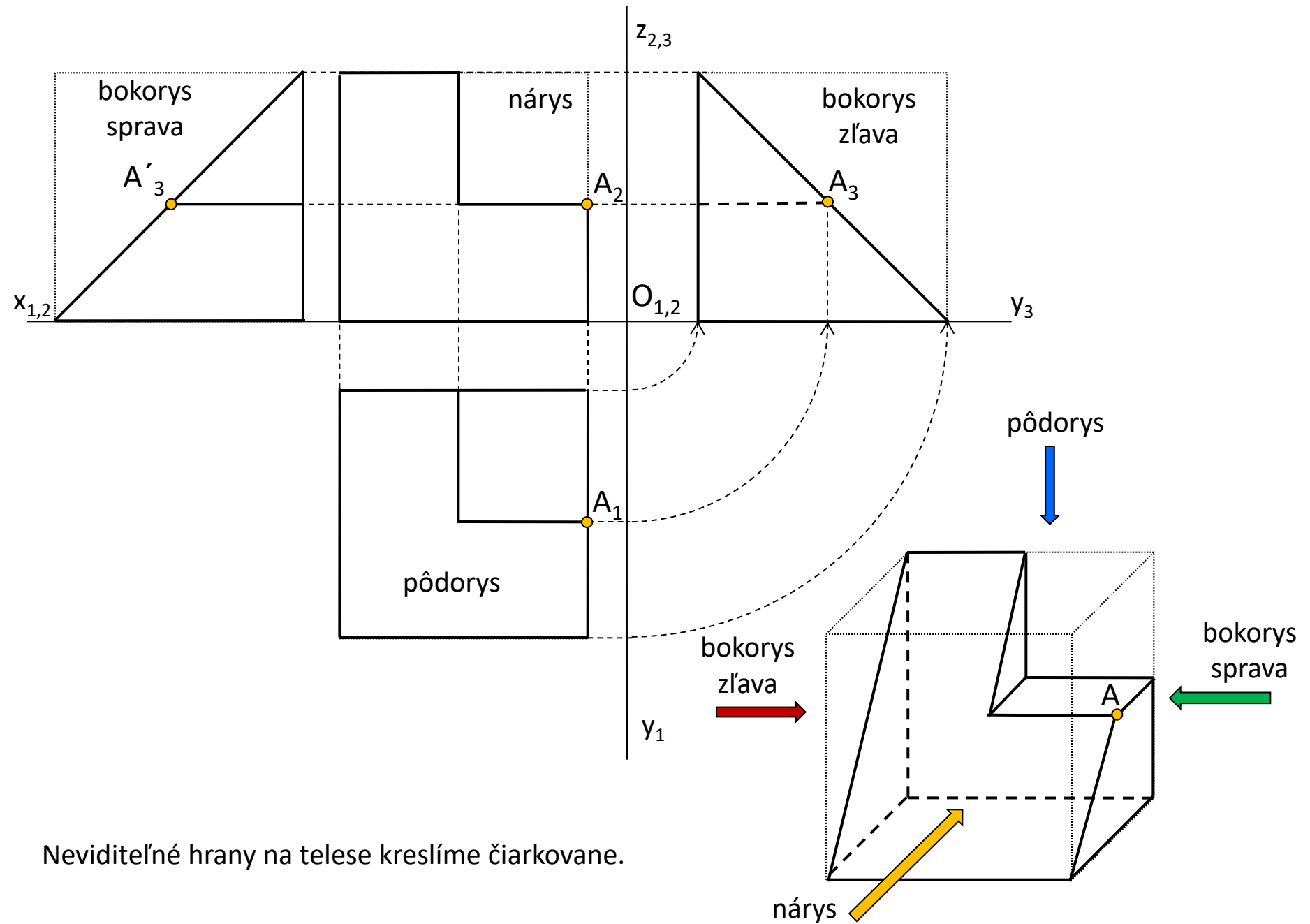
Pôdorys, nárys, bokorys a ich vzťah



Obraz telesa v Mongeovej projekcii



Obraz telesa v Mongeovej projekcii



Jednoduché telesá s podstavou v priemetni v Mongeovej projekcii

Zobrazte kváder ABCDEFGH s obdĺžnikovou podstavou ABCD v pôdorysni a výškou v (zvoľte podľa obrázku). Daný je nárys bodu K, ktorý leží na plášti telesa. Zostrojte pôdorys a bokorys bodu K (všetky riešenia).

