KURZ DESKRIPTÍVNEJ GEOMETRIE

Na nasledujúce cvičenia si prineste:

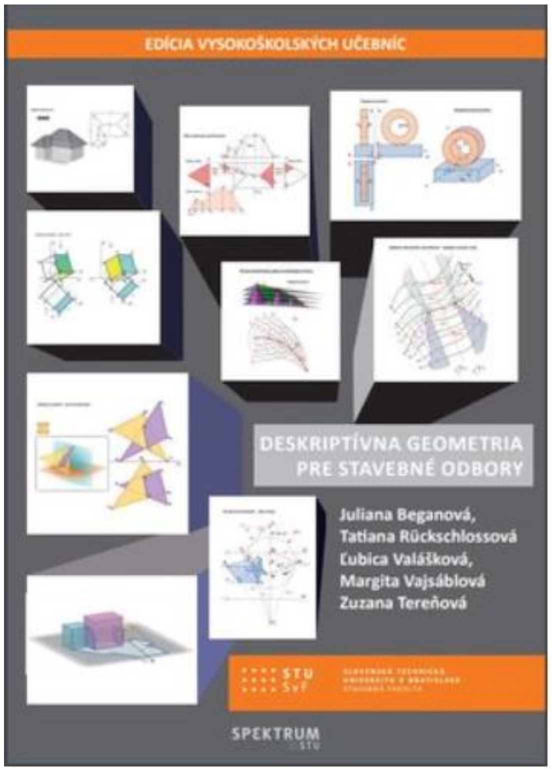
zošit alebo papiere A4 „čisté“,
ceruzku - pentelku,
kružidlo,
gumu,
dve pravítka - jedno s ryskou.

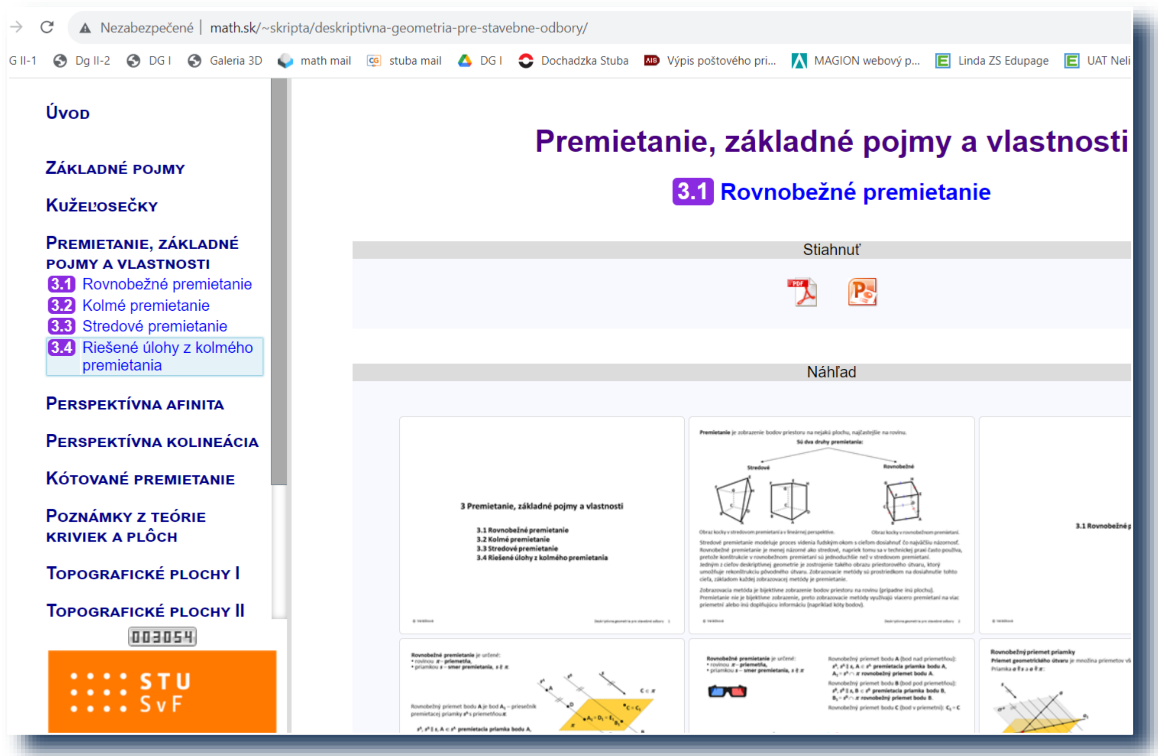
Odporúčaná literatúra

Beganová, J. – Rűckschlossová, T. – Valášková, Ľ. – Vajsáblová, M. – Tereňová, Z. **DESKRIPTÍVNA GEOMETRIA PRE STAVEBNÉ ODBORY. SPEKTRUM STU, Bratislava, 2022. Dostupné na:**

http://math.sk/~skripta/deskriptivna-geometria-pre-stavebne-odbory/

https://www.svf.stuba.sk/sk/dokumenty/edicna-cinnost/skripta.html?page_id=1801





Valášková, Tereňová, Vajsáblová, Mészárosová: **Úvod do predmetu deskriptívna geometria,** Bratislava: Nakladateľstvo STU, 2014, 149 s.

Základné pojmy

Deskriptívna geometria

Rozvíja metódy vzájomne jednoznačného zobrazenia

3- rozmerného priestoru na

2- rozmerný a naopak

3D $\Rightarrow$ 2D

Deskriptívna geometria

Rozvíja metódy vzájomne jednoznačného zobrazenia

3- rozmerného priestoru na

2- rozmerný a naopak

3D ← 2D

Deskriptívna geometria

Rozvíja metódy vzájomne jedno-jednoznačného zobrazenia

3- rozmerného priestoru na

2- rozmerný a naopak

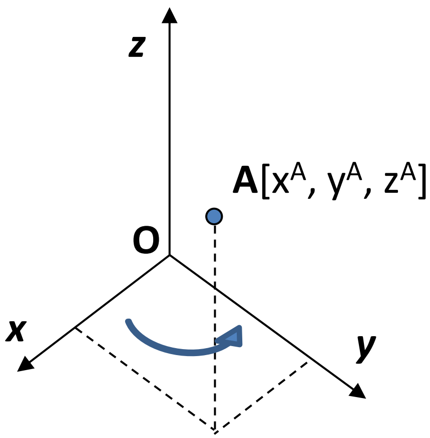
3D $\Longleftrightarrow$ 2D

BIJEKCIA

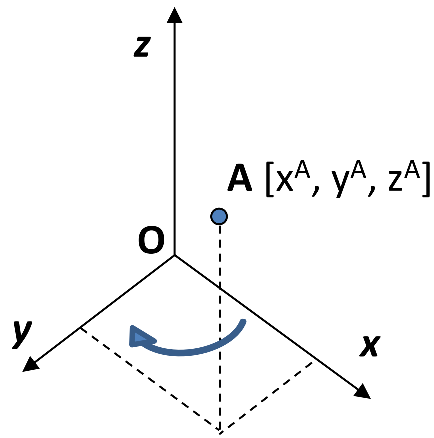
Základné pojmy

E^3 – euklidovský 3-rozmerný priestor

Karteziánska sústava súradníc (**O**, ***x***, ***y***, ***z***) v $\mathbf{E^3}$ – osi *x*, *y*, *z* sú navzájom kolmé priamky so spoločným bodom **O** – začiatok súradnicovej sústavy a jednotky na osiach sú rovnaké.



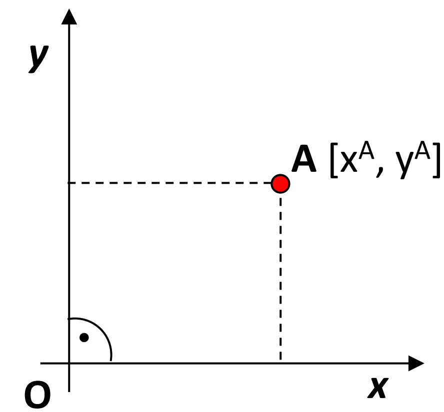
Pravotočivá



Ľavotočivá

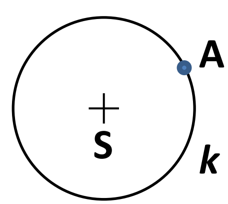
E^2 – euklidovská rovina

Karteziánska sústava súradníc (**O**, ***x***, ***y***) v $\mathbf{E^2}$ – osi *x*, *y* sú navzájom kolmé priamky so spoločným bodom **O** – začiatok súradnicovej sústavy a jednotky na osiach sú rovnaké.



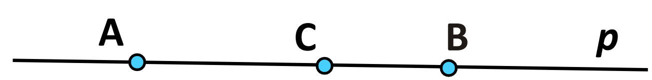
Incidencia – bod leží na útvare

(napr. bod **A** leží na kružnici ***k***)



Kolinearita – 3 body ležia na jednej priamke

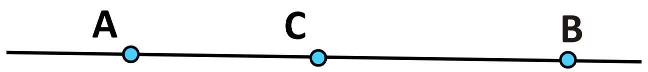
(body **A**, **B**, **C** ležia na priamke ***p***)



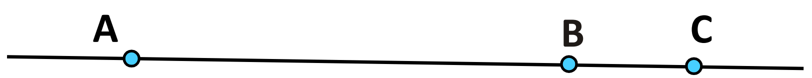
Deliaci pomer

Definícia: Nech body **A**, **B**, **C**, kde **B** $\neq$ **C**, ležia na jednej priamke. **Deliaci pomer** bodu **C** vzhľadom na body **A**, **B** je číslo:

a) $(\mathbf{A},\mathbf{B};\mathbf{C}) = -\dfrac{|\mathbf{AC}|}{|\mathbf{BC}|}$, ak bod **C** je bod úsečky **AB**,



b) $(\mathbf{A},\mathbf{B};\mathbf{C}) = \dfrac{|\mathbf{AC}|}{|\mathbf{BC}|}$, ak bod **C** nie je bod úsečky **AB**.



Ak C je stred úsečky AB, aký je deliaci pomer (A, B, C)?

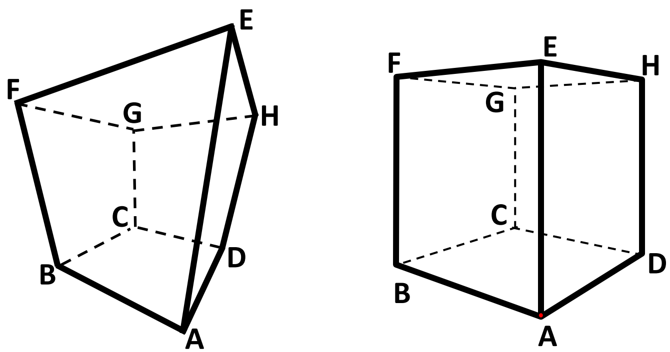
Poznámka: Ak bod **C** je stred úsečky **AB** , potom deliaci pomer (**A**, **B**; **C**) = –1.

Premietanie

Premietanie je zobrazenie bodov priestoru na nejakú plochu, najčastejšie na rovinu.

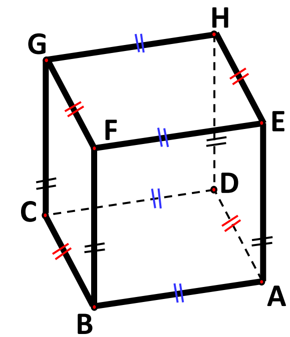
Sú dva druhy premietania:

Stredové



Obraz kocky v stredovom premietaní a v lineárnej perspektíve.

Rovnobežné



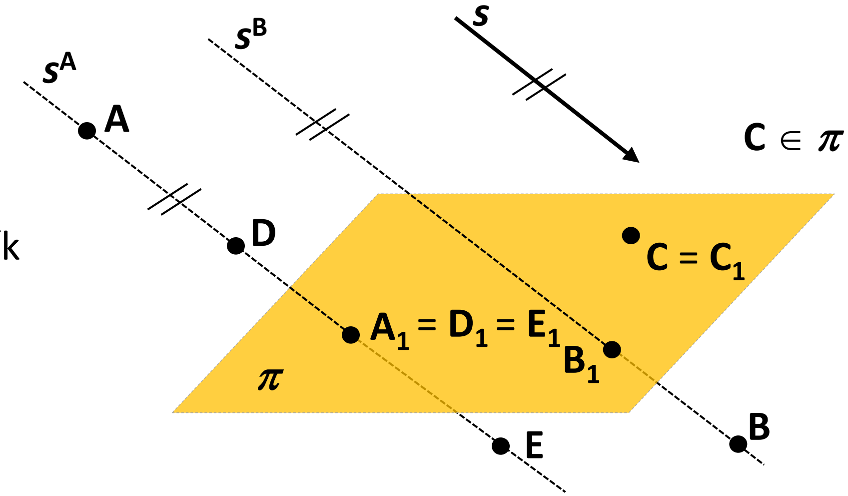
Obraz kocky v rovnobežnom premietaní.

Stredové premietanie modeluje proces videnia ľudským okom s cieľom dosiahnuť čo najväčšiu názornosť. Rovnobežné premietanie je menej názorné ako stredové, napriek tomu sa v technickej praxi často používa, pretože konštrukcie v rovnobežnom premietaní sú jednoduchšie než v stredovom premietaní.
Jedným z cieľov deskriptívnej geometrie je zostrojenie takého obrazu priestorového útvaru, ktorý umožňuje rekonštrukciu pôvodného útvaru. Zobrazovacie metódy sú prostriedkom na dosiahnutie tohto cieľa, základom každej zobrazovacej metódy je premietanie.

Zobrazovacia metóda je bijektívne zobrazenie bodov priestoru na rovinu (prípadne inú plochu).
Premietanie nie je bijektívne zobrazenie, preto zobrazovacie metódy využívajú viacero premietaní na viac priemetní alebo inú doplňujúcu informáciu (napríklad kóty bodov).

Rovnobežné premietanie

Rovnobežné premietanie je určené:
- rovinou π – **priemetňa**,
- priamkou $\boldsymbol{s}$ – **smer premietania**, $\boldsymbol{s} \nparallel \pi$.



Rovnobežný priemet bodu **A** je bod $\mathbf{A_1}$ – priesečník premietacej priamky $\boldsymbol{s}^{\mathbf{A}}$ s priemetňou π.

$\boldsymbol{s}^{\mathbf{A}}$, $\boldsymbol{s}^{\mathbf{A}} \parallel \boldsymbol{s}$, $\mathbf{A} \in \boldsymbol{s}^{\mathbf{A}}$ premietacia priamka bodu A,
$\mathbf{A_1} = \boldsymbol{s}^{\mathbf{A}} \cap \pi$ rovnobežný priemet bodu A.

Veta: Rovnobežný priemet každého bodu priestoru je bod v priemetni.

Definícia: **Rovnobežné premietanie** (určené rovinou π a priamkou $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s} \nparallel \pi$) je zobrazenie všetkých bodov euklidovského priestoru $\mathbf{E}^3$ do priemetne π, ktoré každému bodu $\mathbf{X} \in \mathbf{E}^3$ priradí bod $\mathbf{X_1} \in \pi$, tak že $\mathbf{XX_1} \parallel \boldsymbol{s}$.

Podľa smeru premietania $\boldsymbol{s}$ delíme rovnobežné premietanie na:

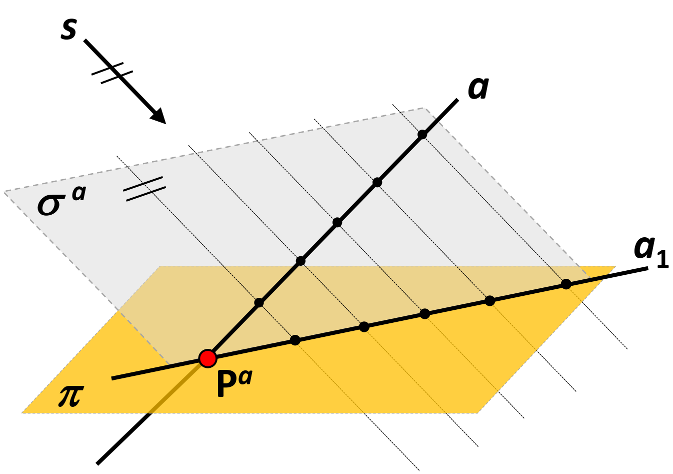
kolmé, ak $\boldsymbol{s} \perp \pi$,
šikmé, ak $\boldsymbol{s} \not\perp \pi$.

Rovnobežné premietanie nie je bijektívne zobrazenie, lebo všetky body ležiace na premietacej priamke sa zobrazia do jediného bodu.

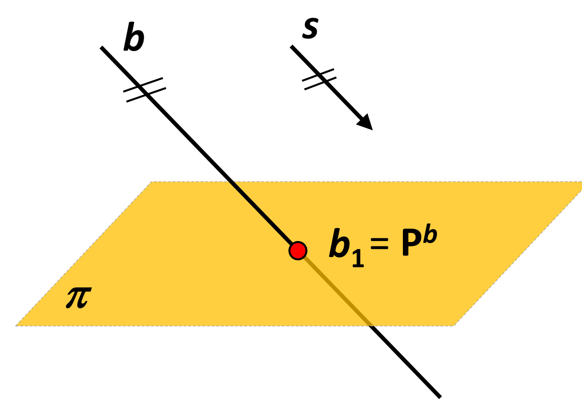
Rovnobežný priemet priamky

Priemet geometrického útvaru je množina priemetov všetkých jeho bodov.

Priamka $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{s}$ a $\boldsymbol{a} \nparallel \pi$:



Priamka $\boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{s}$:



Množina premietacích priamok všetkých bodov priamky $\boldsymbol{a}$ vytvorí **premietaciu rovinu σ^a priamky $\boldsymbol{a}$.**

Rovnobežný priemet priamky $\boldsymbol{a}$ je priamka $\boldsymbol{a}_1$.

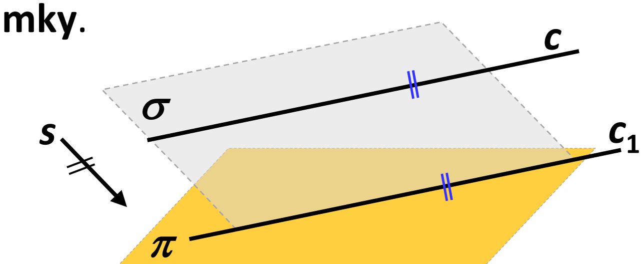
$\boldsymbol{a}_1 = \sigma^a \cap \pi$

Rovnobežný priemet priamky $\boldsymbol{b}$ je bod $\boldsymbol{b}_1$.

$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b} \cap \pi$

Veta: **Rovnobežný priemet priamky**, ktorá nie je rovnobežná so smerom premietania, je **priamka**, rovnobežný priemet priamky rovnobežnej so smerom premietania je **bod**.

Priamka $\boldsymbol{c} \parallel \pi$



Definícia: Priesečník priamky s priemetňou sa nazýva **stopník priamky**.

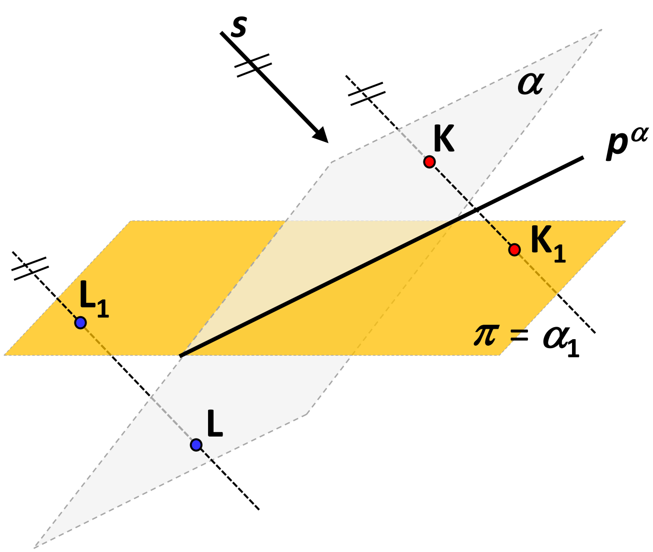
Stopník priamky $\boldsymbol{a}$ je bod $P^a = \boldsymbol{a} \cap \pi$.

Stopník priamky $\boldsymbol{b}$ je bod $P^b = \boldsymbol{b} \cap \pi$.

Priamka rovnobežná s priemetňou stopník nemá.

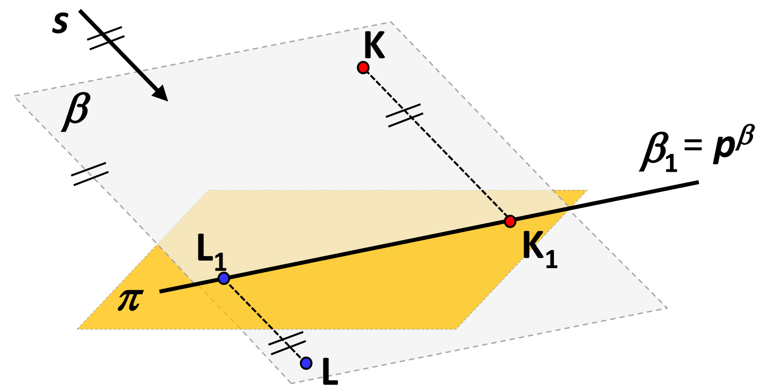
Rovnobežný priemet roviny

Rovina $\alpha \nparallel s$ a $\alpha \nparallel \pi$:



Rovnobežný priemet roviny α je celá priemetňa $\alpha_1 = \pi$.

Rovina $\beta \parallel s$:



Rovnobežný priemet roviny β je priamka β_1.

Veta: **Rovnobežný priemet roviny,** ktorá nie je rovnobežná so smerom premietania, je **celá priemetňa**, rovnobežný priemet roviny rovnobežnej so smerom premietania je **priamka**.

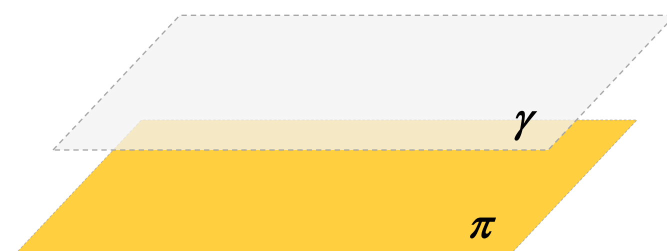
Definícia: Priesečnica roviny s priemetňou sa nazýva **stopa roviny**.

Stopa roviny α je priamka $p^{\alpha} = \alpha \cap \pi$.

Stopa roviny β je priamka $p^{\beta} = \beta \cap \pi$.

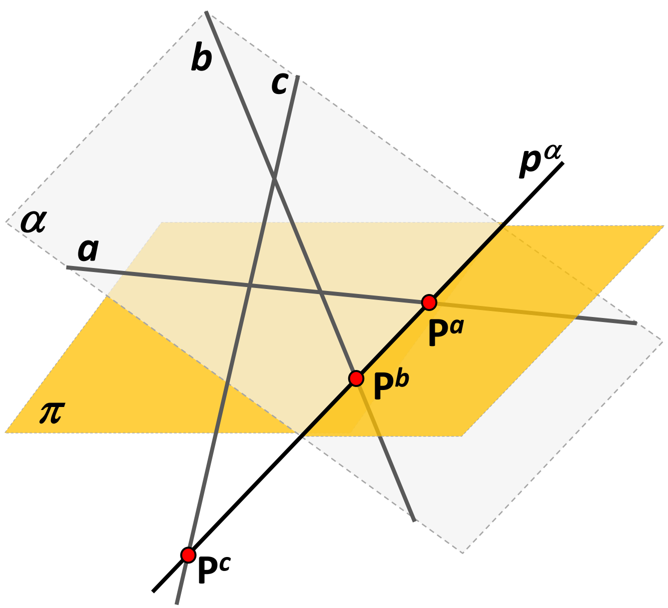
Rovina rovnobežná s priemetňou stopu nemá.

Rovina $\gamma \parallel \pi$:



Priamky v rovine $\alpha \nparallel \pi$

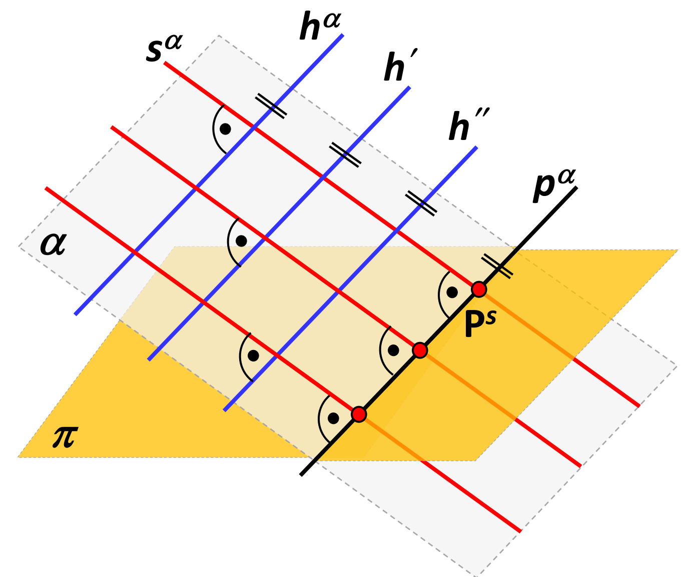
Priamky $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ roviny α sú rôznobežné s priemetňou. Kde ležia ich stopníky?



Stopníky $\mathbf{P}^a$, $\mathbf{P}^b$, $\mathbf{P}^c$ priamok $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ležia na stope $\boldsymbol{p}^\alpha$ roviny α.

Veta: Každá priamka roviny rôznobežná s priemetňou má stopník na stope tejto roviny.

Priamky $\boldsymbol{h}^\alpha$, $\boldsymbol{h}'$, $\boldsymbol{h}''$ roviny α sú rovnobežné s priemetňou, stopníky nemajú.



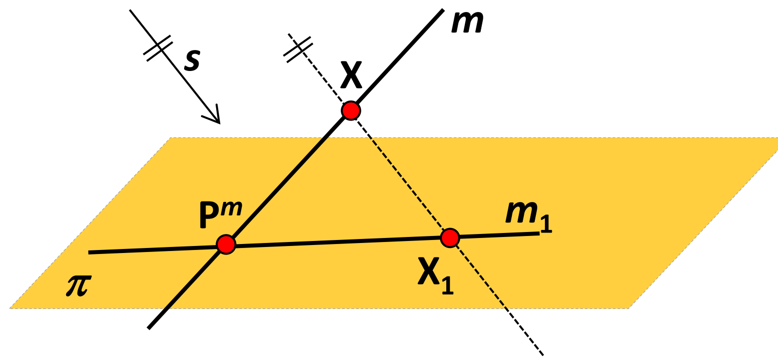
Definícia: Priamka roviny rovnobežná s priemetňou sa nazýva **hlavná priamka roviny** (hlavná priamka roviny je rovnobežná aj so stopou roviny). Označenie: $\boldsymbol{h}^\alpha$.

Definícia: Priamka roviny kolmá na stopu roviny sa nazýva **spádová priamka roviny** (spádová priamka roviny je kolmá aj na hlavné priamky roviny). Označenie: $\boldsymbol{s}^\alpha$.

Vlastnosti rovnobežného premietania

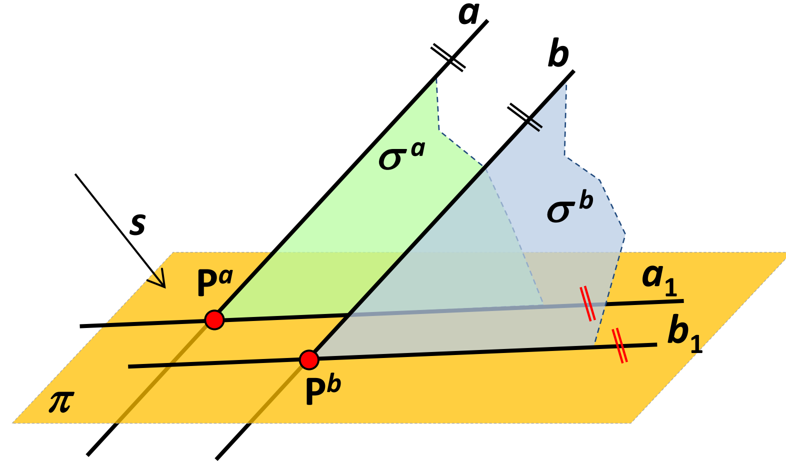
V1: Rovnobežné premietanie zachováva **incidenciu** geometrických útvarov, to znamená, že ak bod leží na geometrickom útvare, tak priemet bodu leží na priemete geometrického útvaru.

V prípade, že geometrický útvar je priamka platí:
ak $\mathbf{X} \in \boldsymbol{m}$, tak $\mathbf{X_1} \in \boldsymbol{m_1}$.



V2: Rovnobežné premietanie zachováva **rovnobežnosť priamok.**

Ak $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, tak $\boldsymbol{a_1} \parallel \boldsymbol{b_1}$.



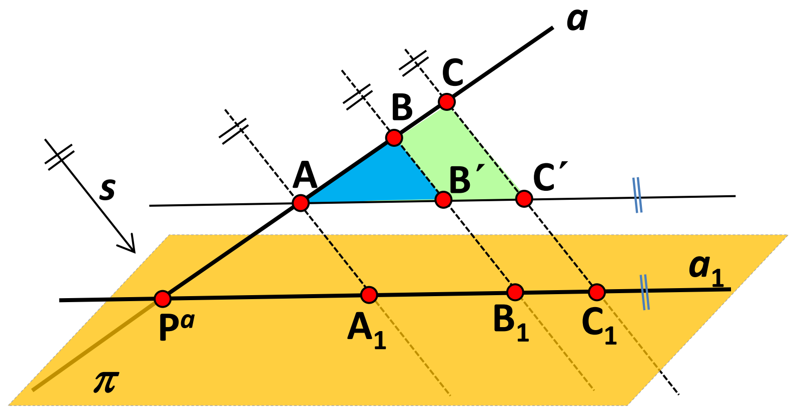
Vlastnosti rovnobežného premietania

V3: Rovnobežné premietanie zachováva **deliaci pomer troch bodov na priamke**.

Ak body **A**, **B**, **C** ležia na jednej priamke, **B ≠ C**, tak platí $(\mathbf{A},\mathbf{B};\mathbf{C}) = (\mathbf{A_1},\mathbf{B_1};\mathbf{C_1})$, to znamená:

$$|\overrightarrow{A_1C_1}|:|\overrightarrow{B_1C_1}| = |\overrightarrow{AC}|:|\overrightarrow{BC}|.$$

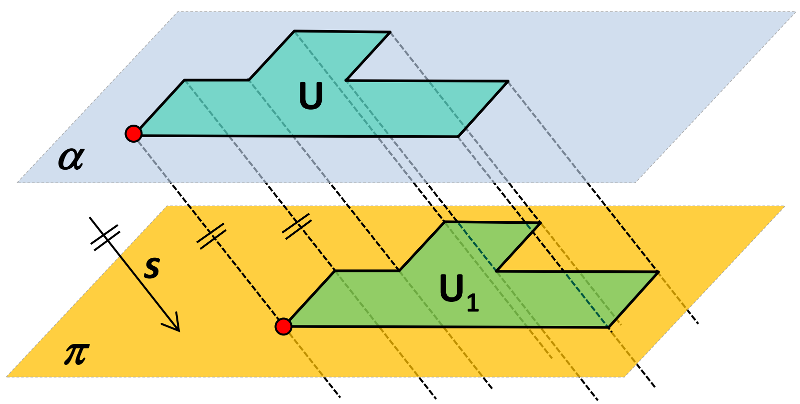
Vlastnosť **V3** vyplýva z podobnosti trojuholníkov $\Delta ABB'$, $\Delta ACC'$.



Dôsledok: Rovnobežným priemetom **stredu úsečky** je stred priemetu úsečky.

V4: Rovnobežným priemetom **útvaru,** ktorý leží v rovine rovnobežnej s priemetňou je **útvar zhodný s pôvodným útvarom**.

Útvar $\mathbf{U_1}$ má rovnaký tvar aj veľkosť ako útvar **U**, útvary **U** a $\mathbf{U_1}$ sú zhodné.



Kolmé premietanie

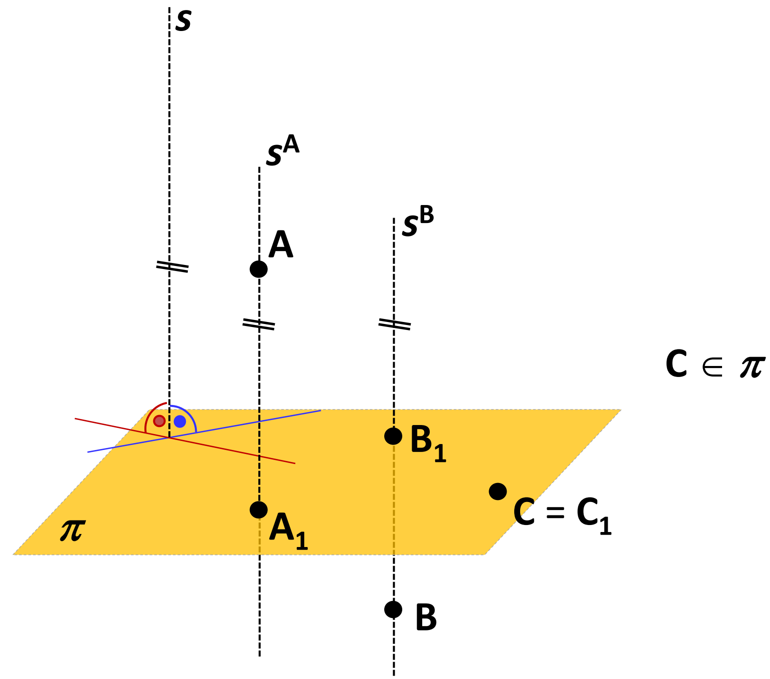
Kolmé premietanie je špeciálny prípad rovnobežného premietania, ak smer premietania je kolmý na priemetňu ($\boldsymbol{s} \perp \pi$).

Kolmé premietanie je určené priemetňou π. Pre smer premietania platí: $\boldsymbol{s} \perp \pi$.

Kolmý priemet bodu **A** je bod $\mathbf{A_1}$ – priesečník premietacej priamky $\boldsymbol{s}^{\mathbf{A}}$ s priemetňou π.

$\boldsymbol{s}^{\mathbf{A}}$, $\boldsymbol{s}^{\mathbf{A}} \perp \pi$, $\mathbf{A} \in \boldsymbol{s}^{\mathbf{A}}$ premietacia priamka bodu **A**,

$\mathbf{A_1}$ – kolmý priemet bodu **A**.

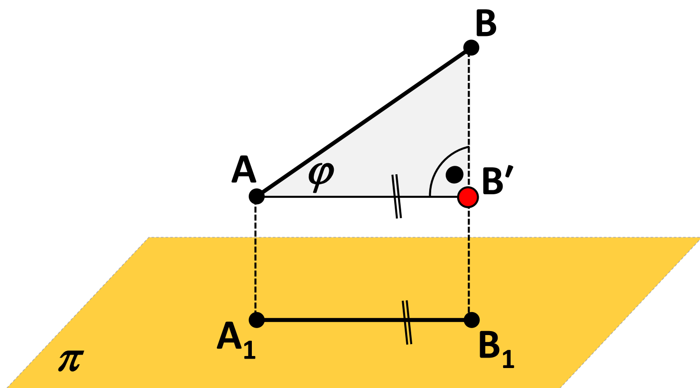


Kolmé premietanie ako špeciálny prípad rovnobežného premietania má vlastnosti **V1 – V4** rovnobežného premietania a navyše dve dôležité vlastnosti, označme ich **V5, V6**.

Vlastnosti kolmého premietania

V5: Pre dĺžku kolmého priemetu úsečky **AB** platí: $|A_1B_1| = |AB|.\cos\varphi$, kde φ je odchýlka priamky **AB** od priemetne. Rovnosť $|A_1B_1| = |AB|$ nastane len vtedy, keď je úsečka rovnobežná s priemetňou.

AB $\nparallel \pi$



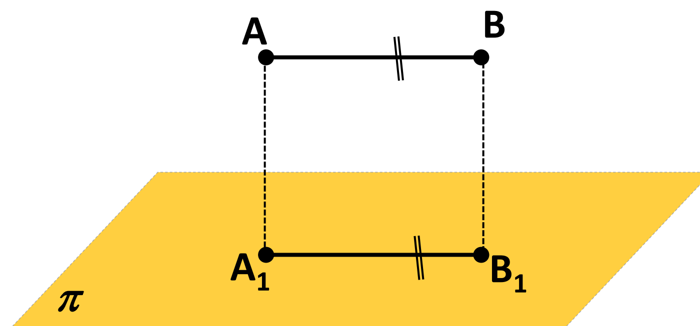
Z pravouhlého ΔABB´ vyplýva:

$\cos\varphi = |AB'| : |AB| = |A_1B_1| : |AB|$

$|A_1B_1| = |AB| \,.\, \cos\varphi,\ \cos\varphi \in (0, 1)$

$|A_1B_1| < |AB|$

AB $\parallel \pi$

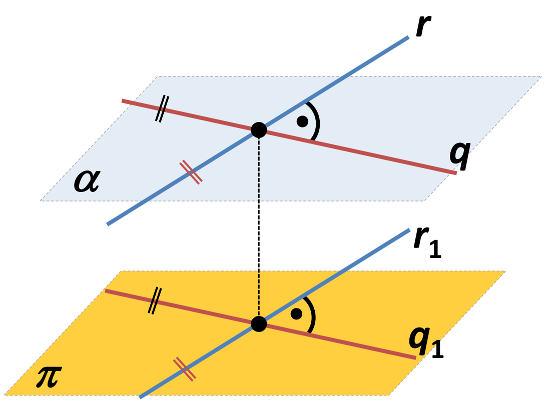


$|A_1B_1| = |AB|$

Vlastnosti kolmého premietania

V6: Kolmým priemetom pravého uhla je pravý uhol, ak jedno jeho rameno je rovnobežné s priemetňou a druhé nie je kolmé na priemetňu.

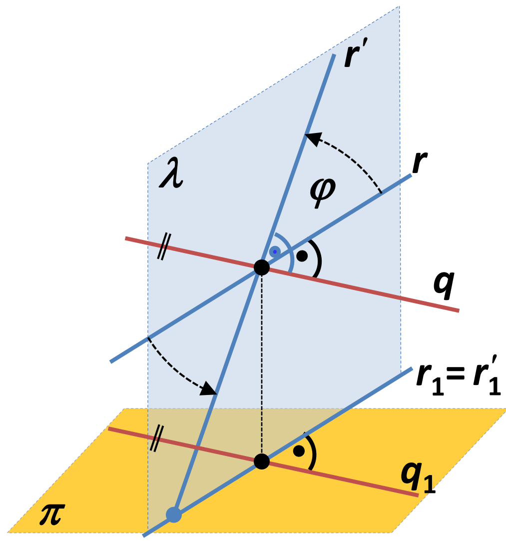
$\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{q}$



$r_1 \perp q_1$ (vyplýva z vlastnosti **V4**).

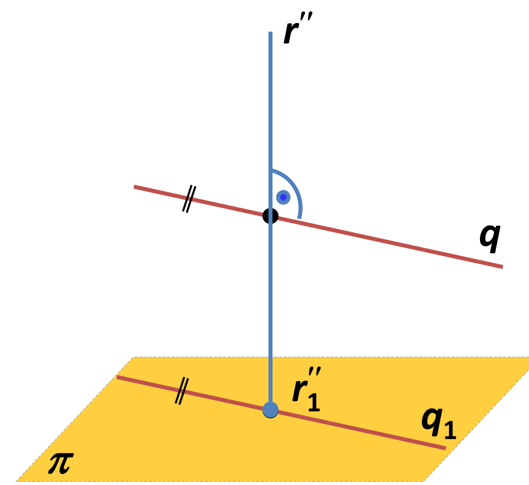
$\boldsymbol{r}' \subset \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \perp \boldsymbol{q}, 0° < \boldsymbol{\varphi} < 90°$

$\boldsymbol{r}' \perp \boldsymbol{q}$



$r_1' \perp q_1$.

$\boldsymbol{r}'' \perp \boldsymbol{q}$



r_1'' je bod.

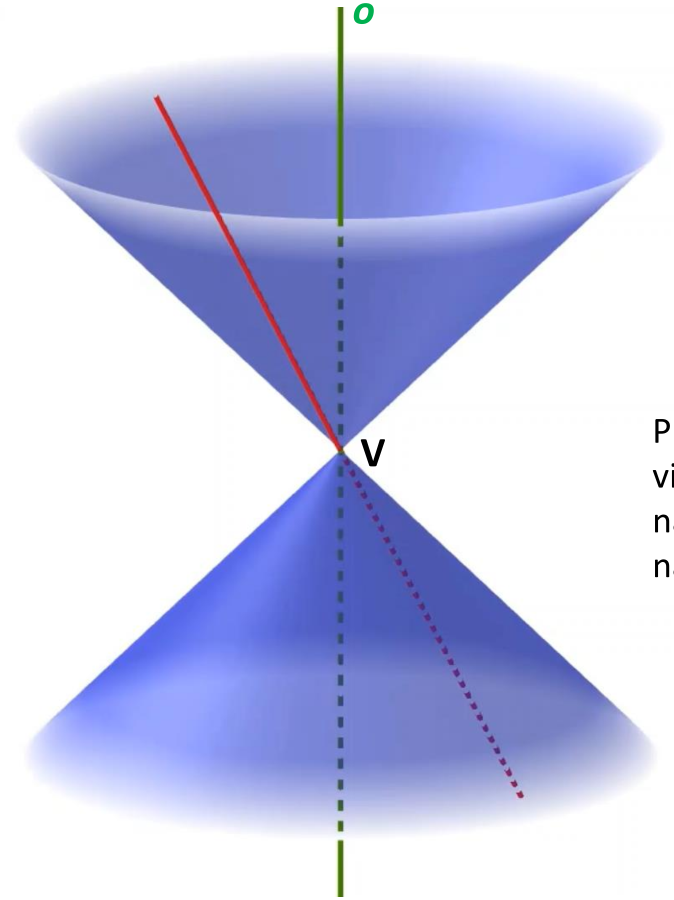
Kužeľosečky, elipsa

Klasifikácia kužeľosečiek

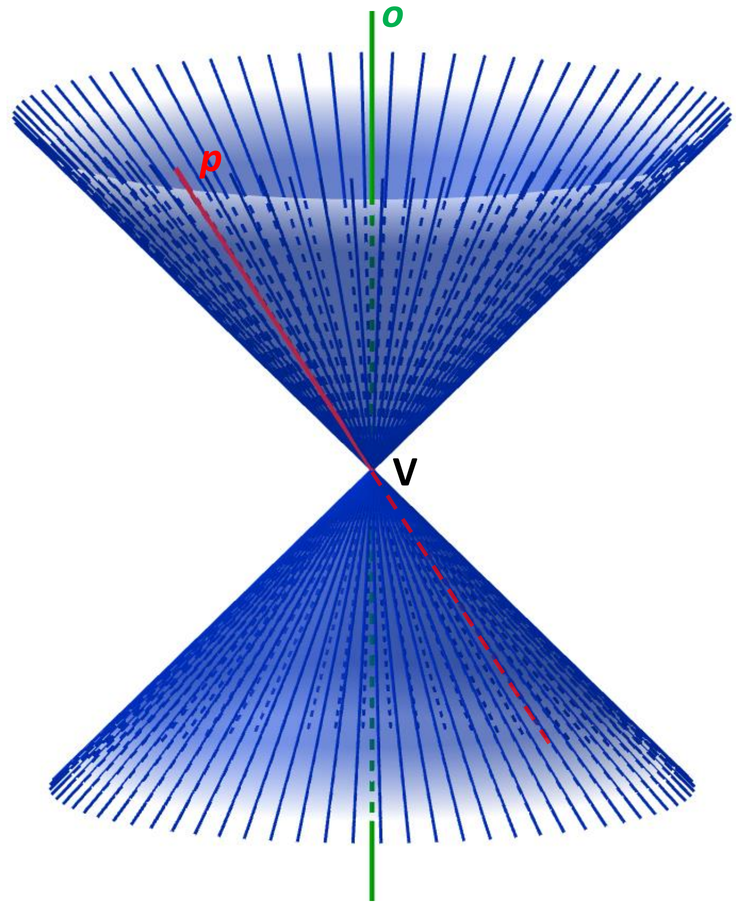
Definícia: **Rotačná kužeľová plocha** vznikne rotáciou priamky ***p*** okolo priamky ***o***, pričom priamky ***p*** a ***o*** sú rôznobežné.

- Priamka ***o*** sa nazýva **os** rotačnej kužeľovej plochy.
- Priesečník priamok ***p*** a ***o*** sa nazýva **vrchol** rotačnej kužeľovej plochy a označíme ho **V** (**V** = ***p*** ∩ ***o***).

- Priamka rotačnej kužeľovej plochy sa nazýva **tvoriaca priamka**.
- Každá tvoriaca priamka ***t*** rotačnej kužeľovej plochy prechádza jej vrcholom **V** (**V** ∈ ***t***).

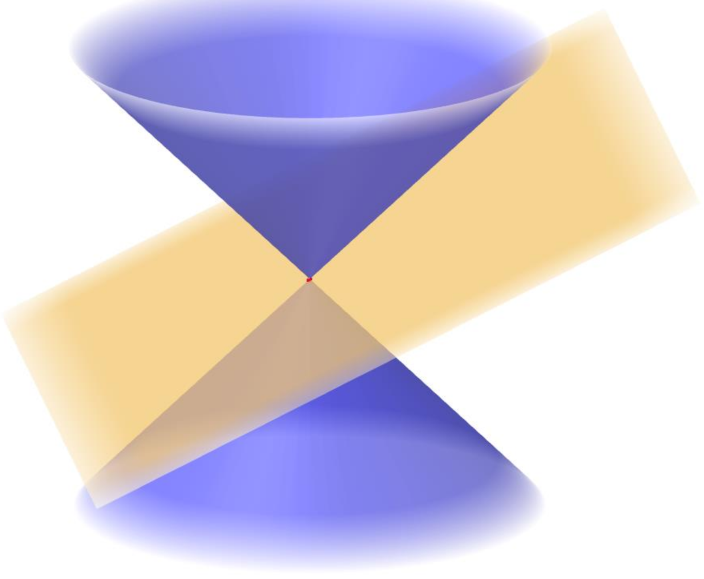


Pre ďalšie spustenie videa prejdite myšou na obrázok a kliknite na prehrávanie



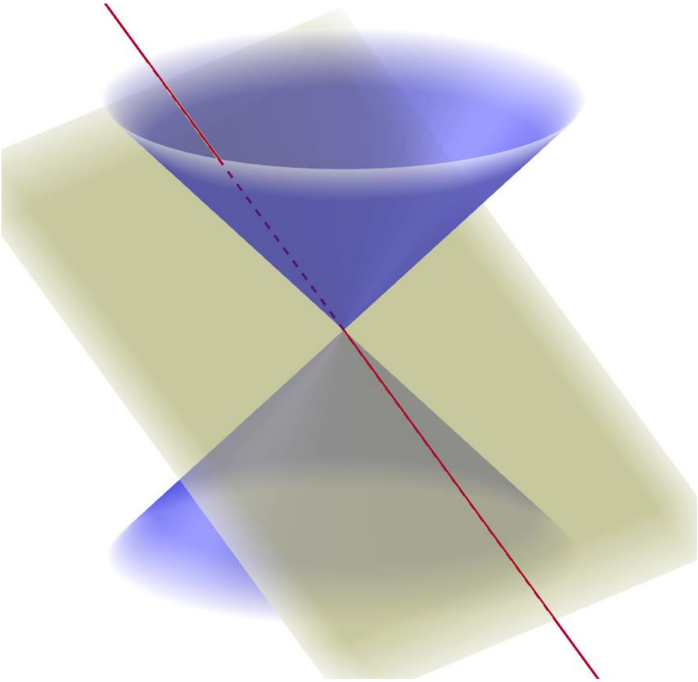
Definícia: **Kužeľosečky** sú rovinné rezy rotačnej kužeľovej plochy.

- Ak rovina rezu obsahuje vrchol kužeľovej plochy, tak rezom je **singulárna kužeľosečka**:
  - bod,
  - priamka,
  - dve rôznobežné priamky.



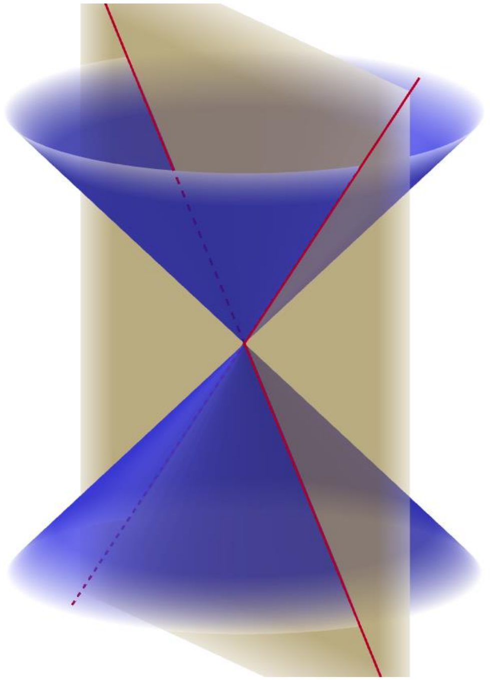
Bod

Rovina rezu pretína rotačnú kužeľovú plochu v jednom bode – vo vrchole rotačnej kužeľovej plochy.



Priamka

Rovina rezu sa dotýka rotačnej kužeľovej plochy pozdĺž jednej tvoriacej priamky.

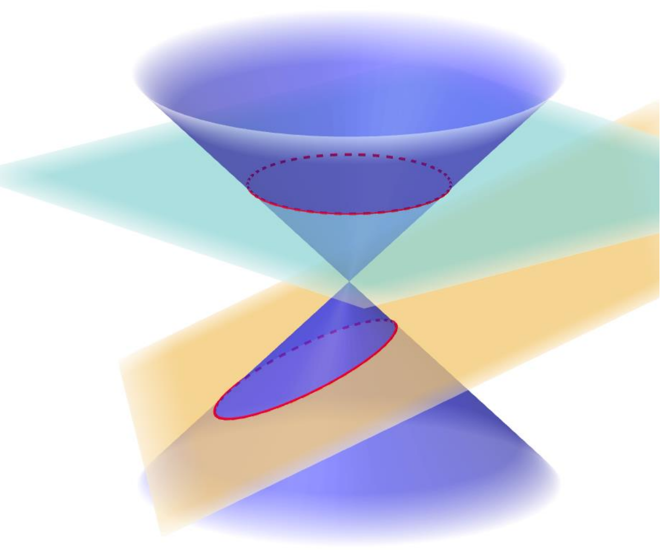


Dve rôznobežné priamky

Rovina rezu pretína rotačnú kužeľovú plochu v dvoch tvoriacich priamkach.

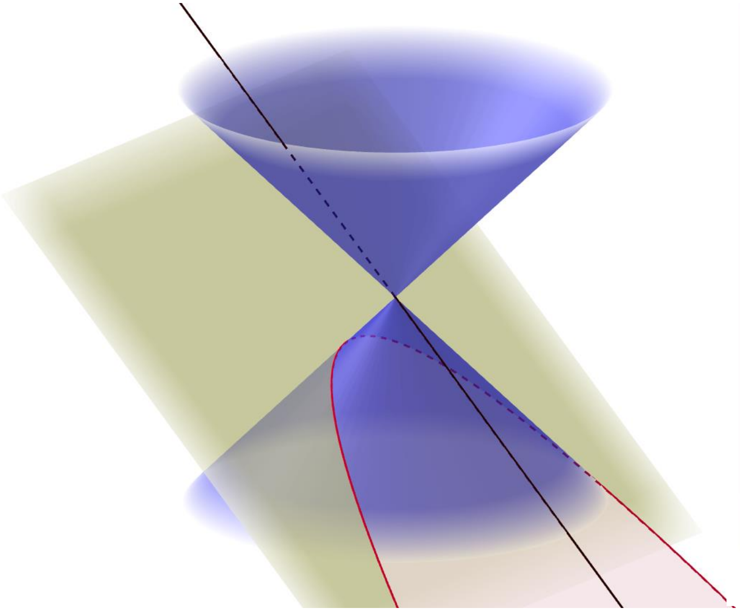
Definícia: **Kužeľosečky** sú rovinné rezy rotačnej kužeľovej plochy.

- Ak rovina rezu neobsahuje vrchol kužeľovej plochy, tak rezom je **regulárna kužeľosečka**:
  - kružnica,
  - elipsa,
  - parabola,
  - hyperbola.



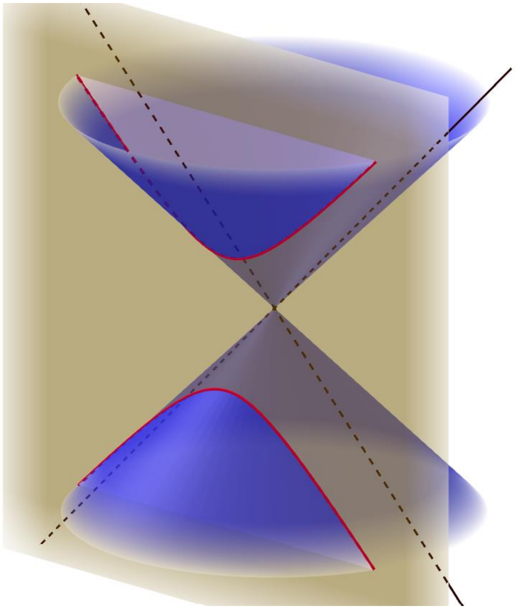
Kružnica, elipsa

Rovina rezu nie je rovnobežná so žiadnou tvoriacou priamkou rotačnej kužeľovej plochy.



Parabola

Rovina rezu je rovnobežná s jednou tvoriacou priamkou rotačnej kužeľovej plochy.



Hyperbola

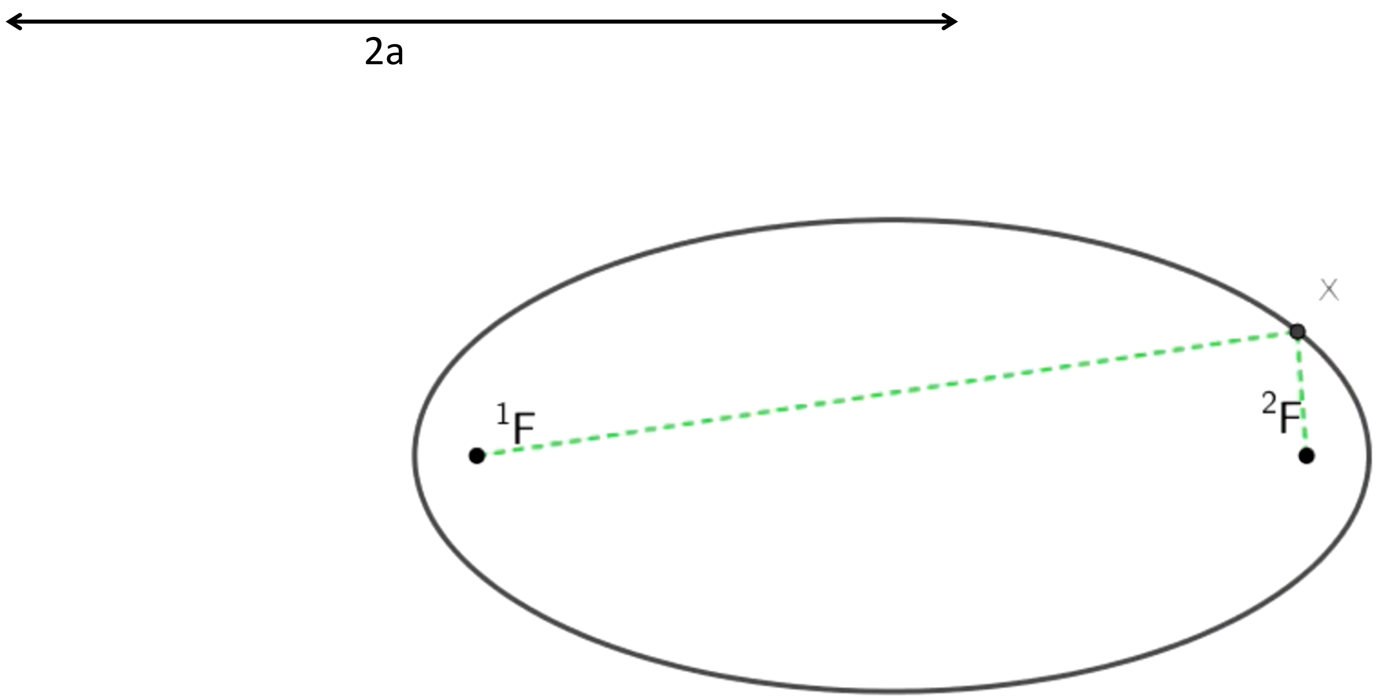
Rovina rezu je rovnobežná s dvoma tvoriacimi priamkami rotačnej kužeľovej plochy.

Elipsa

Definícia: **Elipsa** je množina všetkých bodov v rovine $\mathbf{E^2}$, ktoré majú od dvoch daných bodov konštantný súčet vzdialeností väčší ako vzdialenosť týchto bodov.

- Dva dané body sa nazývajú **ohniská elipsy** a označíme ich $^1\mathbf{F}$, $^2\mathbf{F}$.
- Súčet vzdialeností označíme 2a.

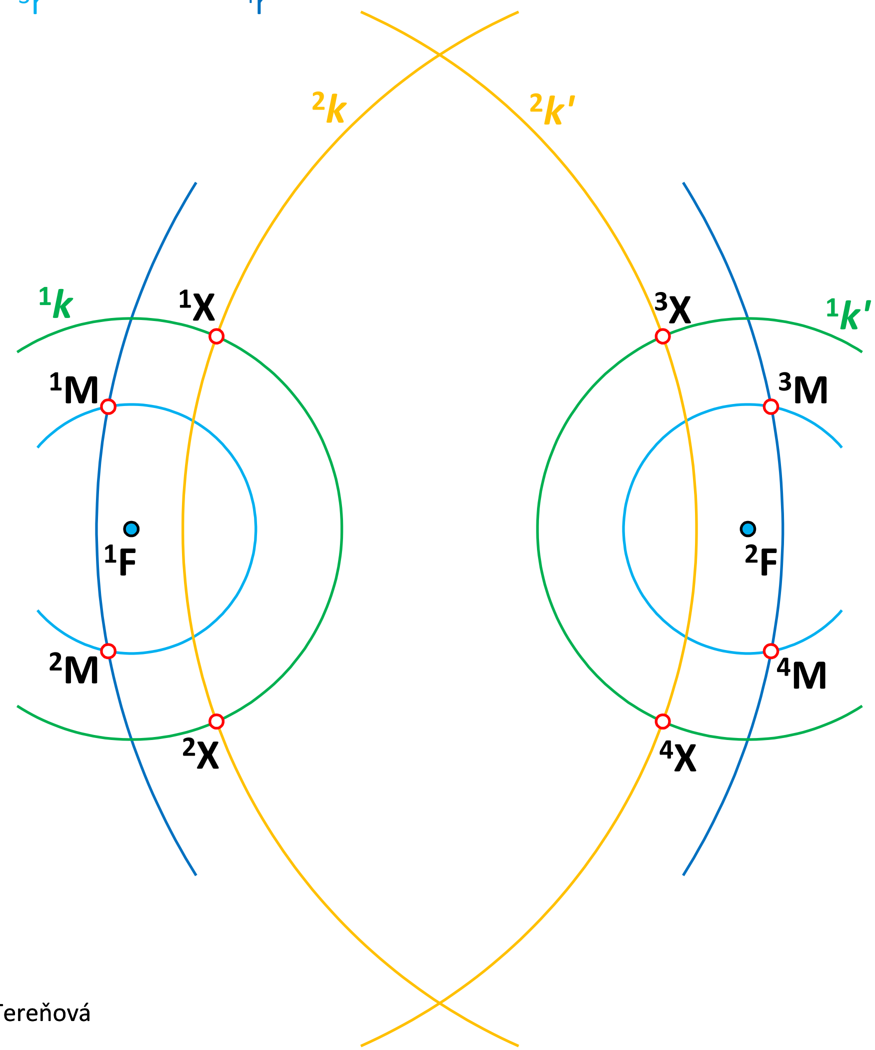
- Symbolický zápis: Elipsa = $\{\forall \mathbf{X} \in \mathbf{E^2};\ |\mathbf{X}\ {}^1\mathbf{F}| + |\mathbf{X}\ {}^2\mathbf{F}| = 2a,\ 2a > |{}^1\mathbf{F}\ {}^2\mathbf{F}|\}$



Pre ďalšie spustenie videa prejdite myšou na obrázok a kliknite na prehrávanie

Ohnisková konštrukcia bodov elipsy (záhradnícka konštrukcia)

Príklad 2.1: Elipsa je daná ohniskami $^{1}\mathbf{F}$, $^{2}\mathbf{F}$ a dĺžkou 2a, 2a > $|^{1}\mathbf{F}\ ^{2}\mathbf{F}|$. Zostrojte body elipsy.



$|\mathbf{KL}|$ = 2a

Postup:

1. Bod **1**; **1** ∈ **KL**, ľubovoľný bod úsečky **KL**, pre ktorý platí:
   $|\mathbf{K1}| > ½\ (2a – |^{1}\mathbf{F}\ ^{2}\mathbf{F}|)$,
   $|\mathbf{L1}| > ½\ (2a – |^{1}\mathbf{F}\ ^{2}\mathbf{F}|)$.
2. Dĺžky ^1r, ^2r; $|\mathbf{K1}| = {}^1r$, $|\mathbf{1L}| = {}^2r$, platí: $^1r + {}^2r = 2a$.
3. Kružnica $^{1}\boldsymbol{k}$; $^{1}\boldsymbol{k}(^{1}\mathbf{F}, {}^1r)$.
4. Kružnica $^{2}\boldsymbol{k}$; $^{2}\boldsymbol{k}(^{2}\mathbf{F}, {}^2r)$.
5. Body elipsy: $^{1}\boldsymbol{k} \cap {}^{2}\boldsymbol{k} = \{^{1}\mathbf{X}, {}^{2}\mathbf{X}\}$.

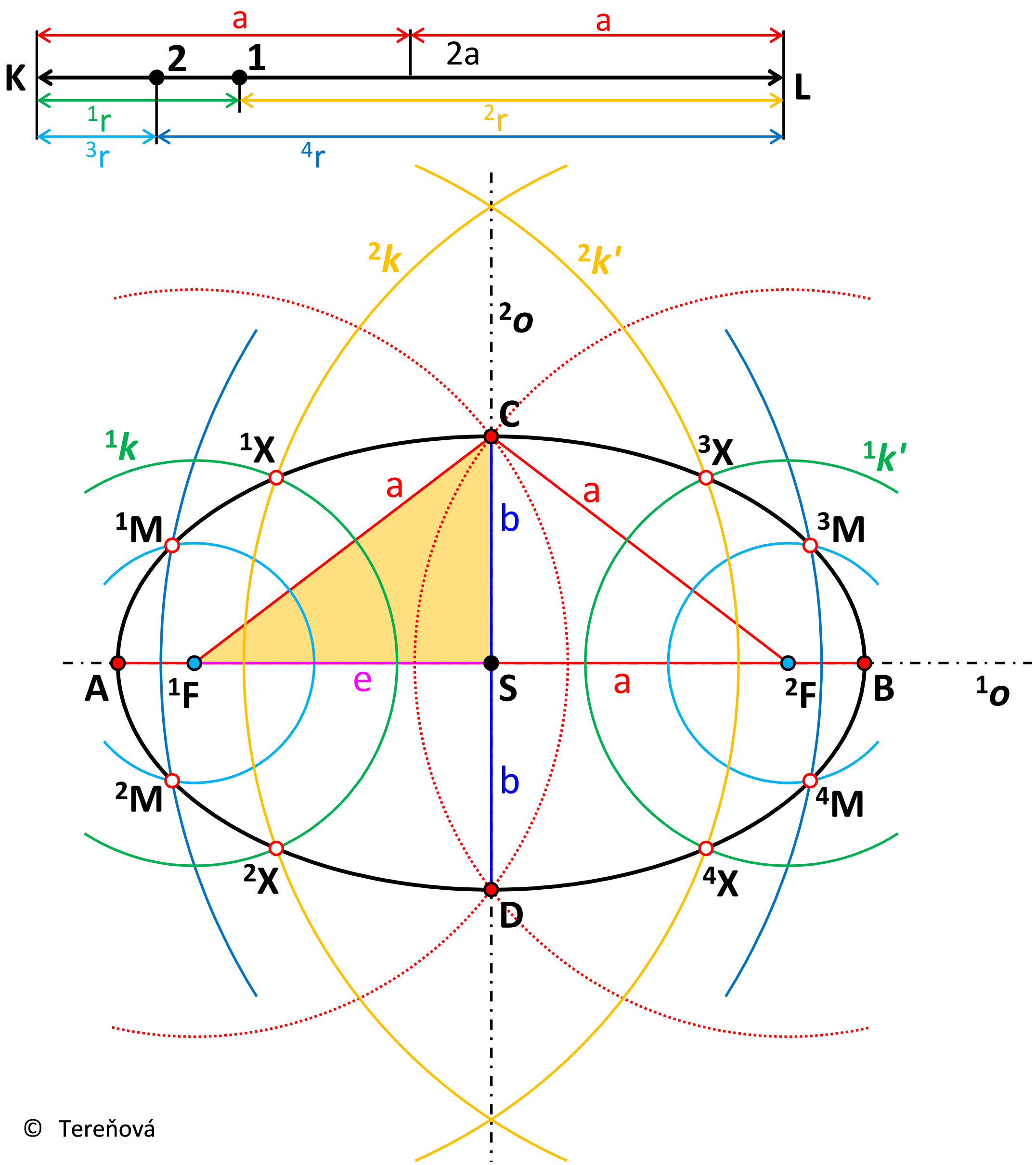
Pomocou dĺžok ^1r, ^2r môžeme zostrojiť ďalšie dva body elipsy:

5. Kružnica $^{1}\boldsymbol{k}'$; $^{1}\boldsymbol{k}'\ (^{2}\mathbf{F}, {}^1r)$.
6. Kružnica $^{2}\boldsymbol{k}'$; $^{2}\boldsymbol{k}'\ (^{1}\mathbf{F}, {}^2r)$.
7. Body elipsy: $^{1}\boldsymbol{k}' \cap {}^{2}\boldsymbol{k}' = \{^{3}\mathbf{X}, {}^{4}\mathbf{X}\}$.

Poznámka: *Ďalšie body elipsy zostrojíme pomocou ľubovoľného bodu* **2** ∈ **KL**. *Na obrázku sú zostrojené body* $^{1}\mathbf{M}$, $^{2}\mathbf{M}$, $^{3}\mathbf{M}$, $^{4}\mathbf{M}$ *elipsy.*

Ohnisková konštrukcia bodov elipsy (záhradnícka konštrukcia)

Príklad 2.1: Elipsa je daná ohniskami **^{1}F**, **^{2}F** a dĺžkou 2a, 2a > |**^{1}F ^{2}F**|. Zostrojte body elipsy.



|**KL**| = 2a

Zostrojíme osi elipsy a stred elipsy:

1. **^{1}F^{2}F** = **^{1}*o*** – hlavná os elipsy.
2. Os úsečky **^{1}F^{2}F** = **^{2}*o*** – vedľajšia os elipsy.
3. **S** = **^{1}*o*** ∩ **^{2}*o*** – stred elipsy.

Zostrojíme vrcholy elipsy:

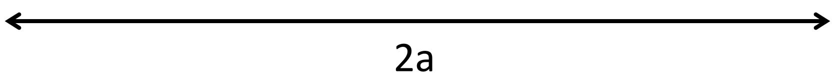
1. Body **A**, **B** – hlavné vrcholy elipsy;
   A, **B** ∈ **^{1}*o***, |**AS**| = |**BS**| = a.
2. Body **C**, **D** – vedľajšie vrcholy elipsy;
   C, **D** ∈ **^{2}*o***, |**^{1}FC**| = |**^{1}FD**| = a.

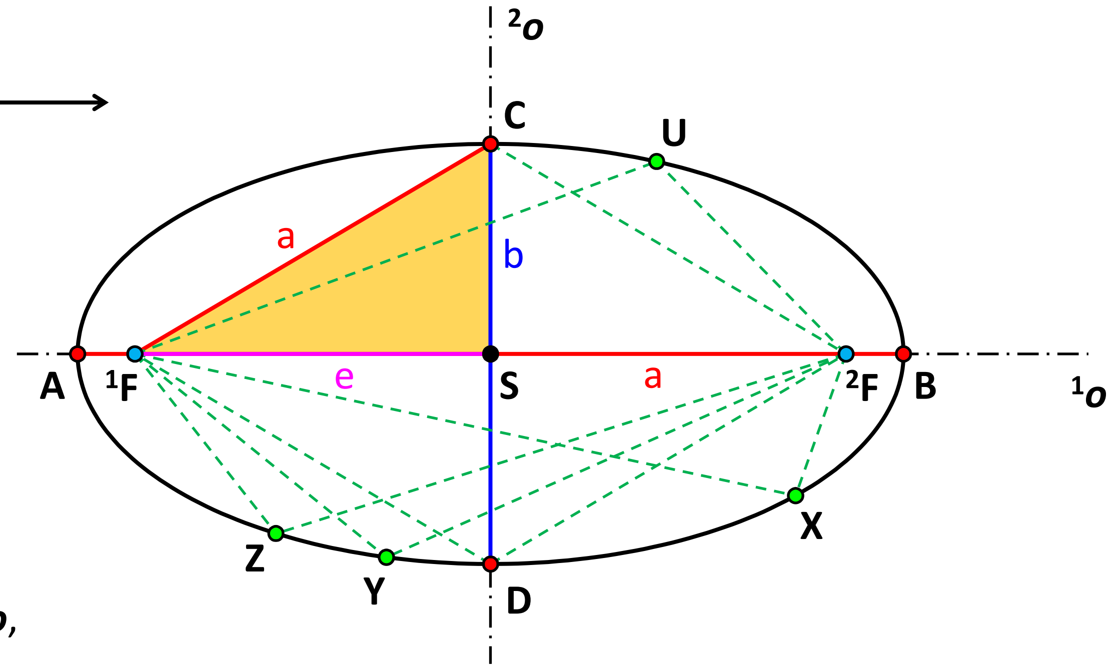
Poznámka: *Body* ***A***, ***B***, ***C*** *a* ***D*** *sú body elipsy, lebo spĺňajú definíciu elipsy.*

Poznámka: *Na iné zobrazenie elipsy môžeme použiť oskulačné kružnice (pozri nasledujúci príklad).*

Definícia: **Elipsa** je množina všetkých bodov v rovine $\mathbf{E^2}$, ktoré majú od dvoch daných bodov konštantný súčet vzdialeností väčší ako vzdialenosť týchto bodov.

Elipsa = $\{\forall \mathbf{X} \in \mathbf{E^2};\ |\mathbf{X}\,{}^1\mathbf{F}| + |\mathbf{X}\,{}^2\mathbf{F}| = 2a,\ 2a > |{}^1\mathbf{F}\,{}^2\mathbf{F}|\}$





Základné pojmy a označenia:

- hlavná os elipsy: ${}^1\mathbf{F}{}^2\mathbf{F} = {}^1\boldsymbol{o}$,
- vedľajšia os elipsy: os úsečky ${}^1\mathbf{F}{}^2\mathbf{F} = {}^2\boldsymbol{o}$,
- stred elipsy: $\mathbf{S} = {}^1\boldsymbol{o} \cap {}^2\boldsymbol{o}$,

- hlavné vrcholy **A**, **B** elipsy: $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in {}^1\boldsymbol{o}$, $|\mathbf{AS}| = |\mathbf{BS}| = a$,
- vedľajšie vrcholy **C**, **D** elipsy: $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in {}^2\boldsymbol{o}$, $|{}^1\mathbf{FC}| = |{}^1\mathbf{FD}| = a$,

- a – dĺžka hlavnej polosi elipsy, $a = |\mathbf{AS}| = |\mathbf{BS}|$,
- b – dĺžka vedľajšej polosi elipsy, $b = |\mathbf{CS}| = |\mathbf{DS}|$,
- e – excentricita elipsy, $e = |{}^1\mathbf{FS}| = |{}^2\mathbf{FS}|$,
- $\boldsymbol{\Delta}{}^1\mathbf{FSC}$ – charakteristický trojuholník elipsy, platí $a^2 = e^2 + b^2$.

Súmernosť elipsy

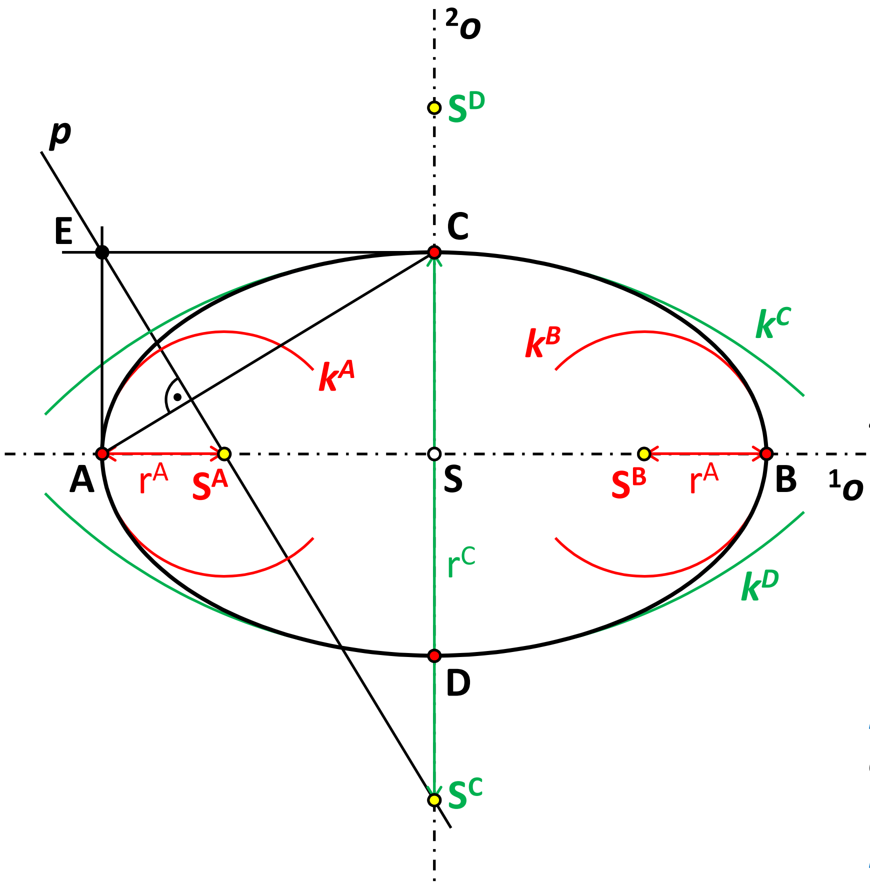
Elipsa je súmerná:

- podľa svojej hlavnej osi,
- podľa svojej vedľajšej osi,
- podľa svojho stredu.

Oskulačná kružnica

Oskulačná kružnica v bode **X** krivky sa dotýka krivky v tomto bode. Oskulačná kružnica a krivka majú v bode **X** spoločnú dotyčnicu a rovnakú prvú krivosť.

Príklad 2.2: Dané sú vrcholy **A**, **B**, **C** a **D** elipsy. Zostrojte oskulačné kružnice vo vrcholoch elipsy.



Postup:

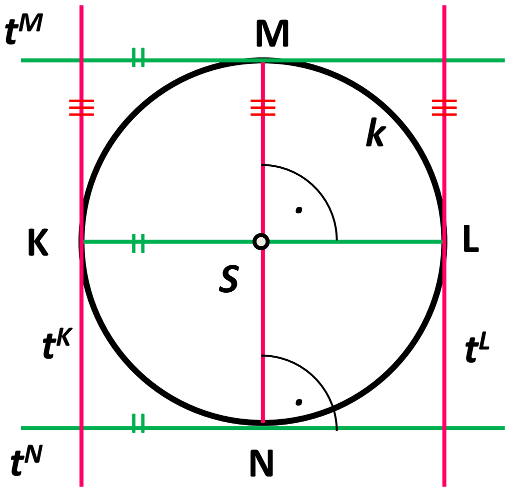
1. Bod **E**; **ASCE** je obdĺžnik.
2. Priamka ***p***; **E** $\in$ ***p***, ***p*** $\perp$ **AC**.
3. Stredy oskulačných kružníc:
   p $\cap$ ^{1}***o*** = $\mathbf{S^A}$ – stred oskulačnej kružnice vo vrchole **A**,
   p $\cap$ ^{2}***o*** = $\mathbf{S^C}$ – stred oskulačnej kružnice vo vrchole **C**.
4. Oskulačné kružnice:
   k^A ($\mathbf{S^A}$, r^A = |$\mathbf{S^A A}$|) – oskulačná kružnica vo vrchole **A**,
   k^C ($\mathbf{S^C}$, r^C = |$\mathbf{S^C C}$|) – oskulačná kružnica vo vrchole **C**.
5. Oskulačné kružnice vo vrcholoch **B** a **D** zostrojíme využitím súmernosti elipsy podľa jej stredu **S**.

Poznámka: *Elipsa sa dotýka oskulačných kružníc* k^A, k^B *zvonku a oskulačných kružníc* k^C, k^D *zvnútra.*

Poznámka: *Priamku **p**, ktorá je potrebná na konštrukciu stredov oskulačných kružníc, môžeme zostrojiť aj inak, pozri nasledujúcu stranu.*

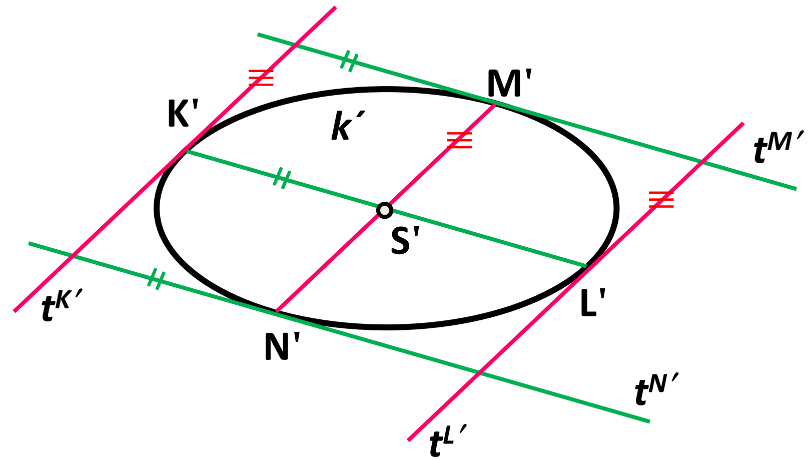
Združené priemery elipsy

Definícia: Dva priemery elipsy, pre ktoré platí, že dotyčnice v krajných bodoch jedného priemeru sú rovnobežné s druhým priemerom, nazývame **združené priemery elipsy**.



$t^K \parallel MN \parallel t^L$

$t^M \parallel KL \parallel t^N$



$t^{M'} \parallel K'L' \parallel t^{N'}$

$t^{K'} \parallel M'N' \parallel t^{L'}$

Poznámka: *Platnosť vety 2 vyplýva z vlastnosti, že dotyčnice v krajných bodoch priemeru kružnice **k** sú kolmé na tento priemer. Potom afinita zachováva rovnobežnosť týchto dotyčníc s priemerom na neho kolmým.*

PRIEČKOVÁ bodová konštrukcia elipsy

Príklad 4.31: Dané sú združené priemery **KL**, **MN** elipsy. Zostrojte ďalšie body elipsy medzi **K** a **L**.

Postup:

1. Zostrojíme priesečníky dotyčníc elipsy v krajných bodoch združených priemerov **KL**, **MN**:

   $\mathbf{X} = t^K \cap t^M$, $\mathbf{Y} = t^L \cap t^M$.

2. Rozdelením úsečky **MS** na *n* zhodných častí (počet závisí od požiadaviek na presnosť rysovania, na obrázku *n* = 4) zostrojíme body **1**, **2**, ..., **n-1**.

3. Rozdelením úsečky **MX** na rovnaký počet *n* zhodných častí zostrojíme body **1′**, **2′**, ..., **n′-1**.

4. Dostaneme body elipsy pre *n* = 4 ako priesečníky: **L1** ∩ **K1′**, **L2** ∩ **K2′**, **L3** ∩ **K3′**.

5. Analogicky konštruujeme body medzi bodmi **M** a **L**.