

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE  
STAVEBNÁ FAKULTA

Evidenčné číslo: SvF-16646-98404

AUTOMATICKÁ SEGMENTÁCIA OBRAZU POMOCOU SIETE  
ROVINNÝCH KRIVIEK

Diplomová práca

2023

Bc. Eva Sabatulová

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE  
STAVEBNÁ FAKULTA

AUTOMATICKÁ SEGMENTÁCIA OBRAZU POMOCOU SIETE  
ROVINNÝCH KRIVIEK

Diplomová práca

Študijný program: Matematicko-počítačové modelovanie  
Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika  
Školiace pracovisko: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie  
Školiteľ: Ing. Martin Ambroz, PhD.

Bratislava 2023

Bc. Eva Sabatulová



## ZADANIE DIPLOMOVEJ PRÁCE

Študentka: **Bc. Eva Sabatulová**  
ID študenta: 98404  
Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie  
Študijný odbor: matematika  
Vedúci práce: Ing. Martin Ambroz, PhD.  
Vedúci pracoviska: Ing. Marek Macák, PhD.

Názov práce: **Automatická segmentácia obrazu pomocou siete rovinných kriviek**

Jazyk, v ktorom sa práca vypracuje: slovenský jazyk

Špecifikácia zadania:

Cieľom práce je vytvoriť model automatickej segmentácie pomocou siete rovinných kriviek. Vychádzať bude z existujúcich modelov pre vývoj segmentačných kriviek a príslušných algoritmov, ktoré zabezpečujú topologické zmeny vyvíjajúcich sa kriviek. Novým modelom dosiahneme možnosť zachovať hranicu medzi krivkami po ich spojení, čo umožní jednoznačne určiť hranicu medzi rôznymi segmentovanými oblasťami.

Termín odovzdania diplomovej práce: 11. 05. 2023  
Dátum schválenia zadania diplomovej práce: 03. 04. 2023  
Zadanie diplomovej práce schválil: prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc. – garant študijného programu

## **POKYNY**

### **na vypracovanie diplomovej práce**

#### **Úvodné ustanovenie**

V zmysle zákona č. 131/2002 Z. z. o vysokých školách a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov je súčasťou štúdia podľa každého študijného programu aj záverečná práca. Jej obhajoba patrí medzi štátne skúšky. Záverečnou prácou pri štúdiu podľa študijného programu druhého stupňa je diplomová práca. Podkladom na vypracovanie diplomovej práce je zadanie diplomovej práce

#### **Štruktúra záverečnej práce**

- titulný list,
- zadanie záverečnej práce,
- pokyny na vypracovanie,
- vyhlásenie autora,
- názov a abstrakt v slovenskom a v anglickom jazyku (spolu v rozsahu jednej strany),
- obsah s očíslovaním kapitol,
- zoznam príloh,
- zoznam skratiek a značiek,
- text samotnej práce (odporúčané členenie),
  - úvod,
  - súčasný stav problematiky,
  - ciele záverečnej práce,
  - vlastné riešenie členené na kapitoly podľa charakteru práce,
  - zhodnotenie dosiahnutých výsledkov resp. navrhnutých riešení,
  - záver,
- resumé v slovenskom jazyku v rozsahu spravidla 10 % rozsahu ZP (len pre práce vypracované v cudzom jazyku),
- zoznam použitej literatúry,
- prílohy (výkresy, tabuľky, mapy, náčrty) vrátane postera s rozmermi 1000x700 mm.

#### **Rozsah a forma**

1. Obsah a forma záverečnej práce musí byť spracovaná v zmysle vyhlášky MŠVVaŠ SR č. 233/2011 Z. z., ktorou sa vykonávajú niektoré ustanovenia zákona č. 131/2002 Z. z. a v zmysle Metodického usmernenia č. 56/2011 o náležitostiach záverečných prác.
2. Odporúčaný rozsah záverečnej práce je 30 až 50 strán. Odovzdáva sa v jednom vyhotovení, ktoré musí byť viazané v pevnej väzbe (nie hrebeňovej) tak, aby sa jednotlivé listy nedali vyberať.
3. Autor práce je povinný vložiť prácu v elektronickej forme do akademického informačného systému. Autor zodpovedá za zhodu listinného aj elektronickeho vyhotovenia.

4. Po vložení závěrečné práce do informačního systému předloží autor fakultě ním podpísaný návrh licenční zmluvy. Návrh licenční zmluvy je vytvorený akademickým informačným systémom.
5. Odporúčaný typ písma je Times New Roman, veľkosť 12 a je jednotný v celej práci. Odporúčané nastavenie strany - riadkovanie 1,5, okraj vnútorný 3,5 cm, vonkajší 2 cm, zhora a zdola 2,5 cm, orientácia na výšku, formát A4.
6. Obrázky a vzorce sa číslujú v rámci jednotlivých kapitol (napr. obr. 3.1 je obrázok č. 1 v kapitole 3). Vzorce sa číslujú na pravom okraji riadku v okrúhlych zátvorkách - napr. (3.1).
7. Všetky výpočty musia byť usporiadané tak, aby bolo možné preveriť ich správnosť.
8. Pri všetkých prevzatých vzorcoch, tabuľkách, citovaných častiach textu musí byť uvedený prameň.
9. Citovanie literatúry vrátane elektronických materiálov sa uvádza podľa STN ISO 690 (01 0197): 2012. *Informácie a dokumentácia. Návod na tvorbu bibliografických odkazov na informačné pramene a ich citovanie.*
10. Príklad zoznamu bibliografických odkazov:  
ABELOVIČ, J. a kol.: *Meranie v geodetických sieťach*. Bratislava, Alfa 1990, ISBN 0-1554-9173.  
MICHALČÁK, O. – ADLER, E.: Výskum stability dunajských hrádzí. In: *Zborník vedeckých prác Stavebnej fakulty SVŠT*. Bratislava: Edičné stredisko SVŠT 1976, s. 17-28. ISBN 0-3552-5214.  
ŠÜTTI, J.: Určovanie priestorových posunov stavebných objektov. In *Geodetický kartografický obzor* [online]. Praha: Český úřad zeměměřický a katastrální, 2000, roč. 2, č. 3, s. 8-16 [cit. 31.10.2003]. ISSN 0811-6900. Dostupné na: <http://www.lac.uk/iso/tc456>  
Article 18. Technical Cooperation. <http://www.lac.uk/iso/tc456> (2013-09-28)
11. Za jazykovú a terminologickú správnosť závěrečné práce zodpovedá diplomant.
12. Formu postera (elektronická alebo aj tlačенá) určí garant študijného programu.
13. Vzor pre poster je uvedený na dokumentovom serveri v akademickom informačnom systéme univerzity.

.....  
meno garanta študijného programu

Ustanovenia týchto pokynov som vzal na vedomie. Som si vedomý(á), že ak nebude moja závěrečná práca vypracovaná v súlade s týmito pokynmi, nebude prijatá na obhajobu.

V Bratislave .....

.....  
meno študenta

### **Čestné prehlásenie**

Prehlasujem, že som túto záverečnú prácu vypracovala samostatne pod vedením vedúceho záverečnej práce, s použitím literatúry uvedenej v zozname použitej literatúry.

Bratislava 11. 5. 2023

## Abstrakt

**Názov práce:** Automatická segmentácia obrazu pomocou siete rovinných kriviek

**Abstrakt:** Práca sa zaoberá rozšírením už existujúceho segmentačného modelu, ktorý na automatickú segmentáciu používa uzavreté krivky. Tento model je v práci rozšírený na použitie siete rovinných kriviek, vďaka čomu je možné jednoznačne určiť hranicu medzi segmentovanými oblasťami. V práci sa zaoberáme aplikáciou automatickej segmentácie na satelitné snímky získané počas misie Sentinel-2. Začneme s popisom matematického modelu vyvíjajúcich sa kriviek, ktorý diskretizujeme pomocou metódy konečných objemov a riešime explicitnou schémou. V práci sú taktiež popísané algoritmy potrebné pre vznik a vývoj siete kriviek, ktoré sme implementovali v jazyku C++ a na vizualizáciu použili softvér Wolfram Mathematica.

**Kľúčové slová:** segmentácia obrazu, evolúcia krivky, explicitná schéma, hraničná krivka

## Abstract

**Title:** Automatic image segmentation using the planar curve network

**Abstract:** The work deals with the extension of the already existing segmentation model, which uses closed curves for automatic segmentation. In this work, this model is extended to use a network of plane curves, thanks to which it is possible to clearly determine the boundary between segmented areas. In this work, we deal with the application of automatic segmentation to satellite images obtained during the Sentinel-2 mission. We begin with the description of the mathematical model of the evolving curves, which we discretize using the finite volume method and solve with an explicit scheme. The work also describes the algorithms necessary for the creation and development of the network of curves. These algorithms are implemented in C++ language and Wolfram Mathematica software is used for visualization.

**Keywords:** image segmentation, curve evolution, explicit scheme, boundary curve

# Predhovor

Práca sa zaoberá vytvorením modelu automatickej segmentácie pomocou siete rovinných kriviek. Hlavným cieľom je jednoznačne určiť hranicu medzi segmentovanými oblasťami. Model je založený na vývoji Lagrangeovskej krivky v segmentovanej oblasti. Rozširujeme už existujúci model segmentácie, pričom čerpáme hlavne z článku [8]. K práci sme vytvorili program, v ktorom sme algoritmy automatickej segmentácie implementovali v jazyku C++. Na vizualizáciu výsledkov sme použili softvér Wolfram Mathematica.

V kapitole 1 začíname s opisom kľúčového pojmu segmentácia obrazu. V úvode sa taktiež venujeme misii Sentinel-2, ktorá je súčasťou programu Copernicus a ktorej dáta používame pre vykonanie experimentov.

V kapitole 2 si predstavíme matematický model automatickej segmentácie a vysvetlíme význam jednotlivých členov modelu. Hlavnou myšlienkou je vývoj krivky v tangenciálnom a normálovom smere k hranici segmentovanej oblasti, preto v sekcii 2.3 najprv opisujeme normálovú rýchlosť, ktorá zahŕňa detekciu hrán obrazu, funkciu homogenity a krivostnú regularizáciu. V sekcii 2.4 si následne predstavíme vhodnú voľbu tangenciálnej rýchlosti, s využitím tangenciálnej redistribúcie.

Po predstavení matematického modelu vieme, že evolúcia krivky je daná diferenciálnou rovnicou, preto v kapitole 3 na priestorovú diskretizáciu použijeme metódu konečných objemov a rovnicu riešime numericky použitím explicitnej schémy. Následne sa v tejto kapitole zaoberáme úpravou explicitnej schémy pre sieť otvorených kriviek.

Kapitola 4 je zameraná na popis algoritmov na vývoj a vznik siete kriviek, kedy dochádza k topologickým zmenám.

V poslednej kapitole 5 si funkčnosť algoritmov overujeme na niekoľkých numerických experimentoch. Najprv si v sekcii 5.1 ukážeme porovnanie segmentácie pomocou uzavretých kriviek a siete kriviek. V sekcii 5.2 si na niekoľkých ďalších experimentoch ukážeme definovanie hranice medzi segmentovanými oblasťami.

Na záver by som sa chcela poďakovať vedúcemu diplomovej práce, Ing. Martinovi Ambrozovi PhD., za čas, cenné rady a konzultácie počas vypracovávania diplomovej práce.





# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>11</b>
1.1 Segmentácia obrazu	11
1.2 Míšia Sentinel-2	12
1.3 Použitie siete rovinných kriviek	13
<b>2 Matematický model</b>	<b>15</b>
2.1 Vyvíjajúca sa krivka	15
2.2 Sieť kriviek	16
2.3 Normálová rýchlosť	17
2.3.1 Detekcia hrán	17
2.3.2 Expanzia krivky v smere normály	18
2.3.2.1 Funkcia homogenity	18
2.3.3 Krivostná regularizácia	19
2.4 Tangenciálna rýchlosť	19
2.5 Použitie Frenetových a Serretových rovníc	21
<b>3 Numerická diskretizácia</b>	<b>23</b>
3.1 Diskretizácia krivky	23
3.2 Priestorová diskretizácia	23
3.3 Časová diskretizácia	24
3.4 Diskretizácia normálovej a tangenciálnej rýchlosti	25
3.5 Explicitná schéma pre sieť otvorených kriviek	26
3.5.1 Úprava výpočtu pre začiatočný bod otvorenej krivky	26
3.5.2 Úprava výpočtu pre koncový bod otvorenej krivky	27
<b>4 Topologické zmeny</b>	<b>29</b>
4.1 Pridávanie a odoberanie bodov	29
4.2 Delenie kriviek	30
4.3 Vytvorenie siete kriviek	31
4.3.1 Vznik hraničnej krivky	32
4.3.2 Úprava rodičovských kriviek	34
<b>5 Numerické experimenty</b>	<b>37</b>
5.1 Segmentácia pomocou uzavretých kriviek a siete kriviek	37
5.2 Definovanie hranice medzi segmentovanými oblasťami	39
<b>6 Záver</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>43</b>



# Kapitola 1

## Úvod

### 1.1 Segmentácia obrazu

Segmentácia obrazu je kľúčovým pojmom v spracovaní obrazu a počítačovom videní, s veľkým využitím napríklad v medicíne, v rozoznávaní objektov pre autonómne vozidlá, robotickom vnímaní a aj mnohých ďalších oblastiach. Segmentácia obrazu je proces, pri ktorom rozdeľujeme obraz na regióny, inak povedané skupiny pixelov, ktoré majú nejakú spoločnú charakteristiku. Vytvorenie takýchto regiónov môže mať pre nás informatívny charakter, ale taktiež nám môže uľahčiť ďalšiu prácu s dátami. Na segmentáciu obrazu sa používa množstvo metód, metódy založené na počítačovom videní alebo aj techniky, ktoré používajú umelú inteligenciu. Model automatickej segmentácie, popísaný v článku [8] je založený na vývoji uzavretej Lagrangeovskej krivky v segmentovanej oblasti. Tento model, ktorý je základom pre našu prácu, bol vytvorený pre segmentáciu chránených území európskeho významu NATURA 2000, pričom boli využité dáta získané satelitmi z misie Sentinel-2. Pre vykonanie experimentov v našej práci budeme taktiež používať satelitné snímky (Obr. 1.1) získané z tejto misie.



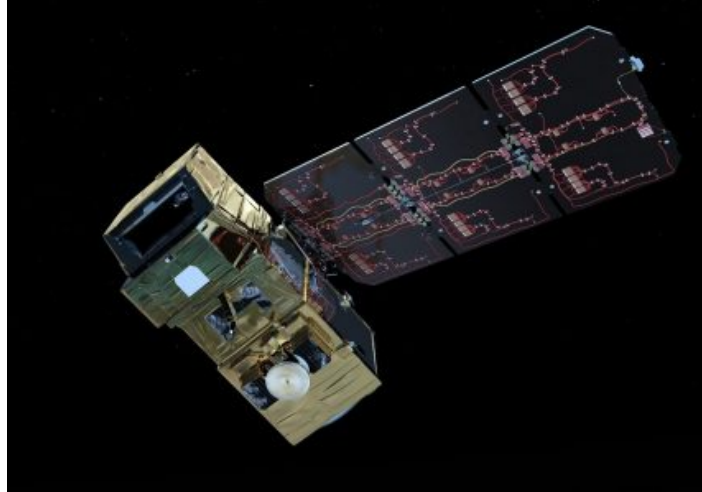
Obr. 1.1: Príklad satelitnej snímky získanej z misie Sentinel-2.

## 1.2 Misia Sentinel-2

Misia Sentinel-2 [10] bola spustená ako súčasť programu Európskej komisie Copernicus. Misia pozostáva z dvoch identických satelitov (Obr. 1.2), Sentinel-2A, vypustený 23. júna 2015 a Sentinel-2B, vypustený 7. marca 2017. Satelity lietajú na rovnakej obežnej dráhe, ale ich fáza je navzájom posunutá o 180°, čiže každý satelit je vždy na opačnej strane planéty. Táto konštelácia umožňuje každé miesto na Zemi opätovne navštíviť každých päť dní s rovnakým smerom pozorovania. Životnosť satelitu je 7.25 roka. V roku 2024 sa plánuje vypustenie dvoch ďalších satelitov (Sentinel-2C a Sentinel-2D). Každý satelit nesie multispektrálny senzor, ktorý odoberá vzorky 13 spektrálnych kanálov s rôznym rozlíšením (Tabuľka 1.1): štyri kanály na 10 m (jeden pixel reprezentuje plochu 10 m × 10 m) šesť kanálov na 20 m a tri kanály na 60 m priestorového rozlíšenia, pričom šírka orbitálneho záberu je 290 m. Satelity tak získavajú multispektrálne snímky s vysokým rozlíšením, ktoré sa následne používajú na podporu rôznych služieb a aplikácií ponúkaných programom Copernicus, vrátane správy pôdy, poľnohospodárstva, lesníctva, kontroly katastrof, operácií humanitárnej pomoci, mapovania rizík a bezpečnostných problémov. Všetky dáta získané zo satelitov sú voľne dostupné.

Kanál	Názov Popis	Vlnová dĺžka	Rozlíšenie
B1	Coastal aerosol atmosférická korekcia(rozptyl aerosólu)	443 nm	60 m
B2	Modrý kanál rozlišovanie vegetácie (citlivosť na starnutie vegetácie)	490 nm	10 m
B3	Zelený kanál rozlišovanie vegetácie (citlivosť na celkový chlorofyl)	560 nm	10 m
B4	Červený kanál rozlišovanie vegetácie a mestských oblastí	665 nm	10 m
B5	Vegetation Red Edge konsolidácia atmosférických korekcií	705 nm	20 m
B6	Vegetation Red Edge atmosférická korekcia	740 nm	20 m
B7	Vegetation Red Edge Listový index plochy	783 nm	20 m
B8	NIR Listový index plochy	842 nm	10 m
B8a	Vegetation Red Edge rozlišovanie vegetácie	865 nm	20 m
B9	Water vapour absorpcia vodnej pary	945 nm	60 m
B10	SWIR detekcia tenkých cirusov pre atmosférickú korekciu	1375 nm	60 m
B11	SWIR detekcia lignínu a lesnej nadzemnej biomasy	1610 nm	20 m
B12	SWIR hodnotenie podmienok stredomorskej vegetácie	2190 nm	20 m

Tabuľka 1.1: Spektrálne kanály satelitov Sentinel-2.



Obr. 1.2: Model satelitu použitého v misii Sentinel-2.[4]

### 1.3 Použitie siete rovinných kriviek

V našej práci budeme už existujúci model automatickej segmentácie [8] rozširovať a modifikovať. Na segmentáciu použijeme množinu rovinných kriviek, uzavretých a otvorených. Otvorené krivky budú navzájom prepojené a budeme ich vnímať ako sieť kriviek. Naším cieľom bude vytvoriť a jednoznačne určiť hranicu medzi segmentovanými oblasťami. Takéto jednoznačné určenie hranice má množstvo aplikácií, nielen pri spracovaní satelitných snímkov pre určenie rôznych druhov porastov, ale aj pri spracovaní medicínskych snímkov, pre rozdelenie rôznych tkanív v ľudskom tele.



## Kapitola 2

# Matematický model

V tejto kapitole si zostavíme matematický model automatickej segmentácie, ktorý je bližšie popísaný v článku [8]. Budeme pracovať s čiernobielym vstupným obrazom, s jedným kanálom, ktorý neskôr nahradíme reálnymi dátami, napríklad satelitnými snímkami. Dvojrozmerný obraz (obr. 2.3, vľavo) vieme reprezentovať funkciou intenzity  $I^0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , pričom  $I^0(x) = I^0(x_1, x_2)$  predstavuje hodnotu intenzity pixelu s priestorovými súradnicami  $(x_1, x_2)$ . Pre segmentáciu oblasti obrazu musíme určiť počiatočnú krivku, ktorú budeme vyvíjať v čase k hranici segmentovanej oblasti obrazu, pričom evolúcia je daná vhodným vektorovým polom. Umiestnením počiatočnej krivky určíme intenzitu obrazu, ktorú segmentujeme, preto by mala celá krivka ležať vo vnútri segmentovanej oblasti.

### 2.1 Vyvíjajúca sa krivka

Majme vyvíjajúcu sa krivku

$$\gamma : \Gamma \times T \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (2.1)$$

Nech  $\Gamma = [0, 1]$  a  $T = [t^0, t^f]$ , predstavuje časový interval, kde  $t^0$  je počiatočný čas a  $t^f$  je koncový čas. Hodnota  $\gamma(u, t)$ , kde  $u \in \Gamma$ , vyjadruje pozíciu krivky  $\gamma$  v čase  $t \in T$ . Vývoj krivky predstavuje zmenu krivky v čase, čo matematicky vyjadruje jej časová derivácia. Evolúcia krivky riadená vektorovým polom  $\mathbf{V}(u, t)$  je preto daná diferenciálnou rovnicou

$$\frac{\partial \gamma(u, t)}{\partial t} = \mathbf{V}(u, t), \quad (2.2)$$

s počiatočnou podmienkou  $\gamma(u, t^0) = \gamma^0$ , kde  $\gamma^0$  označíme ako počiatočnú krivku.

Vo všeobecnosti vieme pohyb krivky rozložiť na pohyb v normálovom a tangenciálnom smere, vid' obr. 2.1

$$\frac{\partial \gamma(u, t)}{\partial t} = \beta(u, t)\mathbf{N}(u, t) + \alpha(u, t)\mathbf{T}(u, t), \quad (2.3)$$

kde  $\alpha(u, t)$  označuje tangenciálnu rýchlosť,  $\beta(u, t)$  normálovú rýchlosť,  $\mathbf{T}(u, t)$  jednotkový dotykový vektor a  $\mathbf{N}(u, t)$  jednotkový normálový vektor. Je dôležité spomenúť, že vplyvom tangenciálnej rýchlosti v rovnici sa nemení tvar krivky, iba sa body krivky posúvajú v tangenciálnom smere. Preto sa najskôr v sekcii 2.3 zameriame na normálovú rýchlosť  $\beta(u, t)$  a následne v sekcii 2.4 opíšeme výpočet vhodnej tangenciálnej rýchlosti  $\alpha(u, t)$ . Budeme uvažovať prirodzene parametrizovanú krivku  $\gamma$  parametrom  $s$ , pričom  $ds = |\partial_u \gamma(u, t)| du$ . Jednotkový dotykový vektor potom vieme vyjadriť ako

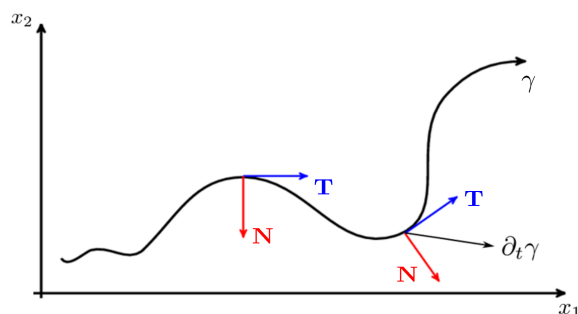
$$\mathbf{T}(u, t) = \partial_s \gamma(u, t) = (\partial_s \gamma_1, \partial_s \gamma_2). \quad (2.4)$$

Jednotkový normálový vektor je naň kolmý, dostaneme tak

$$\mathbf{N}(u, t) = \mathbf{T}(u, t)^\perp = (\partial_s \gamma(u, t))^\perp = (\partial_s \gamma_2, -\partial_s \gamma_1). \quad (2.5)$$



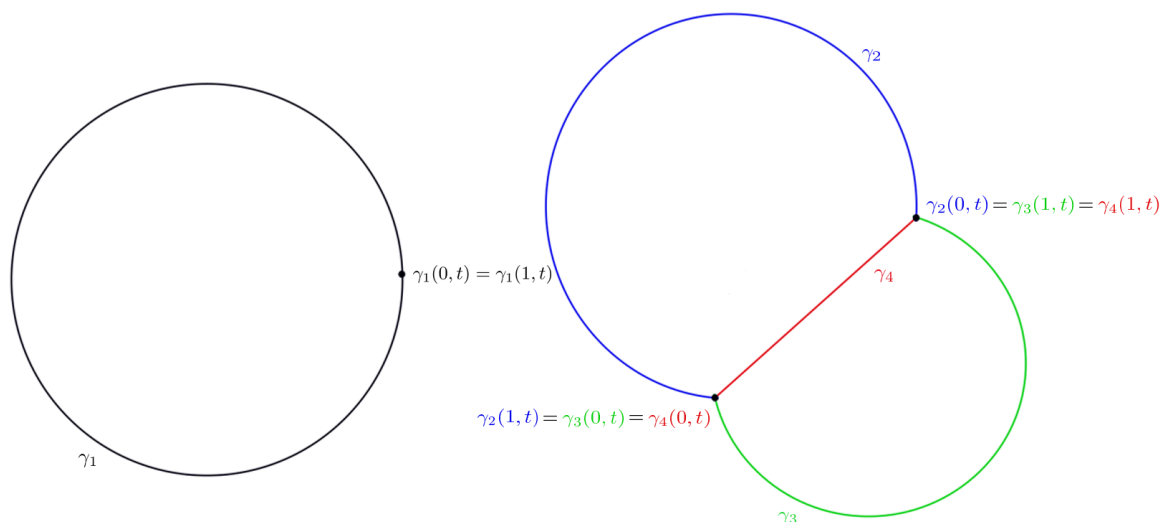
Prirodzenú parametrizáciu budeme ďalej používať v sekcii 2.4 a 2.5, kde je prirodzená parametrizácia podmienkou pre použitie Frenetových a Serretových rovníc.



Obr. 2.1: Rozloženie pohybu krivky na tangenciálny a normálový smer [5].

## 2.2 Sieť kriviek

V našej práci nebudeme pracovať iba s jednou vyvíjajúcou sa krivkou, ale s množinou kriviek, pričom niektoré môžu byť uzavreté a niektoré otvorené. Uzavreté krivky, pre ktoré platí  $\gamma(0, t) = \gamma(1, t)$ , budeme v rámci vývoja vnímať ako samostatné, čo znamená, že pre vývoj uzavretej krivky nepotrebujeme informáciu o žiadnej inej krivke. Avšak množinu otvorených kriviek budeme vnímať ako sieť (skupinu) otvorených kriviek. Pre vývoj otvorenej krivky potrebujeme použiť informácie zo všetkých otvorených kriviek v sieti. Pre každú otvorenú krivku platí, že má aspoň dve susedné krivky, ktoré majú začiatočný alebo koncový bod totožný so začiatočným alebo koncovým bodom danej krivky, tak ako vidíme na obrázku 2.2. Otvorené krivky v sieti sú pomocou začiatočných a koncových bodov prepojené.



Obr. 2.2: Príklad uzavretej krivky  $\gamma_1$  (vľavo) a sieť otvorených kriviek  $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  (vpravo), kde vidíme totožné začiatočné a koncové body.

Krivky v rámci siete delíme na rodičovské a hraničné krivky. Rodičovské krivky vzniknú otvorením uzavretej krivky. Zároveň s tým musí vzniknúť aj hraničná krivka, ktorá prepojí otvorenú časť rodičovských kriviek. Každá hraničná krivka má svoje rodičovské krivky. Vznik rodičovských kriviek a hraničnej krivky, ktorý je podnetom pre vznik siete kriviek, si bližšie popíšeme v sekcii 4.3.

## 2.3 Normálová rýchlosť

V našej práci preberieme predpis pre normálovú rýchlosť z článku [8], kde je definovaná v tvare

$$\beta(u, t) = (1 - \lambda(t))g_2^\gamma(\gamma(u, t)) - \lambda(t)\nabla g_1(\gamma(u, t)) \cdot \mathbf{N}(u, t) - \delta(t)k(u, t), \quad (2.6)$$

a použitá na segmentáciu pomocou uzavretých rovinných kriviek. Postupne si predstavíme každý člen, ktorý vystupuje v tejto funkcii. V prvom kroku si v sekcii 2.3.1 popíšeme druhý člen  $-\nabla g_1(\gamma(u, t)) \cdot \mathbf{N}(u, t)$ , pomocou ktorého riadime evolúciu krivky k hrane segmentovanej oblasti. Následne v sekcii 2.3.2, vysvetlíme ako prvý člen  $g_2^\gamma(\gamma(u, t))$  expanduje krivku z jej počiatočnej pozície cez segmentovanú oblasť v smere normály. Pomocou parametra  $\lambda(t)$ , ktorý vystupuje v oboch členoch vieme meniť to, ktorý člen bude mať na vývoj väčší vplyv. Zväčšovaním hodnoty  $\lambda(t)$  bude mať väčší vplyv druhý člen a naopak, keď  $\lambda(t)$  bude blízka nule, krivka bude riadená hlavne prvým, expanzným členom. Tretí člen  $\delta(t)k(u, t)$  reprezentujúci krivostnú regularizáciu si predstavíme v sekcii 2.3.3.

### 2.3.1 Detekcia hrán

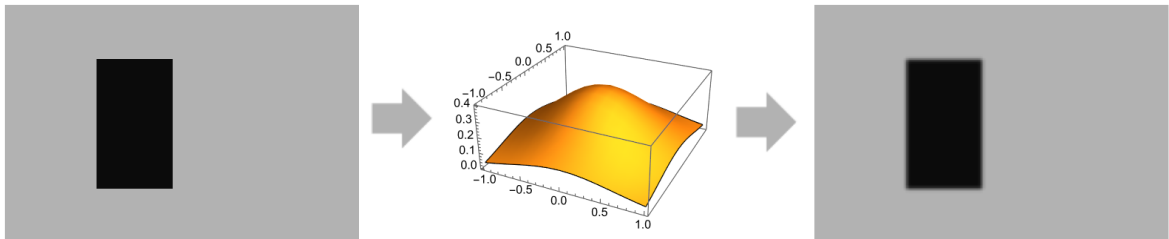
Keďže sú hranice oblastí obrazu tvorené hranami, vyvíjajúca sa krivka by sa mala prispôbovať práve k nim. Na nájdenie hrán použijeme hranovú detekciu. Reálne dáta sú často zašumené, preto si najprv potrebujeme obraz prefiltrovať. V tejto časti využijeme poznatky o Gaussovej filtrácii z literatúry [3] a [6]. Gaussova filtrácia je jedna z najpoužívanejších metód v rámci predspracovania obrazu. Nech funkcia  $I^{\sigma_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , reprezentuje intenzity filtrovaného pôvodného obrazu  $I^0$  pomocou Gaussovho filtra. Túto funkciu získame konvolúciou obrazu s Gaussovou funkciou

$$I^{\sigma_0}(x) = G_{\sigma_0}(x) * I^0(x), \quad (2.7)$$

pričom funkcia  $G_{\sigma_0}(x)$  s rozptylom  $2\sigma_0$  je v  $d$ -dimenziálnom priestore definovaná v tvare

$$G_{\sigma_0}(x) = \frac{1}{(4\pi\sigma_0)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4\sigma_0}}. \quad (2.8)$$

a predstavuje konvolučné jadro. Novú hodnotu pixelu získame váženým priemerom okolia daného pixelu, pričom hodnotu daného pixelu berieme s najväčšou váhou. Hodnoty váh závisia od parametra  $\sigma_0$ . Čím väčšia  $\sigma_0$ , tým je filtrácia silnejšia. Použitie konvolúcie vidíme na obrázku 2.3.



Obr. 2.3: Vľavo: Originálny dvojrozmerný obraz s odtieňmi šedej. V strede: Konvolučné jadro. Vpravo: Obraz po aplikovaní Gaussovho filtra.

Hrany obrazu vieme identifikovať ako náhle zmeny intenzity obrazu. Využijeme preto vlastnosti gradientu a v mieste hrany budeme očakávať vysokú hodnotu normy gradientu. Normu gradientu použijeme vo funkcii hranového detektora v tvare

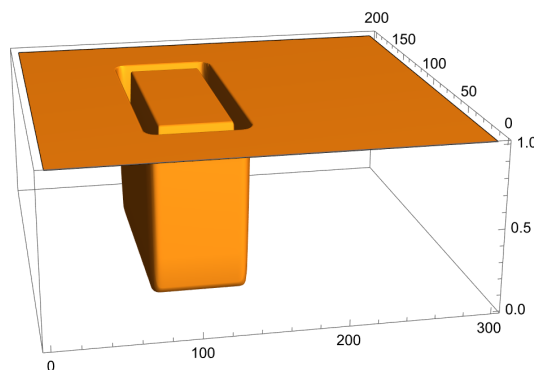
$$g(\zeta, |\nabla I^\sigma(x)|) = \frac{1}{(1 + \zeta|\nabla I^{\sigma_0}(x)|^2)}, \quad (2.9)$$

kde parameter  $\zeta$  určuje výraznosť detekovaných hrán. Čím väčšia hodnota  $\zeta$ , tým je citlivosť na vysoké hodnoty noriem gradientov väčšia a hrany po detekcii sú výraznejšie.

Po opätovnom vyhladení získame výslednú funkciu hranového detektora použitú vo vzorci (2.6), v ktorej aplikovaním konvolúcie zhladíme detekované hrany

$$g_1(x) = G_{\sigma_1} * g(\zeta, |\nabla I^{\sigma_0}(x)|). \quad (2.10)$$

Na obrázku 2.4 vidíme, že hranový detektor má hodnoty blízke nule pri hranách. Na miestach, kde sa hrany nevyskytujú, nadobúda hodnoty blízke jednej.



Obr. 2.4: Hranový detektor  $g_1$  aplikovaný na  $I^{\sigma_0}$  z obrázka 2.3, vpravo.

### 2.3.2 Expanzia krivky v smere normály

V tejto sekcii si popíšeme ako pomocou funkcie  $g_2^\gamma$  riadime krivku cez segmentovanú oblasť v smere normály k hrane oblasti. Funkciu  $g_2^\gamma$  definujeme ako

$$g_2^\gamma(x) = G_{\sigma_2} * (H^\gamma(x)g_1(x)), \quad (2.11)$$

kde vynásobenú funkciu homogenity  $H^\gamma(x)$ , popísanú nižšie v sekcii 2.3.2.1, s hranovým detektorom  $g_1(x)$  (2.10) zhladíme konvolúciou s Gaussovou funkciou  $G_{\sigma_2}$ . Potreba prvého expanzného člena vo vzorci (2.6) vzniká v prípade, kedy by hrany boli príliš ďaleko od počiatočnej polohy krivky. Krivka by sa nemusela k hrane vôbec priťahovať a hranový detektor by nezabezpečil správnu segmentáciu. Krivka by tak bola riadená hlavne tretím, krivostným členom popísaným v sekcii 2.3.3 čo by mohlo spôsobiť neželané stiahnutie krivky do bodu. Keďže pracujeme s množinou kriviek, pre každú uzavretú krivku definujeme funkciu homogenity a aj vlastnú funkciu  $g_2^\gamma$  (2.11), preto k funkcii pridávame horný index  $\gamma$ , ktorý označuje príslušnosť k danej krivke. Definovanie funkcie  $g_2^\gamma$  pre sieť otvorených kriviek si popíšeme v sekcii 4.3.1.

#### 2.3.2.1 Funkcia homogenity

Funkcia homogenity  $H^\gamma(x)$  určuje ako podobné sú intenzity vo vnútri počiatočnej krivky  $\gamma^0$  a v bode  $x$ . Funkcia homogenity teda závisí na zvolenej počiatočnej krivke. Ukážeme si dva spôsoby definovania funkcie homogenity. V prvej definícii, vypočítame strednú hodnotu intenzity  $\rho$  z hodnôt  $I^{\sigma_0}$  vo vnútri počiatočnej krivky a funkciu homogenity zadefinujeme ako

$$H^\gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } I^{\sigma_0}(x) \in (\rho - \epsilon\rho, \rho + \epsilon\rho) \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad (2.12)$$

V našej práci používame druhý spôsob definície, kedy funkcia nadobúda rovnaké hodnoty, avšak zmenia sa príslušné podmienky. Vypočítame minimálnu intenzitu  $\rho_{min}$  a maximálnu

intenzitu  $\rho_{max}$  z hodnôt  $I^{\sigma_0}$  vo vnútri počiatočnej krivky. Predpis funkcie homogenity je

$$H^\gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } I^{\sigma_0}(x) \in (\rho_{min} - \epsilon, \rho_{max} + \epsilon) \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad (2.13)$$

V oboch definíciách parameter  $\epsilon$  určuje, aký veľký bude rozsah tolerovaných intenzít.

Vďaka funkcii homogenity tak expandujeme krivku smerom k hranici. Zastavenie evolúcie pri hrane zabezpečíme vynásobením funkcie homogenity s hranovým detektorom. Následným zhladením dostaneme výslednú funkciu  $g_2$ , tak ako sme ju zadefinovali v (2.11).



Obr. 2.5: Vizualizácia funkcie hranového detektora  $g_1$  (vľavo) pre  $I^{\sigma_0}$  z obrázka 2.3, vpravo a funkcie  $g_2$  (vpravo) pre počiatočnú krivku z obrázka 2.7.

### 2.3.3 Krivostná regularizácia

Posledným členom je krivostný člen. Ako už z názvu vyplýva, úlohou tohoto členu je regularizovať krivosť a teda v miestach, kde je krivosť vysoká, dôjde k zhladeniu krivky. Funkcia  $k(u, t)$  vo vzorci (2.6) tak predstavuje znamienkovú krivosť krivky. Vplyv tohoto členu na vývoj krivky vieme taktiež meniť pomocou parametra  $\delta$ , pričom platí, že čím je hodnota väčšia, tým viac je krivka krivosťou zhladzovaná.

## 2.4 Tangenciálna rýchlosť

Ako bolo spomenuté tangenciálna rýchlosť nemení tvar krivky počas vývoja, avšak pri numerickom výpočte nám pomôže predísť singularitám a napomáha tak k stabilite numerickej schémy. Pre vhodnú voľbu tangenciálnej rýchlosti  $\alpha(u, t)$  používanej na tangenciálnu redistribúciu čerpáme poznatky z článkov [9] a [11]. Počas segmentácie chceme dosiahnuť asymptoticky rovnomerné rozdelenie bodov krivky, ktoré je dôležité pre algoritmy na topologické zmeny, popísané v kapitole 4.

Ideme teda skúmať vzťah  $\frac{g}{L}$ , kde  $g = |\partial_u \gamma(u, t)|$  predstavuje lokálnu dĺžku krivky a  $L$  celkovú, globálnu dĺžku krivky. Podľa spomínaného článku chceme, aby platilo

$$\partial_t \left( \frac{g}{L} \right) = \omega \left( 1 - \frac{g}{L} \right), \quad (2.14)$$

kde  $\omega$  predstavuje tempo zrovnomenovania bodov. Pre časovú deriváciu vystupujúcu na ľavej strane rovnice (2.14) potrebujeme najprv vyjadriť, čomu sa rovná  $\partial_t g$  a  $\partial_t L$ . Ďalej budeme používať označenia  $\gamma = \gamma(u, t)$ ,  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(u, t)$ ,  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(u, t)$ ,  $\alpha = \alpha(u, t)$ ,  $\beta = \beta(u, t)$ . Začneme s odvodením  $\partial_t g$

$$\partial_t g = \partial_t |\partial_u \gamma| = \frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|} \cdot \partial_t (\partial_u \gamma). \quad (2.15)$$

Použijeme prirodzenú parametrizáciu krivky, z ktorej vyplýva vzťah  $\partial_u \gamma = g \partial_s \gamma$ , kde  $g = |\partial_u \gamma|$ . Dosadením tohto vzťahu a zámennou časovej a priestorovej derivácie ďalej dostaneme

$$\partial_t g = \frac{g \partial_s \gamma}{g} \cdot \partial_u (\partial_t \gamma). \quad (2.16)$$

Aplikovaním (2.3) a prvej Frenetovej a Serretovej rovnice (2.27) výraz upravíme na tvar

$$\begin{aligned} \partial_t g &= \mathbf{T} \cdot \partial_u (\beta \mathbf{N} + \alpha \mathbf{T}) = \mathbf{T} \cdot g \partial_s (\beta \mathbf{N} + \alpha \mathbf{T}) = \mathbf{T} \cdot g (\partial_s \beta \mathbf{N} + \beta \partial_s \mathbf{N} + \partial_s \alpha \mathbf{T} + \alpha \partial_s \mathbf{T}) \\ &= \mathbf{T} \cdot g (\partial_s \beta \mathbf{N} + \beta k \mathbf{T} + \partial_s \alpha \mathbf{T} + \alpha k \mathbf{N}) = \mathbf{T} \cdot g ((\partial_s \beta + \alpha k) \mathbf{N} + (\beta k + \partial_s \alpha) \mathbf{T}) \\ &= g k \beta + g \partial_s \alpha = g k \beta + \partial_u \alpha. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Integráciou predchádzajúcej rovnice (2.17) získame vzorec pre vývoj globálnej dĺžky  $L$

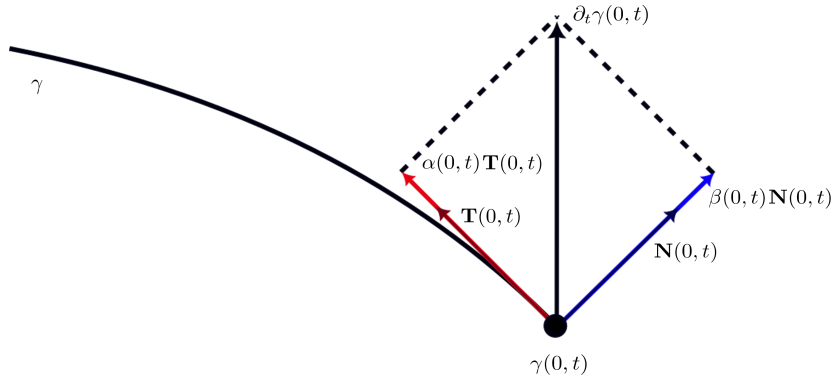
$$\begin{aligned} \partial_t L &= \int_0^1 \partial_t g = \int_0^1 g k \beta du + \int_0^1 \partial_u \alpha du \\ &= \int_\gamma k \beta ds + \int_0^1 \partial_u \alpha du = L \langle k \beta \rangle + \alpha(1, t) - \alpha(0, t), \end{aligned} \quad (2.18)$$

kde  $\langle k \beta \rangle = \frac{1}{L} \int_\gamma k \beta ds$ . Pre uzavretú krivku platí, že  $\alpha(0, t) = \alpha(1, t)$ . V prípade siete otvorených kriviek, to však neplatí. Hodnoty  $\alpha(0, t)$  a  $\alpha(1, t)$  treba samostatne vyjadriť pomocou skalárneho súčinu, ktorý vieme interpretovať aj ako priemet, vektora  $\partial_t \gamma$  v smere vývoja daného bodu a jednotkového dotykového vektora  $\mathbf{T}$  v danom bode (Obr. 2.6). Hodnotu  $\alpha(0, t)$  vyjadríme v začiatočnom bode  $\gamma(0, t)$  krivky ako

$$\alpha(0, t) = \partial_t \gamma(0, t) \cdot \mathbf{T}(0, t). \quad (2.19)$$

Hodnotu  $\alpha(1, t)$  vyjadríme v koncovom bode  $\gamma(1, t)$  krivky analogicky

$$\alpha(1, t) = \partial_t \gamma(1, t) \cdot \mathbf{T}(1, t). \quad (2.20)$$



Obr. 2.6: Vizualizácia vývoja krivky  $\gamma$  v bode  $\gamma(0, t)$ , kde vidíme ako pomocou priemetu vektora  $\partial_t \gamma(0, t)$  na dotykový vektor  $\mathbf{T}(0, t)$  vieme získať tangenciálnu rýchlosť  $\alpha(0, t)$ .

Ľavú stranu rovnice (2.14) môžeme použitím (2.17) a (2.18) napísať v tvare

$$\partial_t \left( \frac{g}{L} \right) = \frac{(g k \beta + \partial_u \alpha) L - g (L \langle k \beta \rangle + \alpha(1, t) - \alpha(0, t))}{L^2}. \quad (2.21)$$

Pravú stranu ešte môžeme upraviť

$$\partial_t \left( \frac{g}{L} \right) = \frac{g}{L} \left( k \beta + \partial_s \alpha - \langle k \beta \rangle + \frac{\alpha(0, t) - \alpha(1, t)}{L} \right), \quad (2.22)$$

vd'aka čomu vieme rovnicu (2.14) prepísať na tvar

$$\frac{g}{L} \left( k\beta + \partial_s \alpha - \langle k\beta \rangle + \frac{\alpha(0,t) - \alpha(1,t)}{L} \right) = \omega \left( 1 - \frac{g}{L} \right). \quad (2.23)$$

Z tejto rovnice získame vzťah pre tangenciálnu rýchlosť

$$\partial_s \alpha = \omega \left( \frac{L}{g} - 1 \right) + \langle k\beta \rangle - k\beta - \frac{\alpha(0,t) - \alpha(1,t)}{L}. \quad (2.24)$$

Ako sme spomínali vyššie, pre uzavreté krivky posledný člen tejto rovnice vypadne, pretože  $\alpha(0,t) = \alpha(1,t)$ .

## 2.5 Použitie Frenetových a Serretových rovníc

Pred použitím Frenetových a Serretových rovníc najprv zavedieme premennú  $w$ , pričom  $\beta = w - \delta k$ , kde

$$w = (1 - \lambda(t))g_2^{\gamma}(\gamma) - \lambda(t)\nabla g_1(\gamma) \cdot \mathbf{N}. \quad (2.25)$$

Vývoj krivky tak nadobudne tvar

$$\partial_t \gamma = (w - \delta k)\mathbf{N} + \alpha\mathbf{T} = w\mathbf{N} - \delta k\mathbf{N} + \alpha\mathbf{T}. \quad (2.26)$$

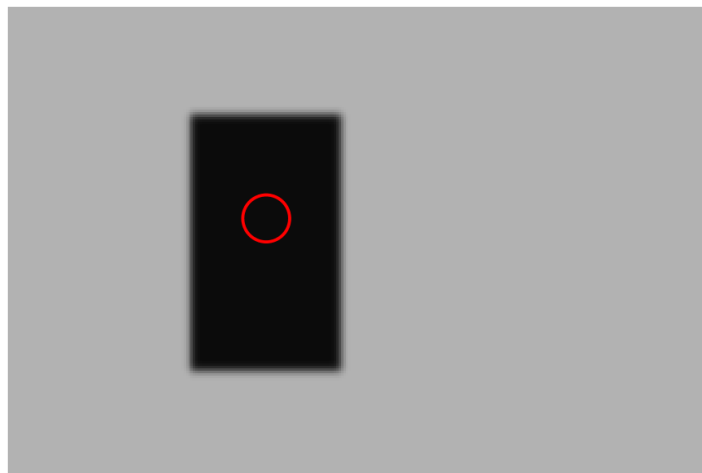
Frenetove a Serretove rovnice opisujú derivácie jednotkového dotykového a normálového vektora a binormály, kde binormála je výsledkom vektorového súčinu vektora  $\mathbf{N}$  a  $\mathbf{T}$ . My využijeme prvú Frenetovu a Serretovu rovnicu [7], ktorá je v tvare

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}. \quad (2.27)$$

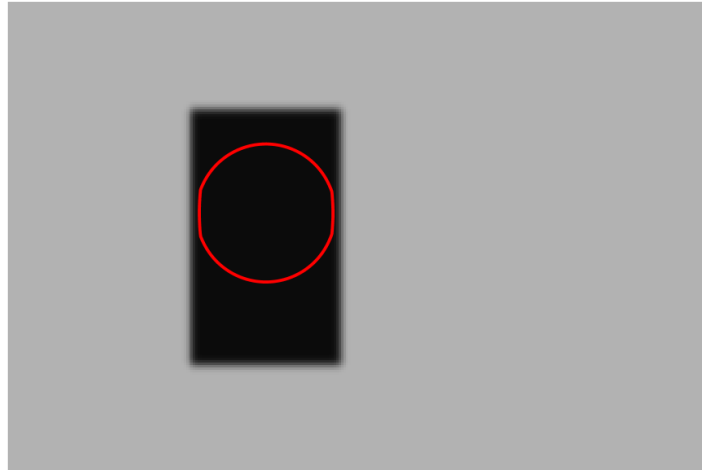
Aplikovaním vzťahov (2.4) a (2.27) a použitím prirodzenej parametrizácie krivky môžeme napísať výslednú diferenciálnu rovnicu vývoja pre krivku  $\gamma$  v tvare

$$\partial_t \gamma = w(\partial_s \gamma)^{\perp} - \delta(\partial_s^2 \gamma) + \alpha(\partial_s \gamma). \quad (2.28)$$

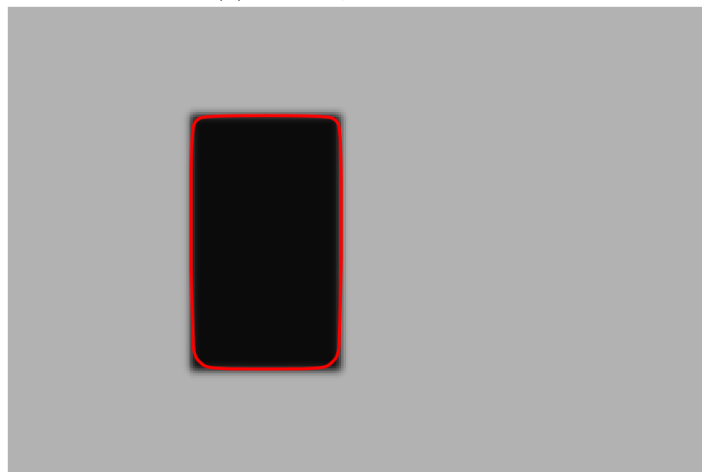
Na obrázku 2.7 vidíme aplikáciu tohto modelu segmentácie pomocou uzavretej krivky. Použili sme obraz  $I^{\sigma_0}$  (Obr. 2.3) s odtieňmi šedej. Do segmentovanej oblasti sme vložili počiatočnú krivku  $\gamma^0$ , označenú červenou farbou.



(a) Počiatočná krivka  $\gamma^0$ .



(b) Krivka  $\gamma$  počas vývoja.



(c) Krivka  $\gamma$  na konci vývoja v čase  $t^f$ .

Obr. 2.7: Evolúcia krivky riadená vektorovým poľom.

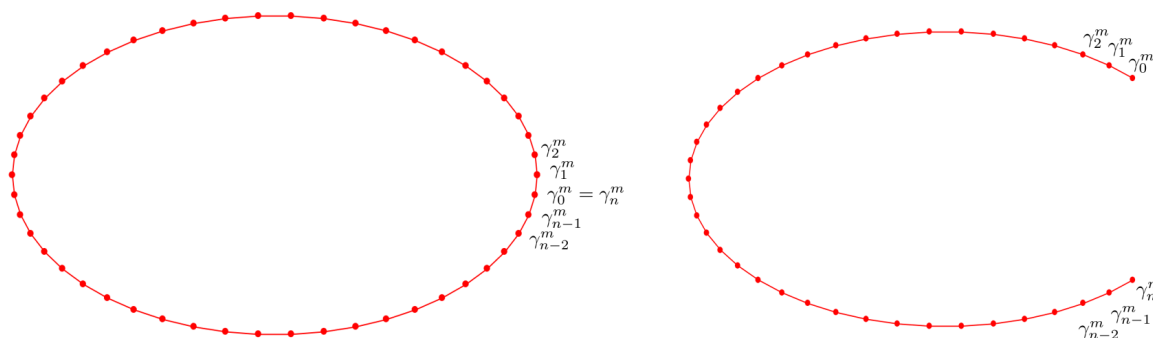
## Kapitola 3

# Numerická diskretizácia

Pre numerické riešenie diferenciálnej rovnice (2.28) potrebujeme najprv diskretizovať krivku  $\gamma$  a následne vykonať priestorovú diskretizáciu, ktorú si opíšeme v sekcii 3.2, a časovú diskretizáciu, popísanú v sekcii 3.3. V sekcii 3.4 diskretizujeme aj výpočet normálovej a tangenciálnej rýchlosti. Nakoniec sa v sekcii 3.5 venujeme úprave numerickej schémy pre sieť otvorených kriviek.

### 3.1 Diskretizácia krivky

Krivku  $\gamma$  diskretizujeme na množinu bodov  $\gamma_0^m, \gamma_1^m, \dots, \gamma_n^m$ , kde  $n$  predstavuje počet bodov krivky v čase  $m$ . V práci budeme pracovať s uzavretými, ale aj s otvorenými krivkami, pričom pre uzavretú krivku platí  $\gamma_0^m = \gamma_n^m$ , ako vidíme aj na obrázku 3.1, vľavo.



Obr. 3.1: Vľavo: Diskretizácia uzatvorenej krivky. Vpravo: Diskretizácia otvorenej krivky.

### 3.2 Priestorová diskretizácia

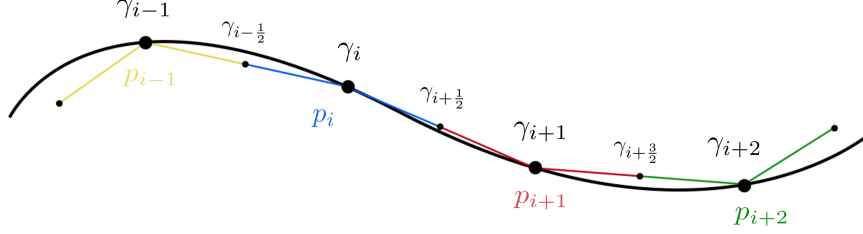
Pre priestorovú diskretizáciu použijeme metódu konečných objemov, ktorá pozostáva z reprezentácie bodov krivky  $\gamma$  a z konečných objemov  $p_i$ , ktoré sú dané hraničnými bodmi,  $p_i = [\gamma_{i-\frac{1}{2}}, \gamma_{i+\frac{1}{2}}]$ , tak ako vidíme aj na obrázku 3.2. Numerické riešenie je teda po častiach (na konečných objemoch) konštantná funkcia. Integráciou rovnice (2.28) na objeme  $p_i$  dostaneme

$$\int_{\gamma_{i-\frac{1}{2}}}^{\gamma_{i+\frac{1}{2}}} \partial_t \gamma ds = \int_{\gamma_{i-\frac{1}{2}}}^{\gamma_{i+\frac{1}{2}}} w(\partial_s \gamma)^\perp ds - \int_{\gamma_{i-\frac{1}{2}}}^{\gamma_{i+\frac{1}{2}}} \delta \partial_s^2 \gamma ds + \int_{\gamma_{i-\frac{1}{2}}}^{\gamma_{i+\frac{1}{2}}} \alpha \partial_s \gamma ds, \quad (3.1)$$



kde hodnoty  $w, \alpha, \delta$  považujeme za konštantné na konečnom objeme  $p_i$ , preto ich označíme ako  $w_i, \alpha_i, \delta_i$  a vyjmeme spolu s hodnotou  $\partial_t \gamma_i$  pred integrály, čím dostaneme

$$\partial_t \gamma_i \int_{\gamma_{i-\frac{1}{2}}}^{\gamma_{i+\frac{1}{2}}} ds = w_i \int_{\gamma_{i-\frac{1}{2}}}^{\gamma_{i+\frac{1}{2}}} (\partial_s \gamma)^\perp ds - \delta_i \int_{\gamma_{i-\frac{1}{2}}}^{\gamma_{i+\frac{1}{2}}} \partial_s^2 \gamma ds + \alpha_i \int_{\gamma_{i-\frac{1}{2}}}^{\gamma_{i+\frac{1}{2}}} \partial_s \gamma ds. \quad (3.2)$$



Obr. 3.2: Vizualizácia konečných objemov na krivke  $\gamma$ .

Zadefinujeme  $h_i = |\gamma_i - \gamma_{i-1}|$ . Mieru konečného objemu vieme vyjadriť ako

$$m(p_i) = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}. \quad (3.3)$$

Ďalej na aproximáciu hraničných bodov konečného objemu použijeme

$$\gamma_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\gamma_i + \gamma_{i-1}}{2} \quad (3.4)$$

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\gamma_{i+1} + \gamma_i}{2}. \quad (3.5)$$

Po použití Newton-Leibnitzovho vzorca a vyjadrením prvého integrálu v rovnici (3.2) pomocou (3.3) dostaneme

$$\partial_t \gamma_i \frac{h_i + h_{i+1}}{2} = w_i (\gamma_{i+\frac{1}{2}} - \gamma_{i-\frac{1}{2}})^\perp - \delta_i (\partial_s \gamma_{i+\frac{1}{2}} - \partial_s \gamma_{i-\frac{1}{2}}) + \alpha_i (\gamma_{i+\frac{1}{2}} - \gamma_{i-\frac{1}{2}}). \quad (3.6)$$

Použitím centrálnej diferencie v tvare

$$\partial_s \gamma_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\gamma_{i+1} - \gamma_i}{h_{i+1}} \quad (3.7)$$

$$\partial_s \gamma_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{h_i}. \quad (3.8)$$

a aproximácií (3.4) získame priestorovo diskretizovanú rovnicu

$$\partial_t \gamma_i \frac{h_i + h_{i+1}}{2} = w_i \left( \frac{\gamma_{i+1} - \gamma_{i-1}}{2} \right)^\perp - \delta_i \left( \frac{\gamma_{i+1} - \gamma_i}{h_{i+1}} - \frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{h_i} \right) + \alpha_i \left( \frac{\gamma_{i+1} - \gamma_{i-1}}{2} \right). \quad (3.9)$$

### 3.3 Časová diskretizácia

Pre časovú diskretizáciu si zadefinujeme dĺžku časového kroku  $\tau$ . Časovú deriváciu aproximujeme konečnou diferenciou

$$\partial_t \gamma_i = \frac{\gamma_i^{m+1} - \gamma_i^m}{\tau}. \quad (3.10)$$

Ostatné členy v rovnici (3.9) budeme aproximovať v časovom kroku  $m$ . Aplikovaním (3.10) môžeme rovnicu (3.9) prepísať

$$\frac{(\gamma_i^{m+1} - \gamma_i^m)}{\tau} \frac{(h_i^m + h_{i+1}^m)}{2} = w_i^m \left( \frac{\gamma_{i+1}^m - \gamma_{i-1}^m}{2} \right)^\perp - \delta_i^m \left( \frac{\gamma_{i+1}^m - \gamma_i^m}{h_{i+1}^m} - \frac{\gamma_i^m - \gamma_{i-1}^m}{h_i^m} \right) + \alpha_i^m \left( \frac{\gamma_{i+1}^m - \gamma_{i-1}^m}{2} \right). \quad (3.11)$$

Vyjadrením hodnoty  $\gamma_i^{m+1}$  tak získame explicitnú schému pre riešenie rovnice vývoja krivky (2.28) v tvare

$$\gamma_i^{m+1} = \gamma_i^m + \tau w_i^m \frac{(\gamma_{i+1}^m - \gamma_{i-1}^m)^\perp}{h_i^m + h_{i+1}^m} - \delta_i^m \tau \frac{2}{h_i^m + h_{i+1}^m} \left( \frac{\gamma_{i+1}^m - \gamma_i^m}{h_{i+1}^m} - \frac{\gamma_i^m - \gamma_{i-1}^m}{h_i^m} \right) + \alpha_i^m \tau \left( \frac{\gamma_{i+1}^m - \gamma_{i-1}^m}{h_i^m + h_{i+1}^m} \right). \quad (3.12)$$

### 3.4 Diskretizácia normálovej a tangenciálnej rýchlosti

V rovnici (3.12) ešte vystupuje hodnota  $\alpha_i^m$ , ktorá prislúcha tangenciálnej rýchlosti, a hodnoty  $w_i^m, \delta_i^m$ , prislúchajúce normálovej rýchlosti. Pre tieto hodnoty si taktiež potrebujeme vyjadriť ich diskretný tvar. Hodnotu  $w_i$  vypočítame ako

$$\begin{aligned} w_i^m &= (1 - \lambda(t)) g_2^\gamma(\gamma_i^m) - \lambda(t) \nabla g_1(\gamma_i^m) \cdot \mathbf{N}_i^m \\ &= (1 - \lambda(t)) g_2^\gamma(\gamma_i^m) - \lambda(t) \nabla g_1(\gamma_i^m) \cdot \frac{(\gamma_{i+1}^m - \gamma_{i-1}^m)^\perp}{h_i^m + h_{i+1}^m}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Diskretný tvar  $\alpha_i^m$  pozostáva z niekoľkých členov, ktoré si tiež samostatne diskretizujeme. Pre  $i = 1, \dots, n-1$  počítame  $\alpha_i^m$  ako

$$\alpha_i^m = \alpha_{i-1}^m + h_i^m \langle k_i^m \beta_i^m \rangle - h_i^m k_i^m \beta_i^m + \omega \left( \frac{L^m}{n} - h_i^m \right) - \frac{\alpha_0^m - \alpha_n^m}{L^m}, \quad (3.14)$$

kde  $k_i^m$  predstavuje krivosť,  $\beta_i^m$  normálovú rýchlosť a  $L^m$  dĺžku krivky v časovom kroku  $m$ . Tieto hodnoty sú dané

$$k_i^m = \text{sgn}(\mathbf{h}_{i-1}^m \wedge \mathbf{h}_{i+1}^m) \frac{1}{2h_i^m} \arccos \left( \frac{\mathbf{h}_{i-1}^m \cdot \mathbf{h}_{i+1}^m}{h_{i-1}^m h_{i+1}^m} \right), \quad (3.15)$$

$$\beta_i^m = -\frac{\delta_{i-1}^m + \delta_i^m}{2} k_i^m + \frac{w_{i-1}^m + w_i^m}{2}, \quad (3.16)$$

$$\langle k_i^m \beta_i^m \rangle = \frac{1}{L^m} \sum_{l=1}^n h_l^m k_l^m \beta_l^m, \quad (3.17)$$

$$L^m = \sum_{l=1}^n h_l^m, \quad (3.18)$$

kde  $\mathbf{h}_i^m = \gamma_i^m - \gamma_{i-1}^m$  a  $h_i^m = |\mathbf{h}_i^m|$ . Hodnoty  $\alpha_0^m$  a  $\alpha_n^m$  budeme počítat pomocou vzorcov (2.19) a (2.20), ktoré taktiež prevedieme na diskretný tvar. Po vývoji začiatočného bodu krivky, ktorý popisujeme v sekcii 3.5.1 môžeme vypočítať hodnotu  $\alpha_0^m$ , ktorá sa potom používa vo výpočte tangenciálnej rýchlosti (3.14) pre ostatné body krivky. Hodnotu  $\alpha_0^m$  vypočítame skalárnym súčinom. Časovú deriváciu a jednotkový dotykový vektor v danom bode aproximujeme pomocou konečnej diferencie. Hodnotu  $\alpha_n^m$  vyjadříme analogicky, tiež až po výpočte koncového bodu krivky, popísaného v sekcii 3.5.2. Tangenciálnu rýchlosť v začiatočnom a koncovom bode počítame v tvare

$$\alpha_0^m = \left( \frac{\gamma_0^{m+1} - \gamma_0^m}{\tau} \right) \cdot \left( \frac{\gamma_1^m - \gamma_0^m}{h_1^m} \right). \quad (3.19)$$

$$\alpha_n^m = \left( \frac{\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m}{\tau} \right) \cdot \left( \frac{\gamma_{n-1}^m - \gamma_n^m}{h_n^m} \right). \quad (3.20)$$

### 3.5 Explicitná schéma pre sieť otvorených kriviek

Pre uzatvorené krivky môžeme používať výpočet explicitnej schémy, tak ako je napísaný v (3.12). Pre sieť otvorených kriviek treba explicitnú schému v začiatočných a koncových bodoch otvorených kriviek upraviť. V schéme vystupuje člen  $\gamma_{i-1}^m$ , ktorý by sme pre začiatočný bod koncovej krivky nevedeli identifikovať. Taktiež nevieme určiť člen  $\gamma_{i+1}^m$  pre koncový bod otvorenej krivky. Pre ostatné, vnútorné body otvorenej krivky môžeme použiť explicitnú schému v tvare (3.12). Popíšme si úpravu výpočtu najprv pre začiatočný bod a potom aj pre koncový bod otvorenej krivky.

#### 3.5.1 Úprava výpočtu pre začiatočný bod otvorenej krivky

Ako bolo spomenuté pre začiatočný bod  $\gamma_0^{m+1}$  otvorenej krivky, by sme pri použití explicitnej schémy (3.12) narazili na problém, aký bod zvoliť za predošlý, teda za bod  $\gamma_{i-1}^m$ . Pre uzavreté krivky je to jednoduché, vtedy počítame s bodom  $\gamma_{n-1}^m$ . Pri otvorených krivkách využijeme sieť kriviek a do úvahy budeme brať body zo susedných kriviek, ktoré majú totožné koncové alebo začiatočné body so začiatočným bodom danej krivky. Keďže pracujeme so sieťou kriviek, pridáme dolný index označujúci danú krivku. Ak má každá otvorená krivka práve dve susedné krivky, potom  $K = 3$  predstavuje celkový počet kriviek v rámci siete, to znamená aktuálnu krivku a jej dve susedné krivky. Nech  $k \in 1, \dots, K$ , potom  $\gamma_{k,i}^m$  predstavuje  $i$ -ty bod  $k$ -tej krivky v časovom kroku  $m$ . Pre lepšie znázornenie si pomôžeme aj obrázkom 3.3, kde vidíme, že pre výpočet začiatočného bodu  $\gamma_{1,0}^m$  krivky  $\gamma_1$ , budeme za pracovať s bodom  $\gamma_{2,n-1}^m$  zo susednej krivky  $\gamma_2$  a bodom  $\gamma_{3,1}^m$  zo susednej krivky  $\gamma_3$ . Vo všeobecnosti vieme výpočet pre nulový bod  $k$ -tej krivky v nasledujúcom časovom kroku vypočítať súčtom hodnoty v aktuálnom časovom kroku (prvý člen pravej strany rovnice) a aproximácií pomocou začiatočného bodu a bodu susednej krivky (druhý a štvrtý člen pravej strany rovnice) a nakoniec aj bodov susedných kriviek navzájom (tretí a piaty člen pravej strany rovnice). Rovnicu (3.12) upravíme na tvar

$$\begin{aligned} \gamma_{k,0}^{m+1} = & \gamma_{k,0}^m + \tau \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K w_{(k,k,j),(0,1,b_j)} \frac{(\gamma_{k,1}^m - \gamma_{j,b_j}^m)^\perp}{h_{(k,j),(0,b_j)}^m + h_{k,1}^m} \\ & + \tau \sum_{\substack{c=1 \\ c \neq k}}^{K-1} \sum_{\substack{d=c+1 \\ d \neq k}}^K w_{(k,c,d),(0,b_c,b_d)} \frac{(\gamma_{c,b_c}^m - \gamma_{d,b_d}^m)^\perp}{h_{(k,c),(0,b_c)}^m + h_{(k,d),(0,b_d)}^m} \\ & - \delta_0^m \tau \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K \frac{2}{h_{(k,j),(0,b_j)}^m + h_{k,1}^m} \left( \frac{\gamma_{k,1}^m - \gamma_{k,0}^m}{h_{k,1}^m} - \frac{\gamma_{k,0}^m - \gamma_{j,b_j}^m}{h_{(k,j),(0,b_j)}^m} \right) \\ & - \delta_0^m \tau \sum_{\substack{c=1 \\ c \neq k}}^{K-1} \sum_{\substack{d=c+1 \\ d \neq k}}^K \frac{2}{h_{(k,c),(0,b_c)}^m + h_{(k,d),(0,b_d)}^m} \left( \frac{\gamma_{c,b_c}^m - \gamma_{k,0}^m}{h_{(k,c),(0,b_c)}^m} - \frac{\gamma_{k,0}^m - \gamma_{d,b_d}^m}{h_{(k,d),(0,b_d)}^m} \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

kde  $b_j$  je index bodu na krivke  $\gamma_j$  a nadobúda hodnoty

$$b_j = \begin{cases} 1 & \text{ak } \gamma_{k,0}^m = \gamma_{j,0}^m \\ n-1 & \text{ak } \gamma_{k,0}^m = \gamma_{j,n}^m. \end{cases} \quad (3.22)$$

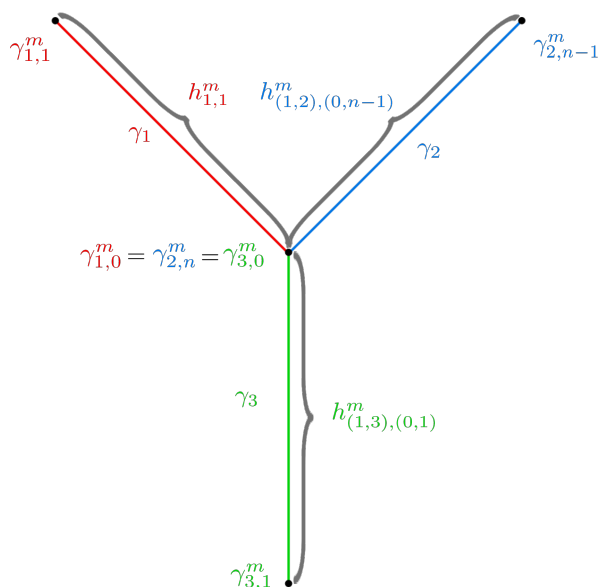
V treťom a poslednom člene pravej strany rovnice pracujeme iba so susednými krivkami, preto musí platiť  $c, d \neq k$  a  $c \neq d$ . Vzdialenosť  $h_{(k,j),(0,b_j)}^m$  (Obr. 3.3) meriame vždy medzi začiatočným bodom aktuálnej krivky (0-tým bodom  $k$ -tej krivky) a bodom zo susednej krivky ( $b_j$ -tým bodom  $j$ -tej krivky)

$$h_{(k,j),(0,b_j)}^m = |\gamma_{k,0}^m - \gamma_{j,b_j}^m|. \quad (3.23)$$

Hodnota  $w_{(k,c,d),(0,b_c,b_d)}$  taktiež závisí od viacerých kriviek, preto v tvare

$$w_{(k,c,d),(0,b_c,b_d)} = (1 - \lambda_0^m) g_2^c(\gamma_{k,0}^m) g_2^d(\gamma_{k,0}^m) - \lambda_0^m \nabla g_1(\gamma_{k,0}^m) \cdot \frac{(\gamma_{c,b_c}^m - \gamma_{d,b_d}^m)^\perp}{h_{(k,c),(0,b_c)}^m + h_{(k,d),(0,b_d)}^m}. \quad (3.24)$$

Je dôležité zdôrazniť, že na vývoj začiatočného a koncového bodu budú mať vplyv všetky susedné krivky. Všimnime si, že pre tento bod nepredpisujeme v tangenciálnom smere žiadny pohyb. Bod vyvíjame iba v normálovom smere, kombináciou až troch normál (Obr. 3.3). Teda je možné, že výsledný pohyb bodu bude mať aj tangenciálnu zložku. Pre každú krivku musíme zabezpečiť zhodnú orientáciu normál, čím dostaneme pre bod, v ktorom sa krivky stretávajú rovnaký vývoj pre všetky krivky. V tomto bode teda zostávajú krivky totožné počas celého vývoja.



Obr. 3.3: Začiatočný bod krivky  $\gamma_1$ , totožný s koncovým bodom krivky  $\gamma_2$  a začiatočným bodom krivky  $\gamma_3$ . Označenie vzdialeností je písané pre výpočet začiatočného bodu krivky  $\gamma_1$ .

### 3.5.2 Úprava výpočtu pre koncový bod otvorenej krivky

Pre koncový bod otvorenej krivky naopak dochádzka k problému v explicitnej schéme v tvare (3.12) s bodom  $\gamma_{i+1}^m$ . Postup bude rovnaký ako aj pre začiatočný bod otvorenej krivky. Pre koncový bod nepredpisujeme v tangenciálnom smere žiadny pohyb. Bod vyvíjame iba v normálovom smere, pričom berieme do úvahy nasledujúce body zo všetkých susedných kriviek, čím získame zachovanie totožnosti v koncovom bode počas celého vývoja kriviek. Koncový bod v nasledujúcom časovom kroku taktiež počítame ako súčet hodnoty v aktuálnom časovom kroku (prvý člen pravej strany rovnice) a aproximácií pomocou začiatočného bodu a bodu susednej krivky (druhý a štvrtý člen pravej strany rovnice) a nakoniec aj susedných bodov navzájom (tretí a piaty člen pravej strany rovnice). Opäť je potrebné zabezpečiť zhodnú orientáciu normál, čím bude vývoj tohto bodu pre všetky krivky, ktoré sa v ňom stretávajú,

rovnaký. Výpočet pre koncový  $n$ -tý bod  $k$ -tej krivky, kde  $k = 1, 2, \dots, K$  upravíme na tvar

$$\begin{aligned}
\gamma_{k,n}^{m+1} = & \gamma_{k,n}^m + \tau \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K w^{(k,j,k),(n,b_j,n-1)} \frac{(\gamma_{j,b_j}^m - \gamma_{k,n-1}^m)^\perp}{h_{k,n}^m + h_{(k,j),(n,b_j)}^m} \\
& + \tau \sum_{\substack{c=1 \\ c \neq k}}^{K-1} \sum_{\substack{d=c+1 \\ d \neq k}}^K w^{(k,c,d),(n,b_c,b_d)} \frac{(\gamma_{c,b_c}^m - \gamma_{d,b_d}^m)^\perp}{h_{(k,c),(n,b_c)}^m + h_{(k,d),(n,b_d)}^m} \\
& - \delta_n^m \tau \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^K \frac{2}{h_{k,n}^m + h_{(k,j),(n,b_j)}^m} \left( \frac{\gamma_{j,b_j}^m - \gamma_{k,n}^m}{h_{(k,j),(n,b_j)}^m} - \frac{\gamma_{k,n}^m - \gamma_{k,n-1}^m}{h_{k,n}^m} \right) \\
& - \delta_n^m \tau \sum_{\substack{c=1 \\ c \neq k}}^{K-1} \sum_{\substack{d=c+1 \\ d \neq k}}^K \frac{2}{h_{(k,c),(n,b_c)}^m + h_{(k,d),(n,b_d)}^m} \left( \frac{\gamma_{c,b_c}^m - \gamma_{k,n}^m}{h_{(k,c),(n,b_c)}^m} - \frac{\gamma_{k,n}^m - \gamma_{d,b_d}^m}{h_{(k,d),(n,b_d)}^m} \right), \quad (3.25)
\end{aligned}$$

kde pre  $b_j$  platí

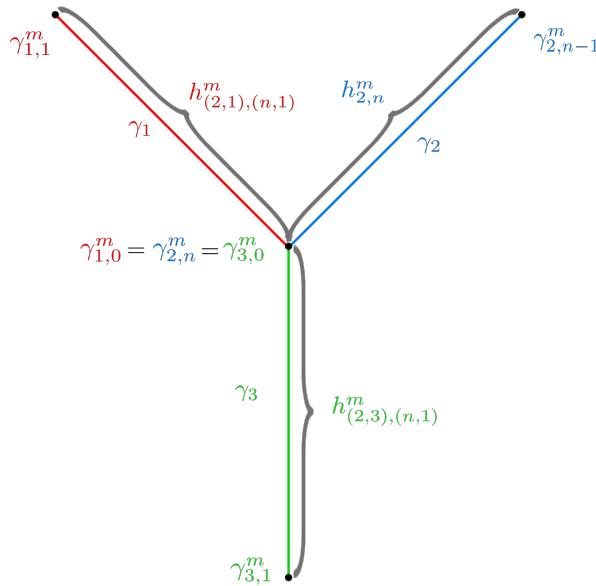
$$b_j = \begin{cases} 1 & \text{ak } \gamma_{k,n}^m = \gamma_{j,0}^m \\ n-1 & \text{ak } \gamma_{k,n}^m = \gamma_{j,n}^m, \end{cases} \quad (3.26)$$

Vzdialenosť  $h_{(k,j),(n,b_j)}^m$  (Obr. 3.4) meriame vždy medzi koncovým bodom aktuálnej krivky ( $n$ -tým bodom  $k$ -tej krivky) a bodom zo susednej krivky ( $b_j$ -tým bodom  $j$ -tej krivky)

$$h_{(k,j),(n,b_j)}^m = |\gamma_{k,n}^m - \gamma_{j,b_j}^m|. \quad (3.27)$$

Hodnotu  $w^{(k,c,d),(n,b_c,b_d)}$  vypočítame pomocou predpisu

$$w^{(k,c,d),(n,b_c,b_d)} = (1 - \lambda_n^m) g_2^{\gamma_c}(\gamma_{k,n}^m) g_2^{\gamma_d}(\gamma_{k,n}^m) - \lambda_n^m \nabla g_1(\gamma_{k,n}^m) \cdot \frac{(\gamma_{c,b_c}^m - \gamma_{d,b_d}^m)^\perp}{h_{(k,c),(n,b_c)}^m + h_{(k,d),(n,b_d)}^m}. \quad (3.28)$$



Obr. 3.4: Začiatkový bod krivky  $\gamma_1$ , totožný s koncovým bodom krivky  $\gamma_2$  a začiatkovým bodom krivky  $\gamma_3$ . Označenie vzdialeností je písané pre výpočet koncového bodu krivky  $\gamma_2$ .

## Kapitola 4

# Topologické zmeny

Počas vývoja kriviek sa môže stať, že sa krivky stretnú, inak povedané narazia do seba. Bez ošetrenia tejto situácie by krivky mohli vo vývoji pokračovať, až by sa pretli. V takom prípade by mohol jeden pixel patriť do viacerých oblastí. V našom prípade, ale chceme hranicu medzi oblasťami jednoznačne určiť, preto potrebujeme tento stret kriviek ošetriť a musí dôjsť k topologickým zmenám na krivkách. Budeme vychádzať už z existujúcich algoritmov, pre spájanie a rozdeľovanie kriviek, pričom budeme využívať poznatky z článku [1] and [2].

Topologické zmeny zhrnieme do troch hlavných algoritmov. Prvým algoritmom, ktorý si predstavíme v sekcii 4.1 bude pridávanie a odoberanie bodov pre zaistenie rovnomernej vzdialenosti medzi jednotlivými bodmi. Druhým algoritmom popísaným v sekcii 4.2 vyriešime situáciu, kedy do seba narazia body tej istej krivky, napríklad v situácii, kedy krivka obchádza oblasť vo vnútri segmentovanej oblasti. V situácii, kedy do seba narazia body rôznych kriviek dôjde k vzniku siete kriviek, ktorý si popíšeme v sekcii 4.3.

Pri nasledujúcich algoritmoch vynecháme označenie časového kroku  $m$ , keďže detekujeme topologické zmeny pred každým časovým krokom vývoja. Budeme používať rovnaké označenie, ako je uvedené aj v zdroji [1]. Zavedie si premennú  $NC$  pre počet uzavretých a rodičovských kriviek. Počet bodov  $j$ -tej krivky označíme ako  $n_j$ .

### 4.1 Pridávanie a odoberanie bodov

Hlavnou úlohou tohto algoritmu je pridať body medzi body krivky, ktoré sú od seba príliš vzdialené a naopak odobrať body ak sú príliš blízko. Vďaka tomuto algoritmu tak zabezpečíme približne rovnaké vzdialenosti susedných bodov krivky. Následne sa počas vývoja tieto body vďaka vhodnej tangenciálnej rýchlosti asymptoticky rovnomerne redistribujú. Algoritmus pridávania a odoberania bodov je potrebný pre správne fungovanie algoritmov na topologické zmeny. Na úvod si zvolíme požadovanú vzdialenosť segmentu  $h_d$  medzi susednými bodmi. Budeme prechádzať všetkými bodmi krivky a vždy vypočítame vzdialenosť každého segmentu  $h_i$  a pripočítame k premennej  $L_{dif} = h_i - h_d$ . Po každom pripočítaní skontrolujeme, či je hodnota premennej  $L_{dif}$  väčšia ako nami požadovaná vzdialenosť segmentu  $h_d$ . Ak je väčšia dôjde k pridaniu alebo ak je menšia k odoberaniu bodov, podľa algoritmu 1. V algoritme používame funkcie na nájdenie najdlhšieho a najkratšieho segmentu. Na vstup dostanú indexy dvoch bodov a na na úseku danom týmito bodmi každá funkcia vráti index najdlhšieho, prípadne najkratšieho segmentu. Vo funkcii `AddPoints( $N, l$ )` potom pridáme  $N$  bodov, do  $l$ -tého segmentu krivky a vo funkcii `DeletePoints( $s$ )` vymažeme body na  $s$ -tom segmente krivky.

---

**Algorithm 1** Pridávanie a odoberanie bodov

---

```
 $k \leftarrow 0$ 
 $i \leftarrow 0$ 
 $L_{dif} \leftarrow 0$ 
for  $i \leftarrow 1$  to  $n_j$  do
   $L_{dif}(i, k) \leftarrow L_{dif}(i, k) + h_i - h_d$ 
  if  $|L_{dif}(i, k)| > h_d$  then
    if  $L_{dif}(i, k) > 0$  then
       $l \leftarrow \text{LongestSegment}(k, i)$ 
       $N \leftarrow \text{floor}(L_{dif}(i, k)/h_d)$ 
       $\text{AddPoints}(N, l)$ 
       $L_{dif}(i, k) \leftarrow L_{dif}(i, k) - Nh_d$ 
       $k \leftarrow i$ 
    else
       $s \leftarrow \text{ShortestSegment}(k, i)$ 
       $\text{DeletePoints}(s)$ 
       $L_{dif}(i, k) \leftarrow L_{dif}(i, k) + h_d$ 
       $k \leftarrow i$ 
    end if
  end if
end for
```

---

## 4.2 Delenie kriviek

Algoritmom 2 ošetríme situácie, kedy do seba narazia body rovnakej krivky, napríklad v situácii, kedy krivka obchádza oblasť vo vnútri segmentovanej oblasti. Algoritmus je užitočný pri nehomogénnych oblastiach, kedy je potrebné úsek medzi bodmi krivky, ktoré sa stretli oddeliť, prípadne vymazať, aby sme predišli jej zauzleniu. Vytvoríme maticu  $P$ , ktorá predstavuje množinu pixelov obrazu  $I^{\sigma_0}$ . Matica má teda veľkosť obrazu  $I^{\sigma_0}$ . Hodnota  $P[\gamma_{j,i}]$  predstavuje súradnice pixelu, do ktorého patrí bod  $\gamma_{j,i}$ . Na začiatku algoritmu si pixely, v ktorých ležia body danej kriviek nastavíme na 0. Následne opäť prejdeme všetkými bodmi krivky, pričom ak je hodnota  $P[\gamma_{j,i}]$  rovná nule, znamená to, že tento pixel prechádzame po prvýkrát a zapíšeme sem index bodu danej krivky. Ak sa však hodnota  $P[\gamma_{j,i}]$  nerovná nule, znamená to, že iný bod tejto krivky sa vyskytuje v rovnakom pixely. Máme teda dva indexy bodov  $s_1, s_2$  jednej krivky ktoré sa stretli v rovnakom pixely. Ak je rozdiel indexov bodov väčší ako 2, body, ktoré sa nachádzajú medzi bodmi s indexami  $s_1, s_2$  odstránime pomocou funkcie  $\text{RemovePoints}(j, s_1, s_2)$ . Modifikáciou tohto algoritmu 2, ktorú však v tejto práci nepoužívame, by bolo vytvorenie novej krivky, ktorá by bola týmito odstránenými bodmi definovaná.

---

**Algorithm 2** Delenie krivky

---

```
for  $j \leftarrow 1$  to  $NC$  do
  for  $i \leftarrow 1$  to  $n_j$  do
     $P[\gamma_{j,i}] \leftarrow 0$ 
  end for
  for  $i \leftarrow 1$  to  $n_j$  do
    if  $P[\gamma_{j,i}] = 0$  then
       $P[\gamma_{j,i}] \leftarrow i$ 
    else
      if  $i - P[\gamma_{j,i}] > 2$  then
         $s_1 \leftarrow i$ 
         $s_2 \leftarrow P[\gamma_{j,i}]$ 
        RemovePoints( $j, s_1, s_2$ )
         $j \leftarrow -$ 
        break
      end if
    end if
  end for
end for
```

---

### 4.3 Vytvorenie siete kriviek

Majme dve krivky, ktoré sa súčasne vyvíjajú. Počas vývoja sa môže stať, že krivky na seba narazia, inak povedané stretnú sa v jednom pixeli. Situácia, kedy nájdeme aspoň dve dvojice rôznych bodov (jeden bod z jednej krivky, druhý bod z druhej krivky), pre nás signalizuje detekciu nastávajúcej topologickej zmeny, konkrétne vznik siete kriviek. To znamená, že musí vzniknúť nová krivka na rozhraní medzi dvomi pôvodnými krivkami a pôvodné krivky v mieste tohto rozhrania prerušíme. Novo vzniknutú krivku na rozhraní budeme ďalej označovať ako hraničnú krivku. Krivky, ktoré sa počas vývoja stretli označíme ako rodičovské pre novovzniknutú hraničnú krivku. Algoritmus 3 vytvorený pre vznik siete kriviek si môžeme rozdeliť na dve časti. Prvou bude vznik hraničnej krivky (sekcia 4.3.1) a druhou úprava rodičovských kriviek (4.3.2), teda kriviek ktoré sa počas vývoja stretli.

---

**Algorithm 3** Vytvorenie siete kriviek

---

```
if  $NC > 1$  then
  SetAuxiliaryP()
  for  $j \leftarrow 2$  to  $NC$  do
    FindMarginalPoints( $j$ )
    if  $numberOfMarginalPoints \geq 2$  then
      CreateBoundaryCurve( $boundaryPoints$ )
      EditParentCurves( $c_1, c_2$ )
    end if
  end for
end if
```

---

Na začiatku algoritmu 3 si nastavíme hodnoty matice  $P$  (Algoritmus 4). Prejdeme cez všetky krivky okrem prvej, a cez všetky body týchto kriviek. Pixely, v ktorých ležia body kriviek nastavíme na  $P[\gamma_{j,i}] = 0$ . Následne hodnoty  $P[\gamma_{1,i}]$  nastavíme na 1, čiže v pixeloch, kde leží prvá krivka nastavíme hodnotu jej indexu.



---

**Algorithm 4** Nastavenie matice  $P$ 

---

```
procedure SETAUXILIARYP
  for  $j \leftarrow 2$  to  $NC$  do
    for  $i \leftarrow 1$  to  $n_j$  do
       $P[\gamma_{j,i}] \leftarrow 0$ 
    end for
  end for
  for  $i \leftarrow 1$  to  $n_1$  do
     $P[\gamma_{1,i}] \leftarrow 1$ 
  end for
end procedure
```

---

V algoritme 5 budeme prechádzať cez body  $j$ -tej krivky a kontrolovať, či  $P[\gamma_{j,i}] = 0$ . Ak áno, znamená to, že sme doposiaľ nenašli bod, ktorý by sa nachádzal v tomto pixeli, preto hodnotu  $P[\gamma_{j,i}]$  prepíšeme na index aktuálnej krivky. Ak však hodnota  $P[\gamma_{j,i}]$  nie je rovná nule a ani indexu aktuálnej krivky, znamená to, že v tomto pixeli už je bod inej krivky. Získame tak dva indexy kriviek  $c_1, c_2$ , ktoré sa stretli v jednom pixeli, a indexy prislúchajúcich bodov, ktoré označíme ako  $m_1$  a  $m_2$ .

---

**Algorithm 5** Nájdenie bodov kriviek, ktoré sú v rovnakých pixeloch

---

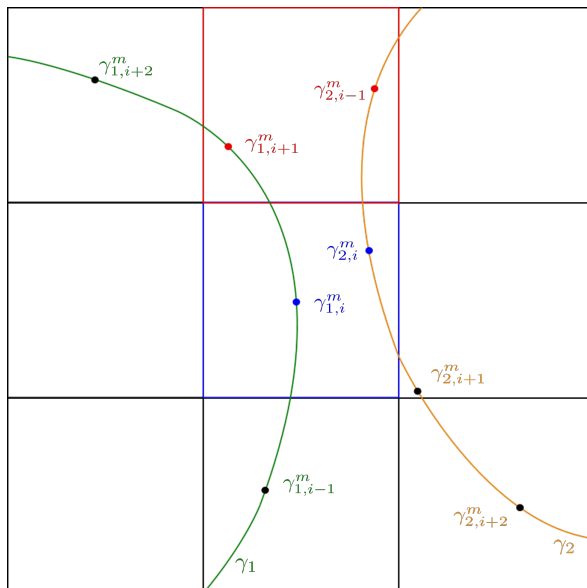
```
procedure FINDMARGINALPOINTS( $j$ )
  for  $i \leftarrow 1$  to  $n_j$  do
    if  $P[\gamma_{j,i}] = 0$  then
       $P[\gamma_{1,i}] \leftarrow j$ 
    else
      if  $P[\gamma_{j,i}] < j$  then
         $c_1 \leftarrow P[\gamma_{j,i}]$ 
         $c_2 \leftarrow j$ 
         $m_2 \leftarrow i$ 
         $P[\gamma_{j,i}] \leftarrow -1$ 
        for  $k \leftarrow 1$  to  $n_{c_1}$  do
          if  $P[\gamma_{c_1,k}] = -1$  then
             $m_1 \leftarrow k$ 
             $P[\gamma_{j,i}] \leftarrow c_1$ 
          end if
        end for
        CreateBoundaryPoint( $\gamma_{c_1,m_1}, \gamma_{c_2,m_2}$ )
         $range_{c_1}, range_{c_2} \leftarrow \text{SaveParentIndices}(m_1, m_2)$ 
      end if
    end if
  end for
end procedure
```

---

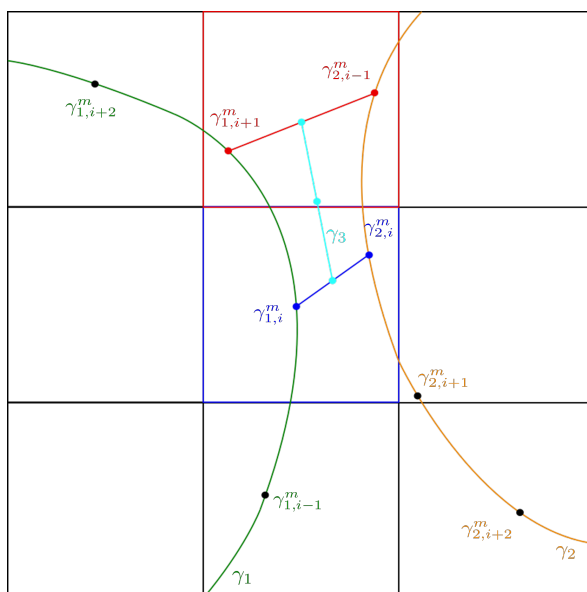
### 4.3.1 Vznik hraničnej krivky

Situáciu kedy dôjde k vzniku hraničnej krivky si ilustrujeme aj na obrázku 4.1. Z obrázka vidíme, že v jednom pixeli sa stretli body  $\gamma_{1,i}$  a  $\gamma_{2,i}$  a v susednom pixeli sa stretli body  $\gamma_{1,i+1}$  a  $\gamma_{2,i-1}$ . Krivky  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$  označíme za rodičovské krivky. Body hraničnej krivky získame vypočítaním priemeru dvojíc bodov, ktoré sa stretli v jednom pixeli (Algoritmus 6). Hraničná krivka má teda v čase svojho vzniku aspoň dva body získané priermi z jej rodičovských

kriviek. Ak má hraničná krivka iba 2 body, pridáme jej ešte jeden bod (Obr.4.2), ktorý bude priemerom už jej existujúcich bodov. Tento bod pridávame pre budúce používanie niektorých algoritmov, kedy potrebujeme krivky s aspoň tromi bodmi. Takúto hraničnú krivku (Obr.4.2) určenú aspoň tromi bodmi máme pripravenú na vývoj v rámci siete kriviek pomocou explicitnej schémy popísanej v sekcii 3.5.



Obr. 4.1: Ukážka, kedy je splnená podmienka pre vznik novej, hraničnej krivky.



Obr. 4.2: Vznik novej krivky, stretnutím rodičovských kriviek  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$ , vznikla nová hraničná krivka  $\gamma_3$ .

Pri vzniku novej, hraničnej krivky, ktorá je otvorená treba vytvoriť aj príslúchajúcu funkciu  $g_2^\gamma(x)$ , ktorej definíciu pre uzavreté krivky sme opísali v sekcii 2.3.2. Pre rodičovské krivky, ktoré boli pôvodne uzavreté sa hodnoty funkcie  $g_2^\gamma(x)$  nemenia, otvorená krivka teda zdedí tieto hodnoty od jej pôvodnej uzavretej krivky. Pre hraničnú krivku funkcia  $g_2^\gamma(x)$  vznikne násobkom príslušných funkcií rodičovských kriviek. V našom ilustračnom príklade teda platí, že  $g_2^{\gamma_3}(x) = g_2^{\gamma_1}(x)g_2^{\gamma_2}(x)$ .

---

**Algorithm 6** Vytváranie bodov hraničnej krivky

---

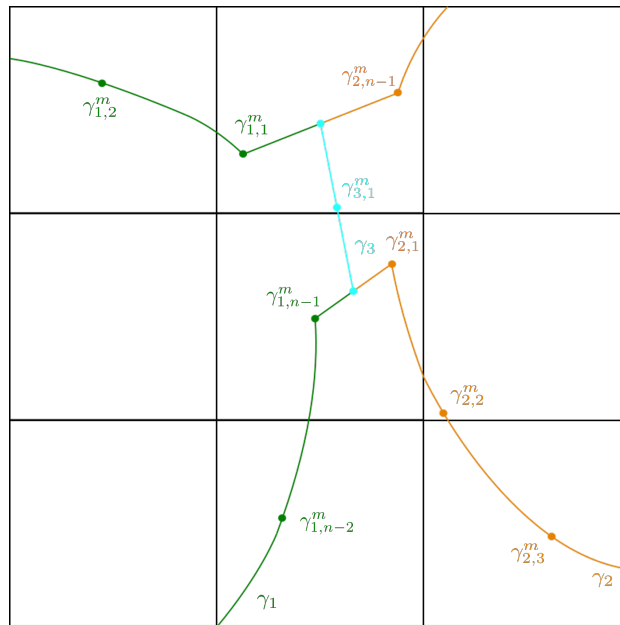
```
procedure CREATEBOUNDARYPOINT( $\gamma_{c_1, m_1}, \gamma_{c_2, m_2}$ )  
   $np \leftarrow (\gamma_{c_1, m_1} + \gamma_{c_2, m_2})/2$   
   $boundaryPoints.append(np)$   
end procedure
```

---

Po nájdení aspoň dvoch hraničných bodov pokračuje v algoritme 3 funkciou na vytvorenie hraničnej krivky. V tejto funkcii skontrolujeme či je počet bodov hraničnej krivky rovný dvom, ak áno, krivku doplníme aj tretím bodom. Po vytvorení hraničnej krivky treba ešte upraviť príslušné rodičovské krivky.

### 4.3.2 Úprava rodičovských kriviek

Za rodičovské krivky považujeme dve uzavreté krivky, ktoré sa stretli v dvoch rôznych pixeloch, čím zapríčinili vznik novej, hraničnej krivky. Po vzniku hraničnej krivky musíme tieto krivky upraviť. Pre každú rodičovskú krivku odstránime všetky body od prvého bodu, v ktorom sa rodičovské krivky stretli až po posledný nájdený bod spoločný bod. Dôležité je zanechať orientáciu krivky (uzatvorená krivka je parametrizovaná v protismere hodinových ručičiek). Po tomto kroku musíme ešte každej rodičovskej krivke pridať začiatkový alebo koncový bod hraničnej krivky, vďaka čomu budú krivky v týchto bodoch totožné, pozri obr. 4.3. Vzniknú nám tak dve otvorené krivky, ktoré spolu s hraničnou krivkou tvoria sieť.



Obr. 4.3: Úprava rodičovských kriviek  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$ .

V algoritme 5 sme pomocou funkcie  $SaveParentIndices(m_1, m_2)$  pre krivku s indexom  $c_1$  určili najmenšiu a najväčšiu hodnotu z pomedzi všetkých indexov  $m_1$  a tieto dve hodnoty uložili do premennej  $range_{c_1}$ . Pre krivku s indexom  $c_2$  taktiež určíme najmenšiu a najväčšiu hodnotu z pomedzi všetkých indexov  $m_2$  a tieto dve hodnoty uložíme do premennej  $range_{c_2}$ . Premenné  $range_{c_1}$ ,  $range_{c_2}$  ďalej použijeme vo funkcii na úpravu rodičovských kriviek (Algoritmus 7) na odstránenie bodov tvoriacich rozhranie (Algoritmus 8). V algoritme 8 je potrebné odstrániť body tak, aby bola zachovaná orientácia krivky. Po odstránení bodov je posledným krokom napojenie rodičovských kriviek na hraničnú krivku pridaním jej začiatkového a koncového bodu na začiatok a koniec rodičovskej krivky, podľa algoritmu 9.

Porovnaním vzdialenosti začiatočného bodu hraničnej krivky a začiatočného bodu už otvorenej rodičovskej krivky zistíme, ktorý bod treba pridať na začiatok a ktorý bod treba pridať na koniec danej krivky.

---

**Algorithm 7** Úprava rodičovských kriviek

---

```

procedure EDITPARENTCURVES( $c_1, c_2$ )
  RemovePoints( $range_{c_1}$ )
  RemovePoints( $range_{c_2}$ )
  AddBoundarypoints( $c_1$ )
  AddBoundarypoints( $c_2$ )
end procedure

```

---



---

**Algorithm 8** Odstránenie bodov rodičovských kriviek na rozhraní

---

```

procedure REMOVEPOINTS( $range_c$ )
   $\triangleright range_c[0]$  - minimálny index,  $range_c[1]$  - maximálny index
   $nb \leftarrow range_c[1] - range_c[0]$ 
  if  $nb < \gamma_c.size() - nb$  then
     $curveEnd \leftarrow \gamma_c[0, range_c[0]]$ 
     $\gamma_c.erase(0, range_c[1])$ 
     $\gamma_c.append(curveEnd)$ 
  else
     $\gamma_c.erase(range_c[1], \gamma_c.end())$ 
     $\gamma_c.erase(\gamma_c.begin(), range_c[0])$ 
  end if
end procedure

```

---



---

**Algorithm 9** Pridanie bodov hraničnej krivky

---

```

procedure ADDBOUNDARYPOINTS( $c$ )
   $\triangleright$  Funkcia insert() pridá bod na začiatok krivky, a append() pridá bod na koniec krivky.
  if  $distance(boundaryPoints.first(), \gamma_c.first()) <$ 
     $distance(boundaryPoints.last(), \gamma_c.first())$  then
     $\gamma_c.insert(boundaryPoints.first())$ 
     $\gamma_c.append(boundaryPoints.last())$ 
  else
     $\gamma_c.insert(boundaryPoints.last())$ 
     $\gamma_c.append(boundaryPoints.first())$ 
  end if
end procedure

```

---



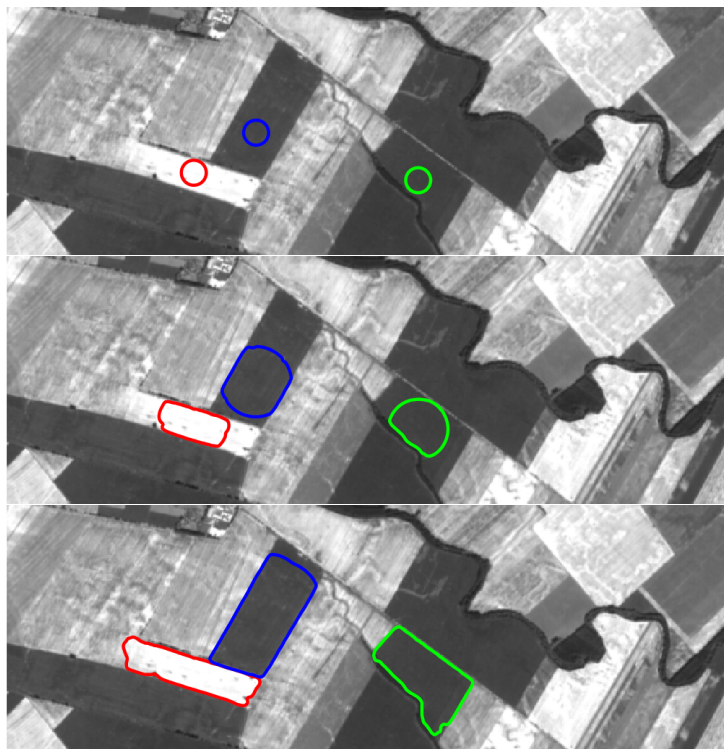
## Kapitola 5

# Numerické experimenty

Ako bolo už v úvode spomenuté, budeme používať reálne dáta získané zo satelitu misie Sentinel-2 1.2. Pracovať budeme so zeleným kanálom (B3), ktorý je najvhodnejší pre rozlišovanie vegetácie a taktiež má najlepšie rozlíšenie (10m). V tejto kapitole si pre overenie funkčnosti algoritmov ukážeme niekoľko numerických experimentov. Naším cieľom bude jednoznačne určiť hranicu medzi jednotlivými oblasťami. Najskôr si v sekcii 5.1 ukážeme segmentáciu viacerých oblastí pomocou uzavretých kriviek a segmentáciu rovnakých oblastí, avšak pomocou siete kriviek. V sekcii 5.2 si následne ukážeme niekoľko ďalších experimentov upraveného modelu segmentácie.

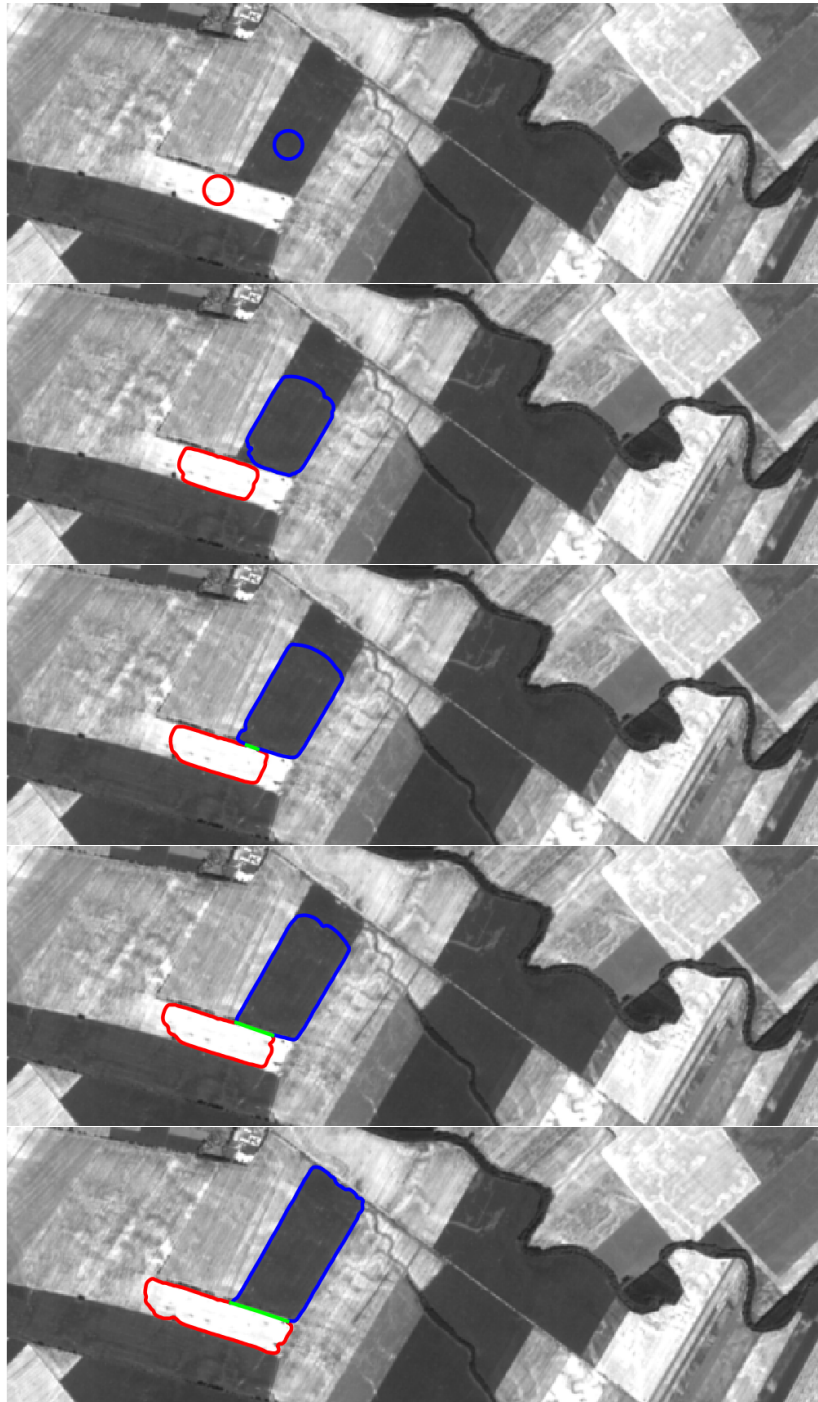
### 5.1 Segmentácia pomocou uzavretých kriviek a siete kriviek

Pri prvom experimente na segmentáciu používame uzavreté krivky. Prvým krokom je umiestnenie počiatočných kriviek do oblastí, ktoré chceme segmentovať. V našom experimente sme vybrali tri oblasti a teda aj tri príslúchajúce krivky. Zvolili sme parametre segmentácie  $\sigma_0 = 0.5$ ,  $\zeta = 500$ ,  $\delta = 0.3$ ,  $\lambda = 0.5$ .



Obr. 5.1: Vývoj kriviek. Hore: Počiatočné krivky. Dole: Krivky v poslednom časovom kroku vývoja.

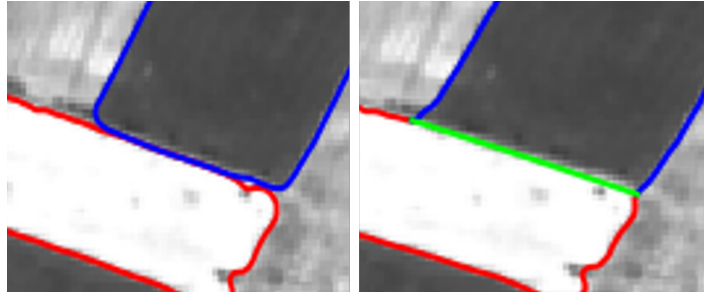
Z obrázka 5.1 vidíme, že medzi oblasťami označenými červenou a modrou farbou by mala byť určená hranica, keďže tieto oblasti sú si susedné. Preto sa v ďalšom experimente zameriame na vývoj týchto dvoch uzavretých kriviek, ktoré stretnutím na hranici vytvoria hraničnú krivku a ďalej sa budú v sieti kriviek vyvíjať ako otvorené krivky. Postupný vývoj si ukážeme na obrázku 5.2.



Obr. 5.2: Vývoj kriviek, kde zelená krivka predstavuje hranicu medzi segmentovanými oblasťami.

Z obrázku 5.2 vidíme, že na začiatku vyvíjame uzatvorené krivky, pričom pri stretnutí vzniká nová, hraničná krivka a následne sa všetky tri krivky vyvíjajú už ako otvorené krivky. Na konci vývoja tak získame jednoznačne určenú hranicu označenú zelenou farbou medzi dvoma oblasťami, označenými červenou a modrou farbou. Všimnime si, že počas celého vývoja

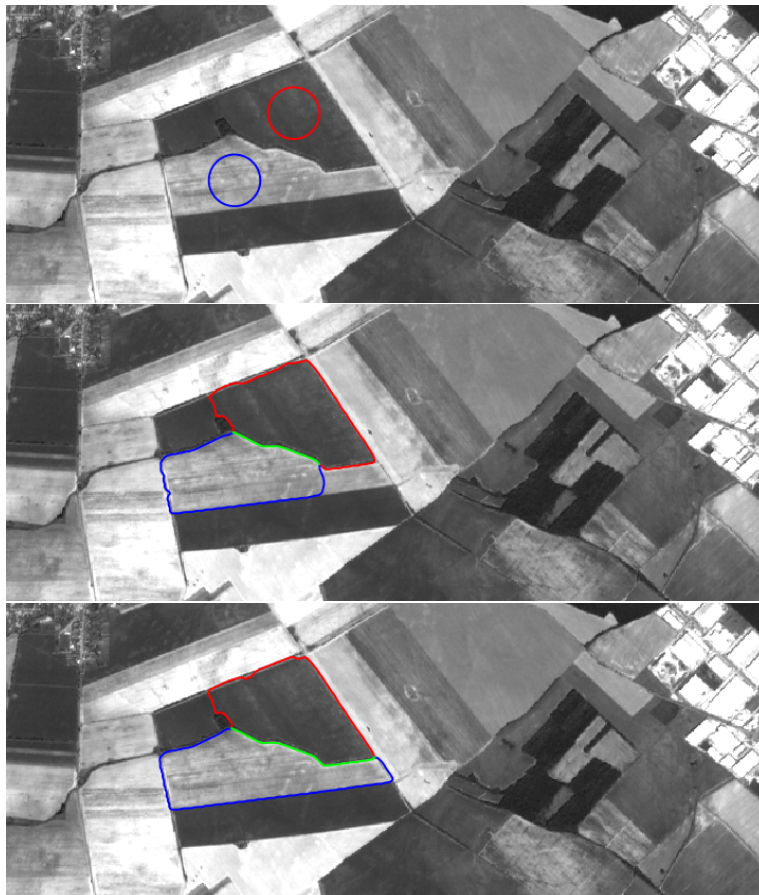
sú krivky v sieti prepojené pomocou ich začiatkových a koncových bodov. Na obrázku 5.3 vidíme, že segmentáciou pomocou uzavretých kriviek nevieme jednoznačne určiť hranicu oblastí, čo sa pomocou nášho modelu podarilo.



Obr. 5.3: Priblíženie na hranicu oblastí. Vľavo: Vývoj na hranici pomocou uzavretých kriviek. Vpravo: Vývoj pomocou siete kriviek, čím na hranici vznikla jedna hraničná krivka.

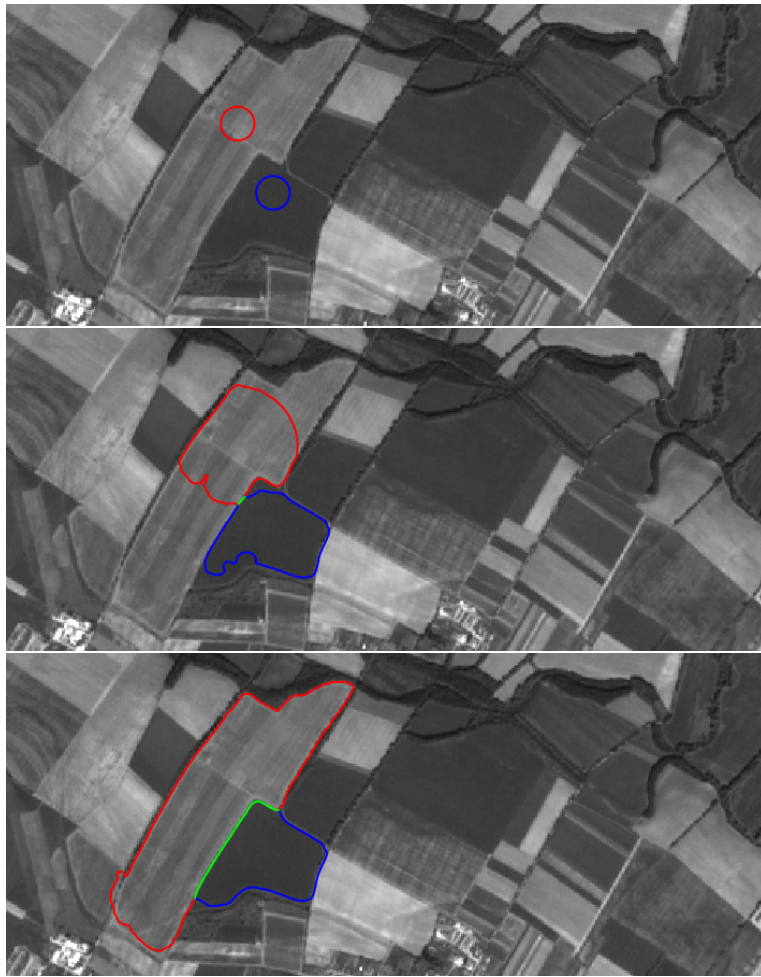
## 5.2 Definovanie hranice medzi segmentovanými oblasťami

V tejto sekcii si ukážeme ďalšie experimenty, v ktorých sa nám úspešne podarilo určiť hranicu medzi jednotlivými oblasťami. Pre tieto experimenty sme opäť zvolili parametre segmentácie  $\sigma_0 = 0.5$ ,  $\zeta = 500$ ,  $\delta = 0.3$ ,  $\lambda = 0.5$ . Počiatočné krivky sú označené červenou a modrou farbou. Zelená krivka v každom z týchto experimentov predstavuje hraničnú krivku segmentovaných oblastí.

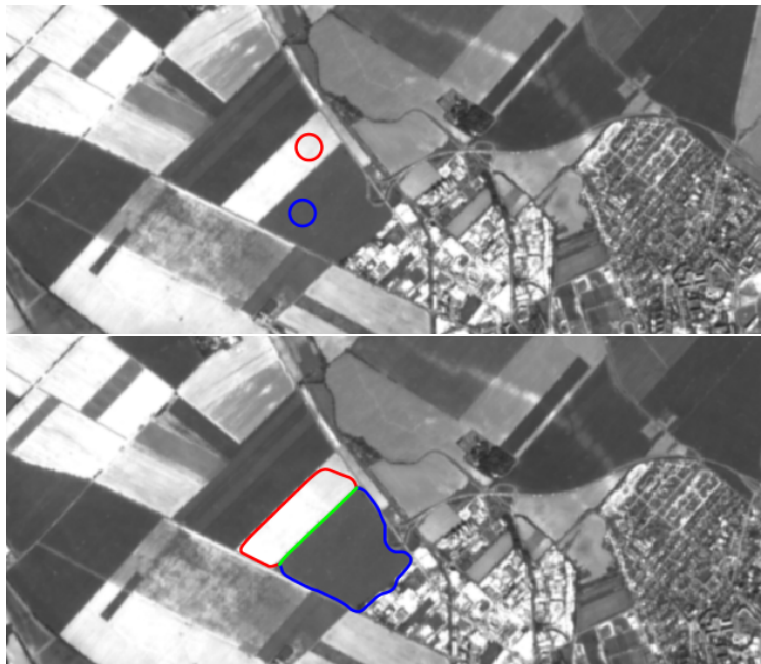


Obr. 5.4: Evolúcia kriviek, kde zelená krivka predstavuje hranicu medzi segmentovanými oblasťami.





Obr. 5.5: Evolúcia kriviek.



Obr. 5.6: Evolúcia kriviek. Hore: Počiatočné krivky. Dole: Krivky v poslednom časovom kroku vývoja.

# Kapitola 6

## Záver

V práci sme sa venovali modifikácii a rozšíreniu modelu automatickej segmentácie, vychádzajúceho z článku [8]. Naším hlavným cieľom bolo segmentácia viacerých oblastí pomocou siete rovinných kriviek s možnosťou vytvorenia jednoznačne určenej hranice medzi segmentovanými oblasťami.

Modifikácie modelu sme implementovali v jazyku C++. Na vizualizáciu sme používali aj softvér Wolfram Mathematica. Podarilo sa nám úspešne vytvoriť sieť otvorených kriviek a jednoznačne určiť hranicu medzi segmentovanými oblasťami, čo sme v poslednej kapitole potvrdili niekoľkými numerickými experimentami.

Napriek uspokojivým výsledkom, by bolo prínosné sa v budúcnosti zamerať na ladenia parametrov použitých na segmentáciu pre zistenie ich optimálnych hodnôt. Priestor na zlepšenie je taktiež aj pri riešení rovnice vývoja krivky. V našom modeli používame explicitnú schému, ktorej významným nedostatkom je nestabilita v prípade nevhodne zvoleného časového kroku. Vylepšením by teda bolo použitie stabilnejších metód, napr. implicitnej schémy.



# Bibliografia

1. AMBROZ, M.; BALAŽOVJECH, M.; MEDIĀ, M.; MIKULA, K. Numerical Modeling of Wildland Surface Fire Propagation by Evolving Surface Curves. *Adv. Comput. Math.* 2019, roč. 45, č. 2, 1067–1103. ISSN 1019-7168. Dostupné z DOI: [10.1007/s10444-018-9650-4](https://doi.org/10.1007/s10444-018-9650-4).
2. BALAŽOVJECH, M.; MIKULA, K.; PETRÁŠOVÁ, M.; URBÁN, J. Lagrangean method with topological changes for numerical modelling of forest fire propagation. *Proceedings of the Conference Algoritmy*. 2015, s. 42–52.
3. CATTÉ, F.; LIONS, P.-L.; MOREL, J.-M.; COLL, T. Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion. *SIAM Journal on Numerical Analysis* [online]. 1992, roč. 29, č. 1, s. 182–193 [cit. 2023-05-11].
4. *Copernicus, Sentinel-2* [<https://www.copernicus.eu/en/media/images/sentinel-2-high-resolution-and-multispectral>]. [B.r.].
5. HOSSEINIMANSOORI, A.; TALEBIAN, A.; MOLAEI, Z.; FIROUZJAH, H. Multi-field Mimetic Gravity. 2021.
6. KRIVÁ, Z.; MIKULA, K.; STAŠOVÁ, O. *Spracovanie obrazu*. Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2016.
7. KÜHNEL, W. Differential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds, Third Edition. In: American Mathematical Society, 2015.
8. MIKULA, K.; URBÁN, J.; KOLLÁR, M.; AMBROZ, M.; JAROLÍMEK, I.; ŠIBÍK, J.; ŠIBÍKOVÁ, M. An automated segmentation of NATURA 2000 habitats from Sentinel-2 optical data. 2021.
9. MIKULA, K.; ŠEVČOVIČ, D. A direct method for solving an anisotropic mean curvature flow of plane curves with an external force. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2004, roč. 27.
10. *Sentinel-2 mission guide* [<https://sentinel.esa.int/web/sentinel/missions/sentinel-2>]. [B.r.].
11. ŠEVČOVIČ, D.; MIKULA, K. Evolution of Plane Curves Driven by a Nonlinear Function of Curvature and Anisotropy. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2001, roč. 61, č. 5, s. 1473–1501.