

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
STAVEBNÁ FAKULTA

EVIDENČNÉ ČÍSLO: SvF-5343-87685

NUMERICKÉ METÓDY PRE NIEKTORÉ LEVEL
SET ROVNICE S KRIVOSTNÝM ČLENOM
DIPLOMOVÁ PRÁCA

2021
Bc. KATARÍNA LACKOVÁ

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Stavebná fakulta

EVIDENČNÉ ČÍSLO: SvF-5343-87685

**Numerické metódy pre niektoré level set
rovnice s krivostným členom**
Diplomová práca

Študijný program: Matematicko-počítačové modelovanie

Študijný odbor: Matematika

Školiace pracovisko: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

Vedúci práce: doc. RNDr. Peter Frolkovič, PhD.

Bratislava 2021

Bc. Katarína Lacková



ZADANIE DIPLOMOVEJ PRÁCE

Študentka: **Bc. Katarína Lacková**
ID študenta: 87685
Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie
Študijný odbor: matematika
Vedúci práce: doc. RNDr. Peter Frolkovič, PhD.

Názov práce: **Numerické metódy pre niektoré level set rovnice s krivostným členom**

Jazyk, v ktorom sa práca vypracuje: slovenský jazyk

Špecifikácia zadania:

Práca sa bude zaoberať návrhom metód numerickej diskretizácie a riešenia algebraických rovníc predovšetkým pre úlohu expanzie krivky s malým regularizačným krivostným členom.

Riešenie zadania práce od: 23. 09. 2020

Dátum odovzdania práce: 07. 05. 2021

Bc. Katarína Lacková
študentka

Ing. Marek Macák, PhD.
vedúci pracoviska

prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.
garant študijného programu

Čestné prehlásenie

Čestne vyhlasujem, že prácu s názvom: *Numerické metódy pre niektoré level set rovnice s krivostným členom* som vypracovala samostatne, na základe konzultácií a s použitím uvedených informačných zdrojov a literatúry.

Bratislava 13.5.2021

Katarína Lacková

Podakovanie

Touto cestou by som sa chcela podakovať vedúcemu práce, doc. RNDr. Petrovi Frolkovičovi, PhD. za jeho ochotu, trpezlivosť, množstvo cenných rád a večne dobrú náladu, ktorou aj náročné chvíle dokáže premeniť na inšpirujúce a poučné. Pre každého študenta je radosť vzdelávať sa, keď má po boku skvelého učiteľa.

Obsah

Úvod	3
1 Matematický model	4
2 Numerická diskretizácia	6
2.1 Eikonalova rovnica	6
2.2 Lineárna advekcia s malým difúznym členom	7
2.3 Upwind metóda pre aproximáciu krivosti	10
3 Numerické metódy	12
3.1 Fast sweeping metóda	12
3.2 Fast marching metóda	13
3.3 Fast iterative metóda	13
4 Numerické experimenty	16
4.1 Numerický experiment s presným riešením	17
4.1.1 Riešenie metódou Fast sweeping	18
4.1.2 Riešenie Fast iterative metódou	19
4.2 Numerický experiment pre krivky v tvare kosínusoidy	21
4.3 Numerický experiment pre krivky v tvare štvorlístka	22
4.3.1 Riešenie metódou Fast sweeping	22
4.3.2 Riešenie rovnice s regularizačným difúznym členom metódou Fast sweeping	23
4.4 Numerický experiment na mape horľavosti podložia	25
4.4.1 Riešenie metódou Fast sweeping	25
Záver	29
Zoznam použitej literatúry	30

Abstrakt

Abstrakt: Táto práca sa zaoberá riešením eikonalovej rovnice s pridaným regularizačným difúznym alebo krivostným členom navrhnutou upwind numerickou aproximačnou schémou. Cenným prínosom bude aplikácia navrhnutej upwind numerickej schémy pri viacerých numerických experimentoch. Budeme pozorovať správanie sa numerických metód pri aproximáciách eikonalovej rovnice s difúznym, či krivostným členom našou upwind schémou, ako aj ich konvergenciu, presnosť a v neposlednej rade aj vlastnosti samotného riešenia so zohľadneným krivostným, či difúznym členom.

Kľúčové slová: metódy úrovňovej množiny, numerická aproximácia, upwind numerické schémy, eikonalova rovnica s regularizačným krivostným členom

Abstract

Abstract: This work will deal with solving eikonal equation with regularization diffusion or curvature term included, using proposed upwind numerical approximation schemes. A valuable contribution of the work will be application of said numerical approximation schemes on multiple examples comparing and analyzing obtained solutions, convergence analysis of various numerical methods and comparison of solution with curvature term included against solution of standard eikonal equation.

Keywords: level set methods, numerical approximation, upwind numerical schemes, eikonal equation with regularization curvature term

Úvod

Level set metódy, alebo Metódy úrovňovej množiny [1], sú výpočtové techniky využívajúce izočiary ako nástroj pre numerický popis vyvíjajúcich sa kriviek. Ich univerzálnosť pre rôzno-dimenzionálne formulácie a ich schopnosť popasovať sa s topologickými zmenami kriviek im priniesli obrovský potenciál pre široké spektrum užitočných aplikácií.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie Stavebnej fakulty Slovenskej technickej univerzity sa môže pochváliť množstvom publikácií zaoberajúcich sa aplikáciami metód úrovňovej množiny, napríklad pri hľadaní času prvého príchodu frontu lesného požiaru. V tejto práci nadviažeme aj na nimi získané poznatky. Významnými publikáciami sú napríklad [10] a [11].

Hlavným cieľom tejto práce bude navrhnúť upwind numerickú aproximačnú schému pre riešenie eikonalovej rovnice s malým difúznym alebo krivostným členom. Veľkou motiváciou pre nás bola publikácia [3]. Množstvo matematických článkov a prác preukázalo efektivitu upwind numerických aproximačných schém pri riešení štandardnej eikonalovej rovnice. Pri niektorých metódach, napríklad pri Fast sweeping metóde [7], je táto vlastnosť upwind schém tak významná, že metódy skonvergujú v konečnom počte iterácií aj pri hustých sieťach. V práci [14] sme však ukázali, že pri riešení eikonalovej rovnice, kde malý krivostný člen bol aproximovaný centrálnou numerickou schémou, sa sila upwind formulácie vytratila.

Cenným prínosom bude aplikácia navrhutej uwind numerickej schémy pri viacerých numerických experimentoch. Budeme pozorovať správanie sa numerických metód pri aproximáciách eikonalovej rovnice s difúznym, či krivostným členom našou upwind schémou, ako aj ich konvergenciu, presnosť a v neposlednej rade aj vlastnosti samotného riešenia so zohľadneným krivostným, či difúznym členom. Porovnáme výsledky experimentov pre štandardnú eikonalovu rovnicu a pre eikonalovu rovnicu s regularizačným krivostným členom.

Kapitola 1

Matematický model

Matematický model, ktorým sa budeme zaoberať, je založený na metóde úrovňovej množiny (Level set method), ktorá rieši eikonalovu rovnicu

$$a|\nabla\phi| = 1, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (1.1)$$

ktorú neskôr obohatíme o malý regularizačný difúzny alebo krivostný člen. Funkcia $a(x, y)$ predstavuje rýchlosť. Vo všeobecnosti sa väčšinou uvažuje konštantná rýchlosť $a(x, y) = 1$, kedy riešením rovnice (1.1) je vzdialenostná funkcia so znamienkom $\phi(x, y)$. Model popisuje pohyb krivky $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \phi(x, y) = 0\}$ v smere vonkajšej normály, pričom hodnoty funkcie $\phi(x, y)$ reprezentujú čas prvého príchodu krivky Γ do bodu (x, y) . Pohyb krivky po výpočtovej oblasti v smere jej vonkajšej normály možno popísať rôznymi spôsobmi a čas prvého príchodu [14] je jednou z možných alternatív. Čas prvého príchodu v bode \mathbf{x} teda reprezentuje čas, v ktorom pohybujúca sa krivka prvýkrát prešla bodom \mathbf{x} .

Pre jednoduchosť sa najskôr zameriame na rovnicu

$$a|\nabla\phi| - \epsilon\Delta\phi = 1, \quad (1.2)$$

kde funkcia $a(x, y)$ predstavuje rýchlosť a ϵ je malý regularizačný koeficient, pričom advekčný člen dominuje difúznemu. Konkrétne platí, že $\epsilon < La$, kde L je reprezentatívna dĺžka, ktorá závisí od diskretizácie výpočtovej oblasti. Napríklad v prípade (2.17) má L hodnotu $\frac{h}{2}$.

Významným dôvodom prečo uvádzame tento model, je vlastnosť vzdialenostných funkcií, pre ktoré platí, že krivosť ich izočiar definovaná ako $\kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right)$ sa zjednoduší na $\Delta\phi$ [1]. Numerická aproximácia operátora Laplace je schematicky o niečo jednoduchšia ako aproximácia krivosti, a tak pri jednoduchých príkladoch, kde riešenie je vzdialenostná funkcia, budeme môcť využiť tento model na rôzne experimenty s cieľom demonštrovať niektoré numerické metódy, porozumieť ich správaniu, ich výhodám a nevýhodám. Počas tvorby tejto práce model (1.2) slúžil ako pevný základ

numerických experimentov, na ktorom sme stavali.

Dôležitejšou rovnicou bude eikonálova rovnica s malým regularizačným krivostným členom

$$(a - \epsilon\kappa)|\nabla\phi| = 1, \quad (1.3)$$

kde funkcia $a(x, y)$ je rýchlosť advekcie a $\epsilon = \epsilon(\kappa)$ je také, že $\epsilon(s)|s| < a$ pre $s \in R$. Inak povedané, koeficient ϵ bude v istom zmysle závisieť od krivosti κ , aby bola výsledná rýchlosť vývoja krivky Γ v tvare $(a - \epsilon\kappa)$ kladná. Alternatívnou definíciou rýchlosti v modeli (1.3) by mohla byť $(a - \min(a - \delta, \epsilon\kappa))$, kde δ je malá vhodne zvolená konštanta. Krivosť krivky Γ je definovaná ako divergencia jej jednotkovej vonkajšej normály $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{N}$, ktorú zdefinujeme ako $\mathbf{N} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ [1]. Výsledná krivosť má po dosadení tvar $\kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right)$.

Pri takto zdefinovanom modeli sa konvexné časti krivky budú pohybovať rýchlejšie ako konkávne časti krivky. Toto správanie je pri mnohých aplikáciach modelovania rozvíjajúcej sa krivky fyzikálne vhodnejšie.

Kapitola 2

Numerická diskretizácia

Cieľom nasledujúcej kapitoly je odvodiť diskretizačné schémy pre rovnice z kapitoly 1. Hlavnou a najdôležitejšou myšlienkou pritom bude takzvaný princíp kauzality, inak povedané upwind formulácia. Upwind aproximačné schémy numericky simulujú smer šírenia informácií zväčša v modeloch prúdenia. Veľmi známym príkladom takejto formulácie je Rouy-Tourinovej schéma [1].

Výpočtovú oblasť Ω diskretizujeme na konečný počet bodov (x_i, y_j) , pre hodnoty $i, j = 0, 1, \dots, N$. Bude platiť $x_{i+1} = x_i + h$ a $y_{j+1} = y_j + h$, kde h je priestorový diskretizačný krok. Pri rovnomernej štvorcovej sieti bude priestorový krok $h = \frac{x_N - x_0}{N-1}$, kde x_0 a x_N predstavujú dolnú a hornú hranicu výpočtovej oblasti na x-ovej osi. Numerickú aproximáciu riešenia ϕ v bode (x_i, y_j) budeme značiť ϕ_{ij} .

2.1 Eikonalova rovnica

Než sa pustíme do odvodzovania finálnej numerickej aproximačnej schémy, pozrime sa najskôr na známu upwind aproximačnú schému štandardnej eikonalovej rovnice. Rozpíšme eikonalovu rovnicu (1.1).

$$\sqrt{(\partial_x \phi)^2 + (\partial_y \phi)^2} = 1 \quad (2.1)$$

Parciálne derivácie funkcie ϕ aproximujeme na štvorcovej sieti s priestorovým krokom h v bode (x_i, y_j) podľa nasledujúcej schémy [1, 2]:

$$\partial_x \phi_{ij} = \begin{cases} \frac{\phi_{ij} - \phi_{i-1j}}{h} & \text{pre } \phi_{i-1j} = \min \{ \phi_{i-1j}, \phi_{ij}, \phi_{i+1j} \} \\ \frac{\phi_{i+1j} - \phi_{ij}}{h} & \text{pre } \phi_{i+1j} = \min \{ \phi_{i-1j}, \phi_{ij}, \phi_{i+1j} \} \\ 0 & \text{pre } \phi_{ij} = \min \{ \phi_{i-1j}, \phi_{ij}, \phi_{i+1j} \} \end{cases} \quad (2.2)$$

Pri aproximáciách parciálnych derivácií podľa premennej y postupujeme analogicky.

Pozorujeme, že hlavnou myšlienkou pri numerickej schéme (2.2) je voľba doprednej, či spätnej konečnej diferencie v závislosti od smeru rastu funkcie ϕ . Informácia, ktorá sa využíva na aproximáciu parciálnej derivácie teda v nejakom zmysle “prúdi” v smere gradientu funkcie ϕ . V našom prípade simuluje smer šírenia, či expanzie izokontúr funkcie ϕ . Ako si aj neskôr ukážeme na mnohých numerických experimentoch, takto formulovaná numerická schéma je veľmi výhodná pri aproximácii eikonalovej rovnice.

Nech $|\nabla\phi| \neq 0$ a označme

$$u := \frac{\partial_x \phi}{|\nabla\phi|} \qquad v := \frac{\partial_y \phi}{|\nabla\phi|}$$

Potom bude platiť $u^2 + v^2 = 1$ a advekčný člen rovnice (1.3) môžeme prepísať do tvaru

$$|\nabla\phi| = u\partial_x\phi + v\partial_y\phi \tag{2.3}$$

Advekčný člen sa teda dá vnímať ako derivácia v smere jednotkového vektore (u, v) .

Označme (u_{ij}, v_{ij}) vektor (u, v) v bode (x_i, y_j) . Uvažujme napríklad situáciu, kde $u_{ij} > 0$ a $v_{ij} > 0$, potom po dosadení (2.2) do (2.1) a po úprave dostávame kvadratickú rovnicu vzhľadom na ϕ_{ij} .

$$(\phi_{ij} - \phi_{i-1j})^2 + (\phi_{ij} - \phi_{ij-1})^2 = h^2, \tag{2.4}$$

alebo “linearizovanú” podobu

$$u_{ij}(\phi_{ij} - \phi_{i-1j}) + v_{ij}(\phi_{ij} - \phi_{ij-1}) = h. \tag{2.5}$$

Výhodou týchto upwind schém simulujúcich šírenie informácií pri rozpínajúcej sa krivke je docielenie konverencie v malom konečnom počte iterácií riešením niektorými numerickými metódami, ktoré sú navrhnuté špeciálne tak, aby využívali charakter upwind numerickej schém. Naším cieľom bude odvodiť podobnú numerickú schému pre aproximáciu difúzneho alebo krivostného člena rovníc (1.2) a (1.3), ktorá by mohla viesť k podobne rýchlej konvergencii riešenia komplikovanejších modelov.

Numerická schéma (2.5) je prvého rádu presnosti a je stabilná. Pri kontrole stability sledujeme znamienka jednotlivých koeficientov. Rovnica (2.5) je len príkladom jednej z podôb numerickej schémy (2.2) aplikovanej na rovnicu (1.1). Pri všetkých podobách rovnice (2.5) sú všetky znamienka jednotlivých koeficientov “správne”.

2.2 Lineárna advekcia s malým difúznym členom

Ukázali sme si, ako vyzerá numerická upwind schéma aproximácie štandardnej eikonalovej rovnice. V nasledujúcej podkapitole navrhujeme upwind numerickej schémy

pre aproximáciu komplikovanejších modelov. Pri odvádzaní rôznych upwind konečno-diferenčných schém pre numerickú aproximáciu difúzneho a krivostného člena rovníc (1.2) a (1.3) sa zameriame aj na ich stabilitu.

Skúmame najprv jedno-dimenzionálnu difúznu rovnicu s konštantným koeficientom podobne ako v [6].

$$\partial_t \phi - \epsilon \partial_{xx} \phi = 0 \quad (2.6)$$

Štandardná explicitná konečno-diferenčná schéma tejto rovnice je

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \frac{\tau \epsilon}{h^2} (\phi_{i-1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i+1}^n), \quad (2.7)$$

kde τ je časový krok, h je priestorový krok, n je index časovej diskretizácie a i je index priestorovej diskretizácie. Aby bola takáto schéma stabilná, musí platiť

$$\frac{2\epsilon\tau}{h^2} \leq 1 \quad (2.8)$$

Dodržanie tejto podmienky sa zväčša zabezpečuje prispôbovaním časového kroku τ pri zjemňovaní siete. Alternatívny prístup popísaný v článku [6] je voľba vhodného kroku priestorovej diskretizácie pomocou parametra k , kedy priestorový krok diskretizácie je kh . Pre $k \in \mathbb{R}$ je možné získať potrebné hodnoty interpoláciou, podobne ako je spomenuté v článku [6]. Podmienka stability teda bude mať tvar

$$\frac{2\epsilon\tau}{k^2 h^2} \leq 1$$

Schému (2.7) môžeme teda nahradiť schémou

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \frac{\tau \epsilon}{k^2 h^2} (\phi_{i-k}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i+k}^n), \quad (2.9)$$

ktorá je podmiennečne stabilná pre

$$k \geq \frac{\sqrt{2\epsilon\tau}}{h} \quad (2.10)$$

Uvažujme ďalej jedno-dimenzionálnu advekčno-difúznu rovnicu s konštantnými koeficientami podobne ako v [3].

$$\partial_t \phi + a \partial_x \phi - \epsilon \partial_{xx} \phi = 0 \quad (2.11)$$

Schému (2.7) rozšírime na

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\tau a}{h} (\phi_i^n - \phi_{i-1}^n) + \frac{\tau \epsilon}{h^2} (\phi_{i-1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i+1}^n) \quad (2.12)$$

Schéma (2.12) je podmiennečne stabilná s ďalšou podmienkou pre $c \leq 1$, kde c je štandardné Courantovo číslo, definované ako $c = \frac{a\tau}{h}$.

Pre odvodenie upwind numerickej schémy pre difúzny člen môžeme vychádzať zo Semi-Lagrangeovskej numerickej schémy pre rovnicu (2.11) podľa článku [3] v tvare

$$\phi(x_i, t_{n+1}) \approx \frac{1}{2}\phi(x_i - ch - kh, t_n) + \frac{1}{2}\phi(x_i - ch + kh, t_n), \quad (2.13)$$

Schému vieme formálne prepísať do tvaru

$$\phi_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\phi_{i-c-k}^n + \phi_{i-c+k}^n) \quad (2.14)$$

kde hodnoty na pravej strane sa môžu určiť cez interpoláciu [3].

Zvoľme konkrétnu hodnotu $k^* := \frac{\sqrt{2\epsilon\tau}}{h}$ v schéme (2.9). Vidíme, že sa schéma (2.9) zjednoduší na tvar (2.14) pre Courantovo číslo $c = 0$

$$\phi_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\phi_{i-k^*}^n + \phi_{i+k^*}^n), \quad (2.15)$$

čo sa nazýva Semi-Lagrangeovská schéma pre difúziu [3, 6].

Dá sa ukázať [3], že pre $c \leq 1$ a $k = 1$ dostávame tvar schémy

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\tau a}{h}(\phi_i^n - \phi_{i-1}^n) + \frac{\tau \epsilon}{h^2}(\phi_{i-2}^n - 2\phi_{i-1}^n + \phi_i^n), \quad (2.16)$$

ktorá predstavuje najjednoduchšiu upwind schému pre advekciu a difúziu.

Pri stabilite schém sledujeme nezápornosť jednotlivých koeficientov. V schéme (2.16) po dodržaní podmienky $c \leq 1$ je kritickým len koeficient pri neznámej ϕ_{i-1}^n , ktorý je rovný

$$\frac{\tau}{h}(a - \frac{2\epsilon}{h}) \quad (2.17)$$

Schéma (2.16) je teda podmiennečne stabilná pre $\frac{2\epsilon}{ah} \leq 1$ a je prvého rádu presnosti.

Pri odvádzaní numerickej upwind schémy pre riešenie dvoj-dimenzionálnej rovnice (1.2) sme sa inšpirovali práve schémou (2.16). Pri týchto úlohách je upwind smer typicky určený susedným vrcholom s najmenšou hodnotou numerického riešenia. Difúzny člen $\Delta\phi = \partial_{xx}\phi + \partial_{yy}\phi$ rovnice (1.2) môžeme potom aproximovať upwind numerickej aproximačnou schémou, ktorej podoba v bodoch, pre ktoré platí $\phi_{i-1j} = \min\{\phi_{i-1j}, \phi_{i+1j}, \phi_{ij-1}, \phi_{ij+1}\}$ má tvar:

$$\Delta\phi_{ij} = \frac{\phi_{ij} - 2\phi_{i-1j} + \phi_{i-2j}}{h^2} + \frac{\phi_{i-1j-1} - 2\phi_{i-1j} + \phi_{i-1j+1}}{h^2} \quad (2.18)$$

Analogicky môžeme vyjadriť schému aj pre body, kde minimom je hodnota ϕ_{i+1j} , ϕ_{ij-1} alebo ϕ_{ij+1} .

Člen $|\nabla\phi_{ij}|$ budeme aproximovať pomocou Rouy-Tourinovej schémy (2.2) a (2.5). Výsledný tvar numerickej aproximačnej schémy v bode (x_i, y_j) môžeme po dosadení aproximácií demonštrovať pre príklad, kde platí $u_{ij} > v_{ij}$, $v_{ij} > 0$. Výsledná schéma má potom tvar

$$(u_{ij}(\phi_{ij} - \phi_{i-1j}) + v_{ij}(\phi_{ij} - \phi_{ij-1})) - \frac{\epsilon}{h} (\phi_{ij} - 4\phi_{i-1j} + \phi_{i-2j} + \phi_{i-1j-1} + \phi_{i-1j+1}) = h \quad (2.19)$$

2.3 Upwind metóda pre aproximáciu krivosti

Odvodme teraz numerickú upwind schému pre rovnicu (1.3). Označme

$$u := \frac{\partial_x \phi}{|\nabla \phi|} \quad v := \frac{\partial_y \phi}{|\nabla \phi|} \quad e := \frac{\epsilon}{h}$$

Krivostný člen [1] sa dá aproximovať nasledovne

$$\kappa |\nabla \phi| \approx u^2 \partial_{yy} \phi + v^2 \partial_{xx} \phi - 2uv \partial_{xy} \phi, \quad (2.20)$$

kde $\partial_{xx} \phi$, $\partial_{yy} \phi$ a $\partial_{xy} \phi$ predstavujú aproximácie druhých derivácií pomocou konečných diferencií. Pre numerickú aproximáciu zmiešanej parciálnej derivácie budeme vychádzať zo schémy [5]

$$\partial_{xy} \phi(x_i, y_j) \approx \frac{\phi_{i+1j+1} - \phi_{i+1j} - \phi_{ij+1} + 2\phi_{ij} - \phi_{i-1j} - \phi_{ij-1} + \phi_{i-1j-1}}{2h}, \quad (2.21)$$

ktorú podobne ako pri (2.18) upravíme na upwind schému jej “posunutím” proti smeru gradientu v bode (x_i, y_j) . Zvyšné dve druhé parciálne derivácie aproximujeme rovnako ako v (2.18). Dostávame tak numerickú upwind aproximačnú schému rovnice (1.3) inšpirovanú (2.16), kde člen $|\nabla \phi|$ aproximujeme schémou (2.2). Výsledný tvar navrhovanej numerickej schémy demonštrujeme pre bod (x_i, y_j) , pre ktorý platí $u_{ij} > |v_{ij}|$. Schéma má potom tvar

$$\begin{aligned} & u_{ij}(\phi_{ij} - \phi_{i-1j}) + [v_{ij}]^+(\phi_{ij} - \phi_{ij-1}) + [v_{ij}]^-(\phi_{ij+1} - \phi_{ij}) \quad (2.22) \\ & - e \left((v_{ij})^2(\phi_{ij} - 2\phi_{i-1j} + \phi_{i-2j}) + (u_{ij})^2(\phi_{i-1j+1} - 2\phi_{i-1j} + \phi_{i-1j-1}) \right) \\ & + e u_{ij} [v_{ij}]^+(\phi_{i-2j} + \phi_{ij} + \phi_{i-1j-1} + \phi_{i-1j+1} - 2\phi_{i-1j} - \phi_{ij-1} - \phi_{i-2j+1}) \\ & - e u_{ij} [v_{ij}]^-(\phi_{i-2j} + \phi_{ij} + \phi_{i-1j-1} + \phi_{i-1j+1} - 2\phi_{i-1j} - \phi_{ij+1} - \phi_{i-2j-1}) \\ & = h \end{aligned}$$

Ak navyše platí $v_{ij} \geq 0$, potom numerická schéma po úprave bude mať nasledujúci tvar

$$\begin{aligned}
& \phi_{ij}(u_{ij} + v_{ij} + ev_{ij}(u_{ij} - v_{ij})) - \quad (2.23) \\
& \phi_{i-1j}(u_{ij} - 2e(1 - u_{ij}v_{ij})) - \phi_{ij-1}(v_{ij} + eu_{ij}v_{ij}) + \phi_{i-2j}e(u_{ij} - v_{ij}) \\
& - \phi_{i-1j+1}eu_{ij}(u_{ij} - v_{ij}) - \phi_{i-1j-1}eu_{ij}(u_{ij} - v_{ij}) - \phi_{i-2j+1}eu_{ij}v_{ij} = h
\end{aligned}$$

Podobným spôsobom môžeme vyjadriť tvar numerickej schémy pre ďalšie hodnoty u_{ij} a v_{ij} .

Analýza stability schémy (2.22) je vo všeobecnosti netriviálna. Vidíme, že v (2.23) majú dva koeficienty “nesprávne” znamienko. Nakoľko tvar (2.23) sme vyjadrili pre $u_{ij} \geq v_{ij}$ platí, že pri ϕ_{i-2j} stojí nezáporný koeficient. Ďalej, aby koeficient pri ϕ_{i-1j} bol nekladný, musí platiť

$$\epsilon < \frac{hu_{ij}}{2(1 - u_{ij}v_{ij})} \quad (2.24)$$

Podobným spôsobom vieme odvodiť podmienku stability pre analogické tvary schémy (2.22). Schéma (2.22) je teda podmiennečne stabilná, pričom podmienku kladieme na koeficient ϵ stojaci pri regularizačnom krivostnom člene. Podobne ako schéma (2.19), aj (2.22) je prvého rádu presnosti.

Kapitola 3

Numerické metódy

Predchádzajúce kapitoly diplomovej práce priniesli viacero numerických schém pre riešenie eikonalovej rovnice s malým difúznym alebo krivostným členom, ktoré sa do istej miery dajú vnímať ako takzvané upwind schémy. Existuje viacero numerických metód, ktorých sila sa prejaví predovšetkým pri riešení úloh, kde model je numericky aproximovaný upwind schémou. Cieľom tejto kapitoly bude priblížiť čitateľovi zopár metód, ktoré v praxi otestujeme s použitím schém odvodených v kapitole 2.

3.1 Fast sweeping metóda

Fast sweeping [8] navrhnutá Zhaom v roku 2005 je iteračná metóda určená na riešenie eikonalovej rovnice (1.1) s danou okrajovou podmienkou v určitej podoblasti výpočtovej oblasti Ω . Využíva Rouy-Tourinovej upwind schému (2.2) pre numerickú aproximáciu parciálnych derivácií v rovniciach ako (2.4). Tak sa zabezpečí, že riešenie v jednotlivých bodoch je definované na základe menších hodnôt.

Na začiatku algoritmu je potrebné zvoliť počiatočný odhad riešenia ϕ_{ij}^0 . Následne sa spustia Gauss-Seidelove iterácie pre (2.4) alternujúc ich smer. Pre dvojdimenzionálnu výpočtovú oblasť sa pri Gauss-Seidelovi striedajú štyri rôzne smery iterovania. Počas jednotlivých iterácií sa informácie propagujú zvnútra danej okrajovej podmienky do zvyšku výpočtovej oblasti.

Pre eikonalovu rovnicu táto iteračná metóda poskytne riešenie v konečnom počte iterácií a ukazuje sa byť efektívnejšou, ako Jacobiho, či samostatná Gauss-Seidel iteračná metóda. V práci [14] sme ukázali, že pri eikonalovej rovnici s malým krivostným členom, pre ktorého numerickú aproximáciu sa použila centrálna schéma, sa táto efektivita Fast sweeping metódy stráca.

Nevýhodou Fast sweeping metódy je jej nevhodnosť pre paralelizáciu.

3.2 Fast marching metóda

Fast marching metóda [2], alebo *Metóda rýchleho pochodu*, bola vymyslená Jamesom Sethianom ako efektívna metóda pre riešenie eikonalovej rovnice (1.1). Medzi hlavné výhody tejto metódy patrí jej univerzálnosť pre rôzno-dimenzionálne úlohy. Naopak nevýhodou je nevhodnosť metódy pre paralelizáciu.

Najdôležitejšou myšlienkou Fast marching metódy je pri výpočte novej hodnoty funkcie ϕ využiť len hodnoty, ktoré už sú známe. Kľúčom je využiť upwind schému (2.2) pre rovnice ako (2.4), pri ktorej sa informácia šíri len jedným smerom - od menších hodnôt, po tie väčšie. Algoritmus Fast marching metódy teda buduje numerické riešenie funkcie ϕ postupne v smere vonkajšej normály izočiary, od najmenších hodnôt funkcie ϕ , po tie najväčšie.

Uvažujme dvojdimenzionálnu rovnicu (1.1) s danou okrajovou podmienkou len v jednom bode diskretizovanej výpočtovej oblasti. Túto hodnotu označme $\phi_{0,0}$. Hodnoty funkcie ϕ vo zvyšných bodoch výpočtovej oblasti sú v tejto chvíli neznáme.

Algoritmus Fast marching metódy začína identifikáciou susedných bodov k bodom, kde hodnota funkcie ϕ je už známa. V našom prípade by to boli hodnoty $\phi_{1,0}$, $\phi_{0,1}$, $\phi_{-1,0}$, $\phi_{0,-1}$. V tomto momente sme rozdelili uzlové body diskretizovanej oblasti do troch množín: *fixované body*, teda tie, v ktorých je riešenie už známe, *susedné body* k fixovaným bodom a *vzdialené body*. Ďalším krokom algoritmu je vypočítať a následne zafixovať hodnotu jedného zo susedných bodov pomocou schémy (2.2). Nakoľko informácia sa v eikonalovej rovnici šíri postupne od menších hodnôt, po tie väčšie, je dôležité si uvedomiť, že najlepšou stratégiou je zafixovať riešenie v bode s najmenšou hodnotou funkcie ϕ . Algoritmus teda vypočíta hodnoty všetkých bodov v množine *susedných bodov* a následne zafixuje tú najmenšiu z nich. Tieto kroky sa opakujú, kým sa všetky body diskretizovanej oblasti nezafixujú.

3.3 Fast iterative metóda

Fast iterative metóda [7] navrhnutá Won-Ki Jeongom a Rossom Whitakerom sa svojou povahou veľmi podobá na Fast marching metódu. Hlavnou myšlienkou je počítat jednotlivé hodnoty funkcie ϕ v smere, odkiaľ “prúdia” informácie.

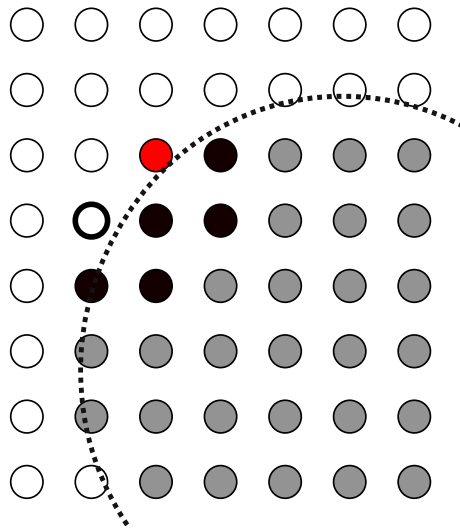
Rovnako ako tomu bolo pri metóde Fast marching, aj Fast iterative algoritmus začína inicializáciou okrajovej podmienky v konečnom počte bodov, ktoré sa nazývajú *fixované*.

Ďalej Fast iterative metóda pracuje na páse *aktívnych bodov*, ktorých hodnoty paralelne prepočítava. Počas každej iterácie algoritmu sa pás aktívnych bodov zväčšuje, aby zahŕňal všetky uzlové body, ktorých hodnoty môžu byť ovplyvnené novo vypočítanými okolitými bodmi. Jednotlivé body môžu byť odstránené zo zoznamu aktívnych bodov,

keď ich hodnota skonverguje, alebo naopak môžu byť do zoznamu opätovne pridané, ak sa zmení hodnota jedného z ich susedov.

Výhodou tejto metódy je možnosť paralelizovať výpočet nových hodnôt aktívnych bodov.

Pre potreby tejto práce sme algoritmus Fast iterative metódy museli mierne modifikovať, viď algoritmus 1. Numerická schéma (2.22) je pomerne komplexná a pri krivkách s netriviálnou krivosťou by sa pri pôvodnom algoritme Fast iterative metódy mohlo stať, že niektorá z hodnôt funkcie v bodoch šablóny potrebná na výpočet novej hodnoty aktívneho bodu by v momente výpočtu ešte nebola známa. V takýchto prípadoch sme neznámu hodnotu dočasne nahradili počiatočným odhadom. Hodnota v zasiahnutom bode je následne prepočítavaná algoritmom, až kým riešenie v danom bode nedosiahne konvergenciu. Príklad podobnej situácie je vyobrazený na obrázku 3.1 Nevýhodou takejto alternácie algoritmu je nutnosť voľby počiatočného odhadu, ktorá vo všeobecnosti nie je triviálna.



Obr. 3.1: Predstavme si, že riešime model (1.3) aproximovaný numerickou schémou (2.22) pomocou Fast iterative metódy. Bodkovaná čiara nech predstavuje izokontúru riešenia, pre jednoduchšie porozumenie. Nech hodnoty v čiernych a šedých bodoch sú už fixované, a teda známe, a nech hodnoty v bielych bodoch sú zatiaľ neznáme. Hľadáme riešenie v červenom bode. Na aproximáciu rovnice (1.3) v tomto bode sú potrebné všetky čierne body a navyše aj hrubou čiarou vyznačený biely bod. Vďaka modifikácií v algoritme 1 sa hodnota v neznámom bode odhadne počiatočným odhadom a v neskorších iteráciách bude nahradená riešením získaným prostredníctvom známych hodnôt. Pôvodný algoritmus by v tejto situácii nemohol pokračovať.

Algoritmus 1: Modifikovaný algoritmus Fast iterative metódy

```

1 Inicializácia:
2  $X$  : množina uzlových bodov
3  $L$  : množina aktívnych bodov
4 foreach  $x \in X$  do
5   if  $x$  je fixovaný bod then
6      $U(x) \leftarrow 0$ 
7   else
8      $U(x) \leftarrow U^0$  //  $U^0$  je počiatočný odhad riešenia
9 foreach  $x \in X$  do
10   if Niektorý zo susedov  $x$  je fixovaný bod then
11     pridaj  $x$  do  $L$ 
12 Aktualizácia bodov v L:
13 while  $L \neq \emptyset$  do
14   foreach  $x \in L$  paralelne do
15      $p \leftarrow U(x)$ 
16      $q \leftarrow$  riešenie  $g(x) = 0$ 
17      $U(x) \leftarrow q$ 
18     if  $|p - q| < tol$  then
19       foreach sused  $x_{nb}$  bod  $x$  do
20         if  $x_{nb} \in L$  then
21            $p \leftarrow U(x_{nb})$ 
22            $q \leftarrow$  riešenie  $g(x) = 0$ 
23           if  $p > q$  then
24              $U(x_{nb}) \leftarrow q$ 
25             pridaj  $x_{nb}$  do  $L$ 

```

Kapitola 4

Numerické experimenty

Velkou súčasťou analýzy nových numerických schém sú numerické experimenty. Počas tvorby tejto diplomovej práce sme systematicky testovali rôzne numerické schémy pri rôznych numerických metódach. Cieľom nasledujúcej kapitoly bude popísať tie najrelevantnejšie experimenty, ktorých výsledky nám čo najlepšie priblížia predovšetkým vlastnosti navrhutej aproximačnej schémy pre regularizačný krivostný člen.

V predchádzajúcich kapitolách sme popísali aproximačnú schému regularizačného difúzneho a krivostného člena. Rovnica (1.2) aproximovaná schémou (2.19) sa pre nás stala akýmsi odrazovým mostíkom, nakoľko pozostáva z konečno-diferenčných aproximácií parciálnych derivácií, ktoré sú súčasťou aproximačnej schémy krivostného člena (2.20). Do práce sme zahrnuli experiment 4.3.2, ktorý poukazuje na možné využitie modelu (1.2). Pozorujeme, že sa nám vďaka pridanému regularizačnému difúznemu členu podarilo mierne vyhladiť izokontúry riešenia a predísť deformáciám vznikajúcich pri riešení rovnice (1.1). Potvrdilo sa nám, že pri riešení modelu (1.2) aproximovaného numerickou schémou (2.19) sa podarilo metóde Fast sweeping skonvergovať v malom konečnom počte iterácií. Tento jav nás vo veľkej miere motivoval ku ďalšiemu výskumu a ku tvorbe aproximačnej schémy pre komplexnejší regularizačný krivostný člen.

Pozorný čitateľ si v nasledujúcej kapitole isto všimne prevahu riešení získaných pomocou Fast sweeping metódy v porovnaní s Fast iterative metódou a absenciu experimentov s aplikovanou Fast marching metódou. Fast marching metóda je veľmi efektívna a v istom slova zmysle inšpirovala vznik Fast iterative metódy. Pri nami navrhnutých numerických schémach pri oboch metódach môže dochádzať ku problémom predovšetkým, keď riešením nie sú krivky s triviálnou krivostou, ako napríklad kružnice. Pomocou modifikácie algoritmu 1 sa nám pri Fast iterative metóde do istej miery podarilo vyhnúť sa problémom popísaným na obrázku 3.1, no pri Fast marching metóde takáto modifikácia neprichádza do úvahy, nakoľko sa každý bod výpočtovej oblasti fixuje len raz a nasleduje sa konvergencia riešenia v danom bode. Metódu Fast marching tak spomíname predovšetkým s cieľom motivovať budúci výskum či už alternatívnych

numerických schém, alebo modifikácií algoritmu metódy.

Modifikáciou algoritmu Fast iterative metódy sa nám podarilo získať zaujímavé výsledky, napríklad pri experimente 4.1.2. Nevýhodou je však citlivosť modifikovanej metódy na počiatočný odhad riešenia, a tak pri komplexnejších izokontúrach riešenia metóda nemusí konvergovať.

Najvýhodnejšou a najstabilnejšou metódou v našich experimentoch sa ukázala Fast sweeping metóda, ktorej povaha nedbá na komplexnosť šablón numerických schém (2.19) a (2.22). Pri všetkých experimentoch metóda skonvergovala veľmi rýchlo v konečnom počte iterácií bez ohľadu na komplexnosť krivosti izokontúr riešenia.

Pre získanie jednoznačného riešenia rovníc (1.1), (1.2) a (1.3) musíme zadať okrajovú podmienku. Okrajovú podmienku budeme zadávať na oblasti $\Omega_0 \subset \Omega$, ktorej hranica Γ_0 je nulovou izokontúrou danej funkcie ϕ , viď obrázok 4.1. Na hranici oblasti Ω z povahy upwind numerickej schémy nie je treba zadávať okrajovú podmienku. Problém by mohol nastať v rohoch oblasti Ω , kde navrhnuté šablóny môžu presahovať do bodov mimo výpočtovej oblasti. V týchto miestach body nahradíme bodmi ležiacimi na hranici oblasti Ω .

Všetky programy používané pri numerických experimentoch sú naprogramované v softvéri Matlab a sú dostupné na vyžiadanie. Pri výpočte bol používaný počítač ASUS Zenbook UX433FN s operačným systémom Microsoft Windows 10 Home.

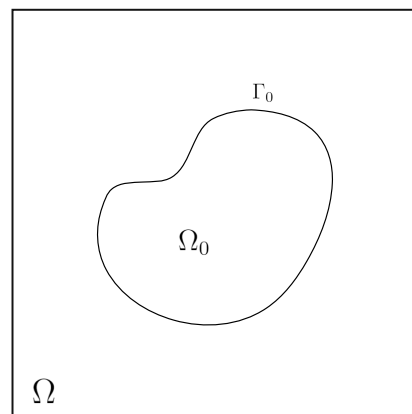
4.1 Numerický experiment s presným riešením

Riešme rovnicu (1.3) na štvorcovej výpočtovej oblasti $\Omega = (-4, 4) \times (-4, 4)$ s danou okrajovou podmienkou pre podoblasť Ω_0 v tvare

$$\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - r_0 \quad \text{pre } (x, y) \in \Omega_0, \quad (4.1)$$

kde r_0 je polomer nultej izočiaru. Diskretizujme oblasť Ω na konečný počet bodov. Nech N je počet bodov na osi x a y . Ďalej nech h je priestorový krok daný vzťahom $h = \frac{x_N - x_0}{N-1}$, kde x_0 a x_N predstavujú dolnú a hornú hranicu výpočtovej oblasti na x-ovej osi. Numerická aproximácia riešenie nech je (2.22).

Numerické riešenie budeme porovnávať s presným riešením v tvare



Obr. 4.1: Schéma výpočtovej oblasti Ω a podoblasti Ω_0 , pre ktorú zadávame okrajovú podmienku. Hranica Γ_0 podoblasti Ω_0 je nulovou izokontúrou danej funkcie ϕ .

$$T(r) = \epsilon \log \left(-\epsilon \left(e^{-1+\frac{r}{\epsilon}} - \frac{r e^{-1+\frac{r}{\epsilon}}}{\epsilon} \right) \right) - \epsilon \log \left(-\epsilon \left(e^{-1+\frac{r_0}{\epsilon}} - \frac{r_0 e^{-1+\frac{r_0}{\epsilon}}}{\epsilon} \right) \right), \quad (4.2)$$

kde r_0 je opäť polomer nulovej izočiary a premenná r je veľkosť vektora (x, y) . Presnosť numerického riešenia sa bude určovať normou $h^2 \sum_{i,j=1}^N |\phi_{ij} - T(\sqrt{x_i^2 + y_j^2})|$.

4.1.1 Riešenie metódou Fast sweeping

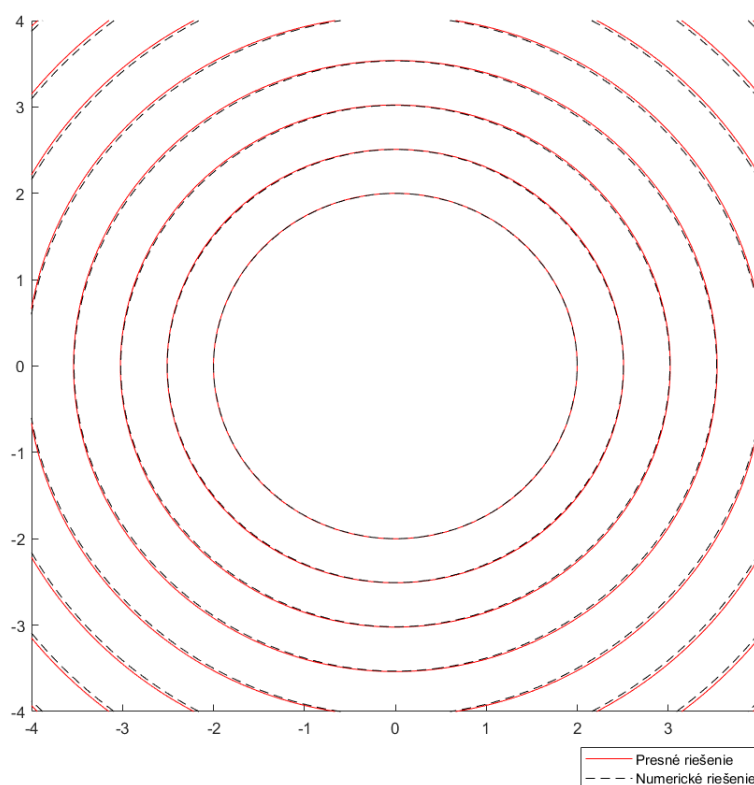
Zvoľme regularizačný koeficient $\epsilon = 0.07$ a počiatočný polomer nulovej izokontúry nech je $r_0 = 2$. Za počiatočný odhad riešenia ϕ_{ij}^0 zvolme funkciu z (4.1) na celej oblasti Ω . Súčasťou každej iterácie algoritmu bude iterácia linearizácie numerickej aproximácie rovnice (1.3) označovaná l a jednotlivé iterácie Fast sweeping metódy, ktoré budeme značiť k . Nech maximálny počet linearizácií je $lMax = 100$ a maximálny počet Fast sweeping iterácií nech je $kMax = 8$. Algoritmus skončí, keď sa naplní kritérium konvergencie $h^2 \sum_{i,j=1}^N |\phi_{ij}^{l+1} - \phi_{ij}^l| \leq tol$, pri zvolenej tolerancii $tol = 10^{-8}$.

Pozorujeme, že riešenie rovnice aproximované navrhovanou upwind schémou pri tomto experimente konverguje po 1 linearizácií bez ohľadu na jemnosť diskretizovanej siete, na rozdiel od riešenia, kde na aproximáciu krivostného člena boli použité centrálné konečné diferencie [14]. Takéto správanie sa Fast sweeping metódy je typické pre riešenie štandardnej eikonalovej rovnice (1.1) pri použití Rouy-Tourinovej schémy (2.2).

Presnosť riešenia a rýchlosť konvergencie				
Počet dielikov	Upwind numerická schéma		Centrálna numerická schéma	
N	l	norma	l	norma
10	1	12.2499	9	5.50945
20	1	4.8229	11	2.6350
40	1	2.4259	15	1.5669
80	1	1.3863	26	1.0193

Tabuľka 4.1: Tabuľka presnosti a rýchlosti konvergencie pri riešení rovnice (1.3) navrhnutou upwind schémou (2.22) a schémou, kde krivosť je aproximovaná centrálnou schémou.

Naopak, pri centrálnej aproximačnej schéme sa konvergencia spomaľuje tak zhustovaním siete, ako aj zväčšovaním hodnoty ϵ . Jej výhodou je však stabilita aj pri väčších hodnotách ϵ .



Obr. 4.2: Grafické porovnanie presnosti numerického riešenia rovnice (1.3) aproximovanou navrhnutou upwind schémou (2.22) pre $N = 80$ a $\epsilon = 0.07$ metódou Fast sweeping s danou okrajovou podmienkou (4.1).

4.1.2 Riešenie Fast iterative metódou

Riešme experiment zo sekcie 4.1 Fast iterative metódou upraveným algoritmom 1. Za počiatočný odhad riešenia U^0 a zároveň aj za okrajovú podmienku si zvolíme (4.1) na celej výpočtovej oblasti. Nech $\epsilon = 0.05$ a $r_0 = 2$. Nakoľko Fast iterative metóda je v istom zmysle iteračná, zvolíme maximálny počet iterácií $maxIter = 500$.

Súčasťou Fast iterative algoritmu je riešenie v tomto prípade nelineárnych rovníc v jednotlivých bodoch siete. Riešenie rovníc budeme hľadať pomocou funkcie **fsolve** v programe **Matlab**.

Následne porovnáme výpočtový čas programu, v ktorom sa **fsolve** funkcia volala z algoritmu Fast iterative metódy pre jednotlivé body siete a programu, ktorý bude riešiť systém nelineárnych rovníc na celej výpočtovej oblasti. V oboch prípadoch nastavíme maximálny počet iterácií funkcie **fsolve** 10 a pre porovnanie zvolíme algoritmy **trust-region** a **levenberg-marquardt** pre hľadanie riešenia systému nelineárnych rovníc. Pri Fast iterative algoritme zvolíme toleranciu $tol = 10^{-6}$.

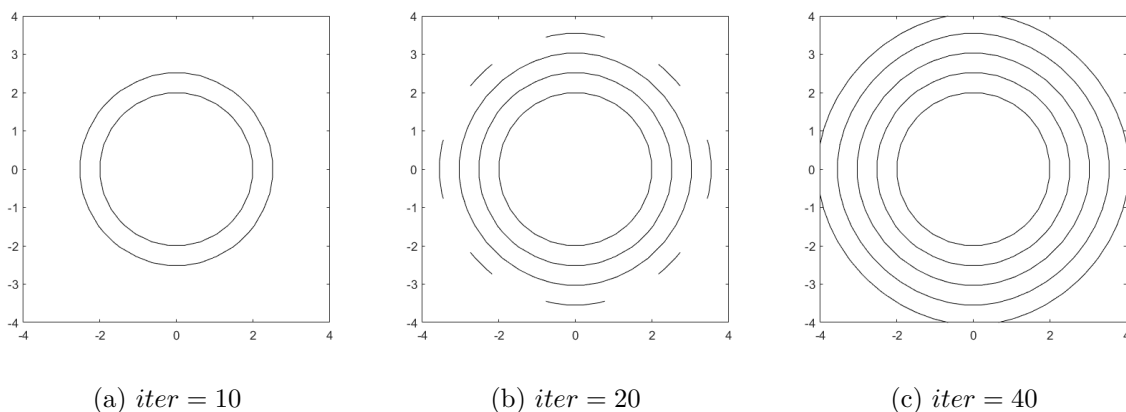
Presnosť riešenia a výpočtový čas algoritmu trust-region				
Počet dielikov	Systém nelineárnych rovníc		Fast iterative metóda	
N	Výpočtový čas (s)	norma	Výpočtový čas (s)	norma
10	0.479	9.2653	0.391	9.2653
20	1.926	2.6965	0.707	2.6965
40	14.838	1.1278	3.004	1.1278
80	108.659	1.7404	25.263	0.6924

Tabuľka 4.2: Tabuľka presnosti a výpočtového času Fast iterative metódy a **fsolve** metódy pre riešenie systému nelineárnych rovníc pri riešení rovnice (1.3) aproximovanej schémou (2.22), keď na riešenie rovníc je použitý algoritmus **trust-region**.

Presnosť riešenia a výpočtový čas algoritmu levenberg-marquardt				
Počet dielikov	Systém nelineárnych rovníc		Fast iterative metóda	
N	Výpočtový čas (s)	norma	Výpočtový čas (s)	norma
10	0.307	9.2653	0.4113	9.2653
20	1.558	2.6965	0.930	2.6965
40	20.390	1.1278	15.742	1.1278
80	812.868	0.6885	78.188	0.6924

Tabuľka 4.3: Tabuľka presnosti a výpočtového času Fast iterative metódy a **fsolve** metódy pre riešenie systému nelineárnych rovníc pri riešení rovnice (1.3) aproximovanej schémou (2.22), keď na riešenie rovníc je použitý algoritmus **levenberg-marquardt**.

Pri oboch experimentoch je presnosť metód takmer rovnaká. Výpočtový čas tak ako pri nastavení algoritmu funkcie **fsolve** na **trust-region** ako aj pri **levenberg-marquardt** je pri tomto experimente kratší pre Fast iterative metódu. Táto vlastnosť sa prejaví predovšetkým pri pomerne hustej sieti $N = 80$, kde **trust-region** pri riešení systému nelineárnych rovníc dokonca neskonvergoval pri danom maximálnom počte iterácií, viď tabuľku (4.2). V prípade Fast iterative metódy sa pri tomto jednoduchom príklade ukazuje výhodné zvoliť si za algoritmus metódy **fsolve** práve algoritmus **trust-region**, nakoľko pri kratšom výpočtovom čase dosiahol rovnako presné výsledky bez problémov s konvergenciou.



Obr. 4.3: Grafické znázornenie postupného budovania riešenia rovnice (1.3) Fast iterative metódou s modifikovaným algoritmom (1) pre $N = 20$ a $\epsilon = 0.05$ pri numerickej aproximácii schémou (2.22).

4.2 Numerický experiment pre krivky v tvare kosínusoidy

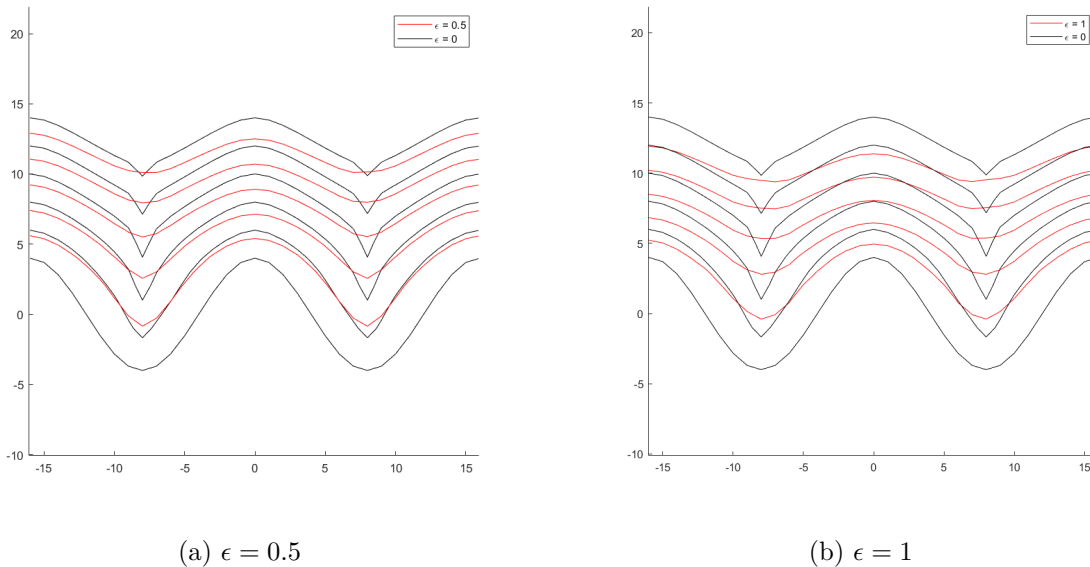
Dôležitým experimentom je riešenie rovnice (1.3) na oblasti $\Omega = (-16, 16) \times (-16, 16)$ danou okrajovou podmienkou

$$\phi(x, y) = y - 4 \cos\left(\frac{\pi x}{8}\right) \quad \text{pre } (x, y) \in \Omega_0, \quad (4.3)$$

na ktorom môžeme pozorovať vlastnosti riešenia modelu s regularizačným krivostným členom v konvexných a konkávných častiach izokontúr. Oblasť Ω diskretizujeme na konečný počet bodov (x_i, y_j) tak, aby priestorový diskretizačný krok h bol rovný 1. Rovnicu (1.3) potom aproximujeme schémou (2.22) a riešime metódou Fast sweeping.

Výsledky nášho experimentu možno vidieť na obrázku (4.4). Podarilo sa nám získať riešenie rovnice s krivostným členom pre $\epsilon = h = 1$. Vidíme, že sa nám vďaka krivostnému členu v modeli (1.3) podarilo vyhnúť sa deformáciám izokontúr v ich konvexných častiach.

Metóda skonvergovala po jednej linearizačnej iterácii tak pre eikonalovu rovnicu (1.1), ako aj pre eikonalovu rovnicu s regularizačným krivostným členom (1.3) aproximovanú navrhnutou numericou schémou (2.22).



Obr. 4.4: Grafické znázornenie numerického riešenia rovnice (4.5) s danou okrajovou podmienkou (4.3) aproximovanej numerickou schémou (2.22) pre $N = 33$ a $h = 1$, riešenou pre $\epsilon = 0.5$ a $\epsilon = 1$.

4.3 Numerický experiment pre krivky v tvare štvorlístka

Riešme rovnicu (1.3) na štvorcovej výpočtovej oblasti $\Omega = (-5, 5) \times (-5, 5)$ s danou okrajovou podmienkou pre podoblasť Ω_0 v tvare

$$\phi(x, y) = c_1 \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \left(c_2 + 2 \sin \left(2 \arctan \frac{y}{x} \right)^2 \right) \right) \quad \text{pre } (x, y) \in \Omega_0, \quad (4.4)$$

kde c_1 a c_2 sú voliteľné koeficienty.

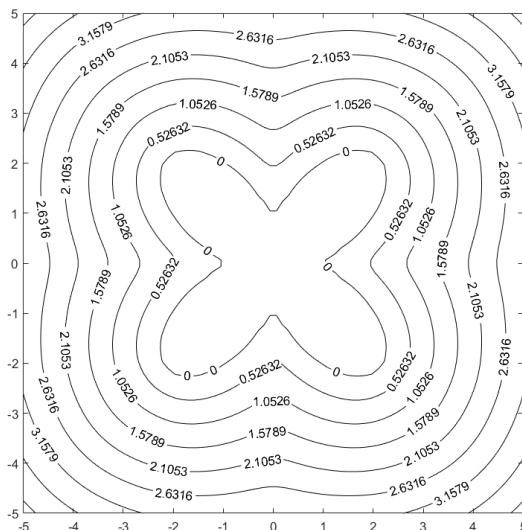
Oblasť Ω diskretizujeme na konečný počet bodov (x_i, y_j) , kde $i, j = 1, \dots, N$ a priestorový diskretizačný krok h je daný vzťahom $\frac{x_N - x_0}{N-1}$ podobne ako pri experimente 4.1.

Aproximujme rovnicu (1.3) numerickou schémou (2.22). Okrajová podmienka (4.4) má izočiaru v tvare štvorlístka, a tak je vhodná pre pozorovanie správania numerickej schémy na príklade s komplikovanejšou krivosťou.

4.3.1 Riešenie metódou Fast sweeping

Zvoľme regularizačný krivostný koeficient $\epsilon = 0.07$ a počiatočný odhad riešenia nech je rovnica (4.4) pre koeficienty $c_1 = 0.6$ a $c_2 = 1$ na celej diskretizovanej výpočtovej oblasti. Podobne ako pri experimente 4.1.1, opäť zvolme maximálny počet linearizačných iterácií $lMax = 100$ a maximálny počet Fast sweeping iterácií nech je $kMax = 8$.

Kritérium konvergence nech je rovnaké ako v 4.1.1.



Obr. 4.5: Numerické riešenia rovnice (1.3) aproximovanou navrhnutou upwind schémou (2.22) pre $N = 80$ a pre $\epsilon = 0.07$ metódou Fast sweeping s danou okrajovou podmienkou (4.4).

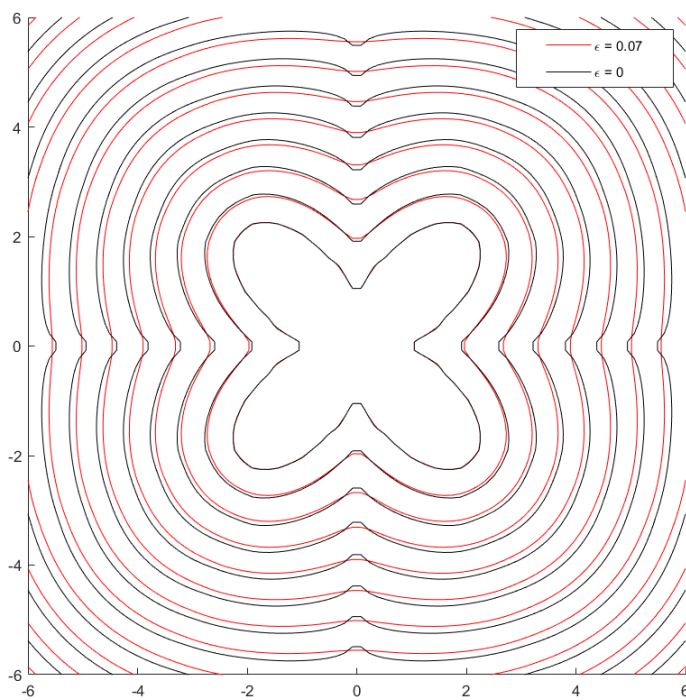
Riešenie sa nám podarilo získať za 1 linearizačnú iteráciu. Na obrázku (4.5) môžeme pozorovať vplyv krivosti na tvar izočiar riešenia eikonalovej rovnice. Konvexné časti kriviek sa pohybujú rýchlejšie, ako časti konkávne, a tak sa tvar izočiar postupne formuje do tvaru podobného kružnici. Na obrázku (4.6) možno porovnať riešenia pre $\epsilon = 0.07$ a $\epsilon = 0$. Prítomnosť malého regularizačného krivostného člena v modeli (1.3) dopomohla k vyhladeniu deformovaných častí izočiar.

4.3.2 Riešenie rovnice s regularizačným difúznym členom metódou Fast sweeping

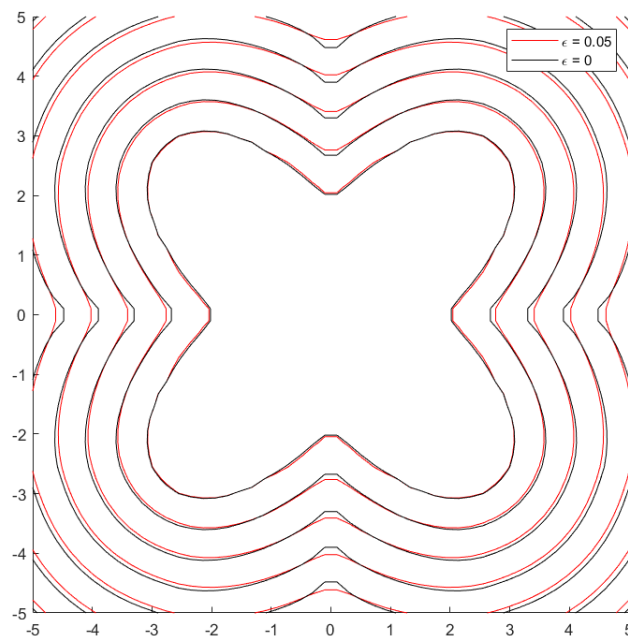
Pozrime sa na riešenie rovnice (1.2) metódou Fast sweeping s počiatočným odhadom v tvare (4.4) pre koeficienty $c_1 = 0.8$ a $c_2 = 2$ na celej diskretizovanej výpočtovej oblasti. Zaujímá nás riešenie získané pomocou aproximačnej schémy (2.19).

Podobne ako v predchádzajúcich experimentoch, aj tu zvolíme maximálny počet linearizačných iterácií algoritmu $lMac = 100$ a maximálny počet Fast sweeping iterácií $kMax = 8$. Za kritérium konvergence zvolíme rovnaké kritérium, ako pri experimente 4.1.1.

Výsledok experimentu možno vizuálne zhodnotiť pomocou obrázka 4.7. Metóde Fast sweeping sa aj v tomto prípade podarilo skonvergovať už po jednej linearizačnej iterácii. Vidíme, že vplyv regularizačného difúzneho člena sa do istej miery podobá na



Obr. 4.6: Porovnanie numerických riešení rovnice (1.3) aproximovanou navrhnutou upwind schémou (2.22) pre $N = 80$ a pre $\epsilon = 0.07$ a $\epsilon = 0$ získaných metódou Fast sweeping s danou okrajovou podmienkou (4.4).



Obr. 4.7: Porovnanie numerických riešení rovnice (1.2) aproximovanou navrhnutou upwind schémou (2.19) pre $N = 50$ a pre $\epsilon = 0.05$ a $\epsilon = 0$ získaných metódou Fast sweeping s danou okrajovou podmienkou (4.4).

vplyv regularizačného krivostného člena. Hlavným prínosom tohto experimentu však bolo otestovanie správania numerickej aproximačnej schémy (2.19) na krivke s netriviálnou krivosťou a pozorovanie vplyvu takto navrhnutej upwind schémy na konvergenciu Fast sweeping metódy. Pozitívne výsledky nás počas tvorby tejto práce motivovali k zostaveniu numerickej schémy pre regularizačný krivostný člen (2.22), ktorá vo veľkej miere zdieľa vlastnosti schémy (2.19).

4.4 Numerický experiment na mape horľavosti podložia

Vytvorili sme po častiach definovanú funkciu $f(x, y), (x, y) \rightarrow \mathbb{R}$, ktorá simuluje rôznorodú mapu horľavosti podložia, pričom sú v nej navrhnuté rôzne situácie. V niektorých častiach navrhnutej mapy sa horľavosť postupne znižuje, inde sa postupne zvyšuje a niekde naopak dochádza k skokovitej zmene horľavosti. Cieľom tohto experimentu je pozorovať správanie schémy (2.22) pri riešení rovnice (1.3) pri rôznych podmienkach simulujúcej aplikáciu modelu na šírenie lesných požiarov v rovinnom teréne v praxi.

Budeme riešiť rovnicu (1.3) v tvare

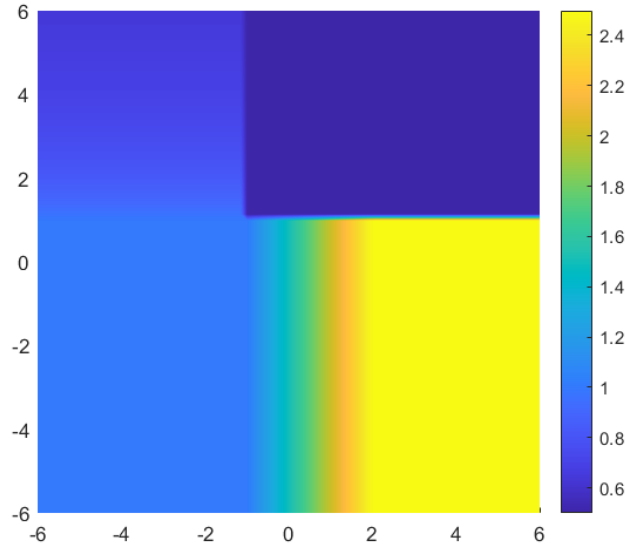
$$(f - \epsilon f \kappa) |\nabla \phi| = 1, \quad (x, y) \in \Omega = (-6, 6) \times (-6, 6) \quad (4.5)$$

s danou okrajovou podmienkou

$$\phi(x, y) = \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} - 1 \quad \text{pre } (x, y) \in \Omega_0. \quad (4.6)$$

4.4.1 Riešenie metódou Fast sweeping

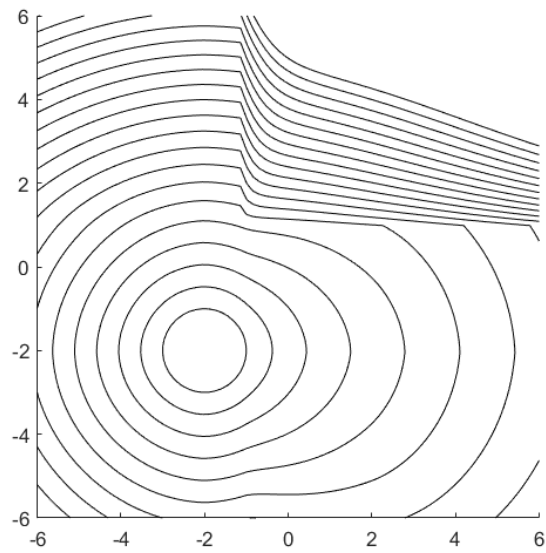
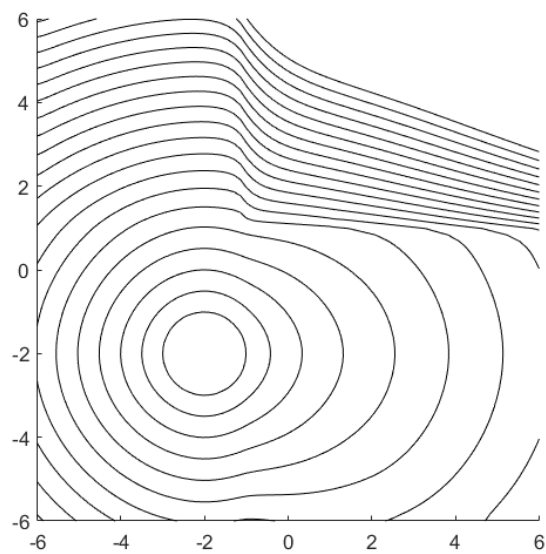
Riešme experiment 4.4 s koeficientami $c_1 = 0.6$ a $c_2 = 1$ metódou Fast sweeping pre $\epsilon = 0$ a pre $\epsilon = 0.05$. V oboch prípadoch zvolíme za počiatočný odhad v iteračnej metóde rovnicu (4.6) na celej výpočtovej oblasti. Ďalej zvolíme $lMax = 100$ a $kMax = 8$. Kritérium konvergenie nech je rovnaké ako v 4.1.1. Výpočtovú oblasť diskretizujeme pre $N = 80$.



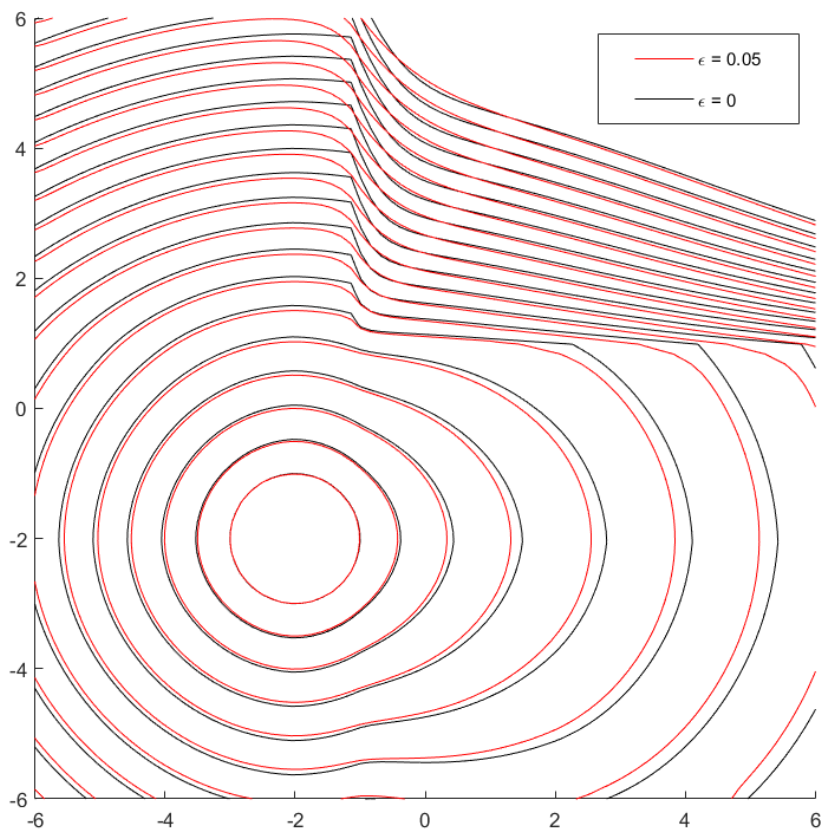
Obr. 4.8: Grafické znázornenie funkcie $f(x, y)$ simulujúcej rôznorodú mapu horľavosti podložia.

V oboch prípadoch algoritmus Fast sweeping metódy s linearizáciou skonvergoval po jednej linearizačnej iterácii. Na obrázku (4.10) môžeme porovnať tvar izočiar oboch riešení. Sledujeme, že pri rovných krivkách s krivosťou blízko nule sa riešenia takmer nelíšia. Naopak v miestach simulovanej mapy horľavosti podložia, kde prišlo k skokovitej zmene funkcie $f(x, y)$ pozorujeme výrazný rozdiel v tvare izokontúr riešení. Regularizačnému krivosťnému členu v modeli (1.3) sa podarilo vyhladiť krivky izokontúr riešenia, na ktorých sa v riešení pre $\epsilon = 0$ vytvorili deformácie v tvare rohov.

Povaha riešenia pre $\epsilon = 0.05$ sa navyše približuje k fyzikálne presnej dynamike šírenia lesného požiaru v rovinnom teréne, jednej z možných aplikácií modelu (1.1). Lesný požiar má tendenciu šíriť sa väčšou rýchlosťou v miestach, kde jeho front nadobúda konvexný tvar a naopak jeho rýchlosť klesne v miestach, kde tvar je konkávny. Toto správanie pozorujeme aj na výsledkoch riešenia rovnice (1.3) pre $\epsilon = 0.05$.

(a) $\epsilon = 0$ (b) $\epsilon = 0.05$

Obr. 4.9: Grafické znázornenie numerického riešenia rovnice (4.5) s danou okrajovou podmienkou (4.6) aproximovanej numerickou schémou (2.22) pre $N = 80$, riešenou pre $\epsilon = 0$ a $\epsilon = 0.05$.



Obr. 4.10: Grafické porovnanie tvaru izočiar riešení rovnice (4.5) s danou okrajovou podmienkou (4.6) aproximovanej numerickou schémou (2.22) pre $N = 80$ a pre regularizačný krivostný koeficient $\epsilon = 0$ a $\epsilon = 0.05$.

Záver

V tejto práci sme sa zaoberali riešením eikonalovej rovnice s pridaným difúznym alebo krivostným členom.

Najdôležitejším cieľom práce bolo navrhnúť numerickú upwind schému pre aproximáciu eikonalovej rovnice s krivostným alebo difúznym členom, zadefinovanej v kapitole 1, ktorej motiváciou bola efektivita viacerých numerických metód pri riešení eikonalovej rovnice aproximovanej Rouy-Tourinovej upwind schémou. V kapitole 2 sme navrhli viacero numerických aproximačných schém prvého rádu presnosti a odvodili sme ich stabilitu.

V kapitole 3 sme čitateľovi priblížili numerické metódy Fast sweeping, Fast marching a Fast iterative, ktoré boli navrhnuté špeciálne pre riešenie úloh aproximovaných numerickou upwind schémou. Popísali sme ich základné vlastnosti a ich algoritmy.

Cenným prínosom práce bola aplikácia navrhnutej numerickej upwind schémy na viacero zaujímavých príkladov riešených metódami z kapitoly 3. Kapitola 4 sa venuje výlučne numerickým experimentom zameraných na testovanie vlastností navrhnutej numerickej schémy a porovnaniu výsledkov modelov s pridaným regularizačným krivostným členom.

Pri mnohých experimentoch sa nám podarilo ukázať, že nami navrhnutou numerickou schémou aproximovaná eikonalova rovnica s regularizačným členom pri riešení Fast sweeping metódou skonverguje v konečnom počte iterácií aj pri zhustovaní diskretizačnej siete. Efektivita navrhnutej upwind schémy sa prejavila aj pri Fast iterative metóde, kde sa nám podarilo získať riešenie za kratší výpočtový čas, ako riešením sústavy nelineárnych rovníc metódou fsolve v softvéri Matlab.

Na záver sme čitateľovi predostreli experiment, v ktorom sme hľadali riešenie propagácie frontu lesného požiaru na nami navrhnutej rovinnej mape horľavosti podložia. Poukázali sme na výhody modelovania šírenia frontu lesného požiaru eikonalovou rovnicou s regularizačným krivostným členom, riešenie ktorej má fyzikálne presnejšie vlastnosti ako ponúka štandardná eikonalova rovnica.

Zoznam použitej literatúry

- [1] S. Osher and R. Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer 2003.
- [2] J. Sethian. *Fast Marching Methods and Level Set Methods for Propagating Interfaces*. von Karman Institute Lecture Series, Computational Fluid Mechanics, 1998.
- [3] L. Bonaventura, R. Ferretti *Semi-Lagrangian methods for parabolic problems in divergence form*. SIAM Journal on Scientific Computing, 36(5), A2458–A2477., 2014
- [4] E. Carlini, M. Falcone, R. Ferretti *Convergence of a large time-step scheme for mean curvature motion*. Interfaces and Free Boundaries, 12(4), 409–441., 2011.
- [5] R. J. LeVeque *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. University of Washington Seattle, Washington, 1995
- [6] J. Teixeira *Stable Schemes for Partial Differential Equations: The One-Dimensional Diffusion Equation*. In Journal of Computational Physics (Vol. 153)., 1999.
- [7] K. Jeong, R. Whitaker *A Fast Iterative Method for Eikonal Equations*. SIAM Journal of Scientific Computing, 2007
- [8] H. Zhao *A fast sweeping method for eikonal equations*. Mathematics of computation, 74.250 (2005): 603-627.
- [9] M. Balažovjeh, P. Frolkovič, R. Frolkovič, K. Mikula *Finite Volumes for Complex Applications VII-Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Problems*. Springer, 2014.
- [10] K. Mikula, M. Medla, M. Balažovjeh, M. Ambroz *Numerical modeling of wildland surface fire propagation by evolving surface curves*. Advances in Computational Mathematics, 2018
- [11] K. Mikula, M. Balažovjeh, M. Petrášová, J. Urbán *Lagrangean method with topological changes for numerical modelling of forest fire propagation*, ALGORITMY 2012. Publishing House of STU, 2012

- [12] M. Bohunčák *Numerické riešenie úloh advekcie v prostredí DUNE*, Diplomová práca, 2011
- [13] R. Blaschke *Numecký výpočet funkcie času príchodu pre hranicu lesného požiaru*, Diplomová práca, 2016
- [14] L. Lacková *Numecký výpočet funkcie času prvého príchodu*, Bakalárska práca, 2019
- [15] P. Frolkovič, K. Mikula Flux-based level set method: a finite volume method for evolving interfaces, *Applied Numerical Mathematics*, 4(57), 436-454, 2007