

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE**

**Stavebná fakulta**

Evidenčné číslo: SvF-5342-104396

# **Inovatívne spôsoby určovania tiažového poľa Zeme.**

**Bakalárska práca**

Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie

Študijný odbor: matematika

Školiace pracovisko: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

Vedúci záverečnej práce: Ing. Marek Macák, PhD.

**Bratislava 2022**

**Marek Tomka**



## ZADANIE BAKALÁRSKEJ PRÁCE

Študent: **Marek Tomka**  
ID študenta: 104396  
Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie  
Študijný odbor: matematika  
Vedúci práce: Ing. Marek Macák, PhD.  
Vedúci pracoviska: Ing. Marek Macák, PhD.

Názov práce: **Inovatívne spôsoby určovania tiažového poľa Zeme.**

Jazyk, v ktorom sa práca vypracuje: slovenský jazyk

Špecifikácia zadania:

Úlohou študenta bude oboznámiť sa s problematikou určovania tiažového poľa Zeme a naprogramovať riešenie okrajových úloh v geodézii použitím metódy konečných prvkov pre rôznu kombináciu vstupných dát generovaných z družicových meraní.

Rozsah práce: 30

Zoznam odbornej literatúry:

1. Reddy, J. *An Introduction to the Finite Element Method (Engineering Series)*. USA: McGraw-Hill Science/Engineering/Math; 3 edition, 2005.
2. Macák, M. *Numerical Methods in Geodesy*. Dizertačná práca. Bratislava : 2015. 65 s.
3. Minarechová, Z. – Macák, M. – Čunderlík, R. – Mikula, K. On the finite element method for solving the oblique derivative boundary value problems and its application in local gravity field modelling. *Journal of geodesy*, 95. s. 2021.

Termín odovzdania bakalárskej práce: 05. 05. 2022

Dátum schválenia zadania bakalárskej práce: 15. 12. 2021

Zadanie bakalárskej práce schválil: prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc. – garant študijného programu

## POKYNY na vypracovanie bakalárskej práce

### Úvodné ustanovenie

V zmysle zákona č. 131/2002 Z. z. o vysokých školách a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov je súčasťou štúdia podľa každého študijného programu aj záverečná práca. Jej obhajoba patrí medzi štátne skúšky. Záverečnou prácou pri štúdiu podľa bakalárskeho študijného programu je bakalárska práca. Podkladom na vypracovanie bakalárskej práce je zadanie bakalárskej práce

### Štruktúra záverečnej práce

- titulný list,
- zadanie záverečnej práce,
- pokyny na vypracovanie,
- vyhlásenie autora,
- názov a abstrakt v slovenskom a v anglickom jazyku (spolu v rozsahu jednej strany),
- obsah s očíslovaním kapitol,
- zoznam príloh,
- zoznam skratiek a značiek,
- text samotnej práce (odporúčané členenie),
  - úvod,
  - súčasný stav problematiky,
  - ciele záverečnej práce,
  - vlastné riešenie členené na kapitoly podľa charakteru práce,
  - zhodnotenie dosiahnutých výsledkov resp. navrhnutých riešení,
  - záver,
- resumé v slovenskom jazyku v rozsahu spravidla 10 % rozsahu ZP (len pre práce vypracované v cudzom jazyku),
- zoznam použitej literatúry,
- prílohy (výkresy, tabuľky, mapy, náčrty) vrátane postera s rozmermi 1000x700 mm.

### Rozsah a forma

1. Obsah a forma záverečnej práce musí byť spracovaná v zmysle vyhlášky MŠVVaŠ SR č. 233/2011 Z. z., ktorou sa vykonávajú niektoré ustanovenia zákona č. 131/2002 Z. z. a v zmysle Metodického usmernenia č. 56/2011 o náležitostiach záverečných prác.
2. Vyžadovaný rozsah bakalárskej práce je 20 až 30 strán. Odovzdáva sa v dvoch vyhotoveniach. Jedno vyhotovenie musí byť viazané v pevnej väzbe (nie hrebeňovej) tak, aby sa jednotlivé listy nedali vyberať. Rozsiahle grafické prílohy možno v prípade súhlasu vedúceho práce odovzdať v jednom vyhotovení.
3. Autor práce je povinný vložiť prácu v elektronickej forme do akademického informačného systému. Autor zodpovedá za zhodu listinného aj elektronického vyhotovenia.

4. Po vložení závěrečné práce do informačního systému, předloží autor fakultě ním podpísaný návrh licenční zmluvy. Návrh licenční zmluvy je vytvorený akademickým informačným systémom.
5. Odporúčaný typ písma je Times New Roman, veľkosť 12 a je jednotný v celej práci. Odporúčané nastavenie strany - riadkovanie 1,5, okraj vnútorný 3,5 cm, vonkajší 2 cm, zhora a zdola 2,5 cm, orientácia na výšku, formát A4.
6. Obrázky a vzorce sa číslujú v rámci jednotlivých kapitol (napr. obr. 3.1 je obrázok č. 1 v kapitole 3). Vzorce sa číslujú na pravom okraji riadku v okrúhlych zátvorkách - napr. (3.1).
7. Všetky výpočty musia byť usporiadané tak, aby bolo možné preveriť ich správnosť.
8. Pri všetkých prevzatých vzorcoch, tabuľkách, citovaných častiach textu musí byť uvedený prameň.
9. Citovanie literatúry vrátane elektronických materiálov sa uvádza podľa STN ISO 690 (01 0197): 2012. *Informácie a dokumentácia. Návod na tvorbu bibliografických odkazov na informačné pramene a ich citovanie.*
10. Príklad zoznamu bibliografických odkazov:  
ABELOVIČ, J. a kol.: *Meranie v geodetických sieťach*. Bratislava: Alfa 1990. 104 s. ISBN 0-1554-9173.  
MICHALČÁK, O. – ADLER, E.: Výskum stability dunajských hrádzí. In: *Zborník vedeckých prác Stavebnej fakulty SVŠT*. Bratislava: Edičné stredisko SVŠT 1976, s. 17-28. ISBN 0-3552-5214.  
ŠÜTTI, J.: Určovanie priestorových posunov stavebných objektov. *Geodetický kartografický obzor*. 2000, roč. 2, č. 3, s. 8-16. ISSN 0811-6900.  
Article 18. Technical Cooperation. <http://www.lac.uk/iso/tc456> (2013-09-28)
11. Za jazykovú a terminologickú správnosť závěrečné práce zodpovedá študent.
12. Formu postera (elektronická alebo aj tlačenná) určí garant študijného programu.
13. Vzor pre poster je uvedený na dokumentovom serveri v akademickom informačnom systéme univerzity.

.....  
podpis garanta študijného programu

Ustanovenia týchto pokynov som vzal na vedomie. Som si vedomý(á), že ak nebude moja bakalárska práca vypracovaná v súlade s týmito pokynmi, nebude prijatá na obhajobu.

V Bratislave .....

.....  
podpis študenta

## Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som túto záverečnú prácu vypracoval samostatne pod vedením vedúceho záverečnej práce, s použitím literatúry uvedenej v zozname použitej literatúry.

Bratislava 5. 5. 2022

.....  
Marek Tomka

## **Podakovanie**

Velké podakovanie patrí môjmu vedúcemu práce Ing. Marekovi Macákovi, PhD. za odbornú pomoc, jeho cenné rady, pripomienky a predovšetkým ochotu, a trpezlivosť pri konzultáciách v ľubovoľnom čase počas dňa. Vďaka patrí taktiež mojej manželke a celej rodine za ich trpezlivosť so mnou pri vypracovávaní tejto práce.

Bratislava 5. 5. 2022

Marek Tomka

# Abstrakt

**Názov práce:** Inovatívne spôsoby určovania tiažového poľa Zeme

**Abstrakt:** V našej práci budeme skúmať možnosti implementácie okrajových podmienok druhého rádu pre úlohu určovania tiažového poľa Zeme. V prvej časti si vysvetlíme dôležité teoretické pojmy a vzťahy pre zadenovanie geodetického problému. Ďalej si odvodíme postup riešenia Laplaceovej rovnice pomocou metódy konečných prvkov. Využitím teoretických poznatkov z predošlých častí práce prevedieme niekoľko numerických experimentov geodetickej úlohy v softvéri Wolfram Mathematica. Na záver porovnáme výsledky našich experimentov s presným riešením a zároveň vyhodnotíme, či sú okrajové podmienky druhého rádu vhodné na výpočet poruchového potenciálu.

**Kľúčové slová:** tiažové pole Zeme, metóda konečných prvkov, poruchový potenciál, Wolfram Mathematica

## Abstract

**Title:** Innovative methods of determining the Earth's gravity field

**Abstract:** This work investigates the alternatives for implementing second-order boundary conditions in the context of determining the Earth's gravity field. In the first section, we will clarify essential theoretical terms to properly define the geodetic problem. Subsequently, the solution procedure of Laplace equation using the finite element method is derived. Several numerical experiments of the geodetic task are then carried out using the theoretical knowledge from previous sections of this work in Wolfram Mathematica software. Conclusively, the results of numerical experiments are compared to the analytical solution, and the suitability of second-order boundary conditions for the calculation of gravity potential is analysed.

**Keywords:** Earth's gravity field, finite element method, gravity potential, Wolfram Mathematica

# Obsah

<b>Abstrakt</b>	<b>7</b>
<b>Úvod</b>	<b>9</b>
<b>1 Úvod do geodetickej úlohy</b>	<b>10</b>
1.1 Gravitačná sila . . . . .	10
1.2 Tiažový potenciál hmotného bodu . . . . .	11
1.3 Teória potenciálu . . . . .	12
1.4 Geodetická okrajová úloha . . . . .	13
<b>2 Metóda konečných prvkov</b>	<b>15</b>
2.1 Diskretizácia oblasti . . . . .	16
2.2 Slabá formulácia rovníc na elemente . . . . .	16
2.3 Aproximačné funkcie na elemente . . . . .	17
2.4 Zostavenie sústavy rovníc na elemente . . . . .	18
2.4.1 Lokálna elementová matica . . . . .	19
2.5 Numerická integrácia . . . . .	20
2.6 Zostavenie globálneho systému rovníc . . . . .	20
<b>3 Numerické experimenty</b>	<b>24</b>
3.1 Teoretické experimenty v 2D . . . . .	24
3.1.1 Diskretizácia oblasti . . . . .	24
3.1.2 Rôzne kombinácie okrajových podmienok . . . . .	26
3.2 Teoretické experimenty v 3D . . . . .	30
3.2.1 Rôzne kombinácie okrajových podmienok . . . . .	30
<b>Záver</b>	<b>33</b>
<b>Literatúra</b>	<b>34</b>



# Úvod

Už od začiatku histórie ľudstva je o nás ľuďoch známe, že sa neustále snažíme vymýšľať nové vynálezy, ktoré by nám urýchlili prácu, pomohli dosiahnuť lepšie výsledky, resp. uľahčili náš každodenný život. Neoddeliteľnou súčasťou toho je aj získavanie nových poznatkov, na základe ktorých vieme naše vynálezy upravovať a zlepšovať. Dobrým príkladom toho je aj oblasť fyzikálnej geodézie, ktorej jedným z hlavných cieľov je presné určenie gravitačného poľa Zeme. Začiatky riešenia tohto problému môžeme nájsť už v časoch Isaaca Newtona, a aj napriek tomu ešte stále hľadáme nové, presnejšie a rýchlejšie spôsoby určenia gravitačného poľa. Aj v novodobej histórii poznáme viacero prevedených experimentov na skúmanie tohto geodetického problému. To je cieľom aj tejto práce. Vďaka technológiám dnešnej doby vieme družicovým alebo gravimetrickým meraním určiť tiažové zrýchlenie. Pomocou družicového merania dostávame 2. deriváciu poruchového potenciálu a našou snahou v tejto práci bude pomocou teoretických experimentov vyskúšať, či je vhodné implementovať aproximáciu druhej derivácie do takejto geodetickej okrajovej úlohy. Tento nie úplne štandardný inžiniersky problém budeme riešiť primárne pomocou metódy konečných prvkov. Súčasťou práce je aj zhodnotenie vhodnosti použitia softvéru Wolfram Mathematica pre geodetické problémy podobného typu.

V prvej časti práce vysvetľujeme doterajšie teoretické poznatky o Teórii potenciálu, kde je našou úlohou pomocou základného Newtonovho Gravitačného zákona odvodiť dôležitú Laplaceovu rovnicu. Následne vďaka poznaniu o Laplacovej rovnici si zdefinujeme podstatu nášho geodetického problému, na ktorom bude založená celá práca.

Ďalšia časť práce sa sústreďuje na podrobné predstavenie postupu metódy konečných prvkov (MKP), ktoré prevedieme v softvéri Wolfram Mathematica. V tejto časti vysvetľujeme každý krok nášho spôsobu riešenia, ktorého súčasťou je napr.: diskretizácia oblasti, zostavenie sústavy rovníc a na záver implementácia okrajových podmienok.

Posledná časť práce je venovaná teoretickým experimentom, ktorých podstatou je porovnávanie výsledkov dosiahnutých implementáciou rôznych kombinácií Dirichletovej, Neumannovej okrajovej podmienky a aproximácie 2. derivácie do nášho geodetického problému. Následne v závere na základe vykonaných experimentov vyhodnotíme cieľ práce a teda či je implementácia okrajovej podmienky 2. rádu pre tento problém vhodná.

# Kapitola 1

## Úvod do geodetickej úlohy

V období 19. storočia, kedy sa vo fyzike verilo, že základné prírodné sily vznikajú z potenciálov, ktoré spĺňajú Laplaceovu rovnicu, sa prvýkrát zaviedol pojem Teória potenciálu. Dnes už ale vieme, že príroda je omnoho zložitejšia ako si mysleli ľudia v minulých storočiach. Rovnice, ktoré opisujú sily, sú systémy nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc, ako napríklad Yang-Millove rovnice, Einsteinove rovnice a v určitých prípadoch aj Laplaceova rovnica. Preto sa pojem Teórie potenciálu v dnešnej dobe ešte stále používa aj na opis rovníc spĺňajúcich Laplaceovu rovnicu.

### 1.1 Gravitačná sila

Veľkú zásluhu na rozvoji tejto teórie má aj Isaac Newton vďaka jeho Gravitačnému zákonu. Tento zákon nám hovorí, že každé dva hmotné body, ktorých vzájomná vzdialenosť je  $l$  a ich hmotnosti sú  $m_1, m_2$ , sa pôsobením gravitačnej sily  $F$  navzájom priťahujú. Vzťah pre výpočet gravitačnej sily je [4]

$$F = G \frac{m_1 m_2}{l^2}, \quad (1.1)$$

pričom konštantu  $G$  nazývame gravitačná konštanta. Napriek tomu, že gravitačná konštanta je jedna z troch najdôležitejších konštánt v oblasti fyziky, je zároveň aj jednou z najmenej presne určených konštánt. Na základe National Institute of Standards and Technology (NIST) je najnovšie odporúčaná hodnota gravitačnej konštanty z roku 2018 a to [1]

$$G = 6.67408 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}. \quad (1.2)$$

Vyššie sme uviedli, že ľubovoľné dva hmotné body sa priťahujú navzájom, čo samozrejme znamená, že sa priťahujú symetricky. Napriek tomu bude vhodnejšie, keď jeden z našich hmotných bodov budeme považovať za priťahujúci a druhý za ten priťahovaný. Pre zjednodušenie vzťahu (1.1) si zvolíme jednotkovú hmotnosť pre jeden z našich hmotných bodov a hmotnosť druhého hmotného bodu si zvolíme rovnú  $m$ . Dostávame potom vzťah

$$F = G \frac{m}{l^2}, \quad (1.3)$$

vyjadrujúci silu, ktorou pôsobí hmotnosť  $m$  na jednotkovú hmotnosť v bode  $P$  vo vzdialenosti  $l$  od  $m$ .

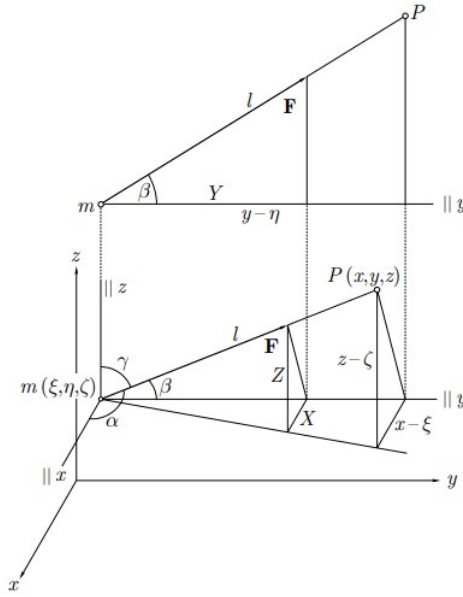
Majme zadefinovaný kartézsky súradnicový systém  $xyz$ , na ňom si označme súradnice priťahujúcej hmotnosti  $m$  ako  $\xi, \eta, \zeta$  a súradnice priťahovaného bodu  $P$  ako  $x, y, z$ . Sila je potom reprezentovaná

vektorum  $F$ , ktorého zložky sú

$$\begin{aligned} X &= -F \cos \alpha = \frac{-Gm}{l^2} \frac{x - \xi}{l} = -Gm \frac{x - \xi}{l^3}, \\ Y &= -F \cos \beta = \frac{-Gm}{l^2} \frac{y - \eta}{l} = -Gm \frac{y - \eta}{l^3}, \\ Z &= -F \cos \gamma = \frac{-Gm}{l^2} \frac{z - \zeta}{l} = -Gm \frac{z - \zeta}{l^3}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

pričom

$$l = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}. \quad (1.5)$$



Obr. 1.1: Komponenty gravitačnej sily [4].

## 1.2 Tiažový potenciál hmotného bodu

Pre lepšie porozumenie na začiatku spomínanej Teórie potenciálu je potrebné poznať skalárnu funkciu

$$V = \frac{Gm}{l}, \quad (1.6)$$

ktorú poznáme pod pojmom tiažový potenciál. Dôsledkom tohto poznania je zjednodušenie zložiek gravitačnej sily (1.4) na tvar

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (1.7)$$

čo môžeme jednoducho dokázať parciálnou deriváciou funkcie  $V$ , pretože

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{l} = -\frac{1}{l^2} \frac{x - \xi}{l} = -\frac{x - \xi}{l^3}, \dots \quad (1.8)$$

Gravitačnú silu  $F$  potom vieme zapísať ako gradient skalárnej funkcie  $V$ :

$$F = [X, Y, Z] = \text{grad } V = \nabla V. \quad (1.9)$$

To, že vieme tri zložky vektora  $F$  vďaka vzťahu (1.7) nahradiť jednou funkciou  $V$ , je veľmi podstatné, najmä ak uvažujeme o príťažlivosti hmotných bodov alebo pevných telies. Toto je využiteľné napríklad pri riešení problémov v geodézii, kde je omnoho jednoduchšie pracovať s potenciálom ako s tromi zložkami sily.

V prípade, že máme systém rôznych hmotných bodov  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , výsledný potenciál tohto systému je iba súčet jednotlivých potenciálov (1.6):

$$V = \frac{Gm_1}{l_1} + \frac{Gm_2}{l_2} + \dots + \frac{Gm_n}{l_n} = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i}. \quad (1.10)$$

### 1.3 Teória potenciálu

Na vysvetlenie teórie potenciálu budeme v tejto kapitole čerpať primárne zo zdroja [7]. Vzhľadom k vyššie spomínanému Newtonovmu gravitačnému zákonu, gravitačný potenciál  $W_g$  môžeme vyjadriť v tvare

$$W_g = W_g(x) = G \int_{Zem} \frac{\rho(Q)}{l(P, Q)} dv_Q, \quad (1.11)$$

pričom  $G$  je gravitačná konštanta (1.2),  $P$  máme definované ako bod, ktorého súradnice sú  $(x, y, z)$ ,  $Q$  ako bod, ktorý je stredom objemového elementu  $dv_Q$ ,  $l$  máme ako vzdialenosť medzi bodmi  $P$  a  $Q$ , a  $\rho(Q)$  ako hustotu v bode  $Q$ .

Keďže na výpočet gravitačného potenciálu  $W_g$  by sme potrebovali presné rozloženie hustoty Zeme, uvažujme nad veľmi veľkou vzdialenosťou  $l$  a vzťah (1.11) vyjadríme ako

$$W_g = \frac{GM}{l}, \quad (1.12)$$

kde  $M$  je celková hmotnosť Zeme. Zo vzťahu (1.12) môžeme vidieť, že každé teleso sa na veľkú vzdialenosť gravitačne správa ako hmotný bod, viď (1.6).

Tiažový potenciál  $W$ , ktorý súvisí s rotáciou Zeme, vieme zapísať ako súčet gravitačného potenciálu  $W_g$  a odstredivého potenciálu  $W_o$ :

$$W = W_g + W_o, \quad (1.13)$$

pričom ak poznáme uhlovú rýchlosť rotácie Zeme  $\omega$ , odstredivý potenciál  $W_o$  je definovaný ako

$$W_o = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2). \quad (1.14)$$

Gravitačný potenciál  $W_g$  spĺňa Poissonovu rovnicu

$$\Delta W_g = -4\pi G\rho, \quad (1.15)$$

pričom ak uvažujeme nad prázdny priestorom mimo Zeme, hustota  $\rho = 0$ , a teda rovnica (1.15) sa zmení na Laplaceovu rovnicu

$$\Delta W_g = 0, \quad (1.16)$$

ktorej riešením sú harmonické funkcie.

Deriváciu vzťahu (1.14) dostaneme

$$\Delta W_o = 2\omega^2, \quad (1.17)$$

a teda dostaneme rovnicu pre tiažový potenciál

$$\Delta W_g = -4\pi G\rho + 2\omega^2, \quad (1.18)$$

z čoho po využití znalosti o nulovej hustote v priestore mimo Zeme dostávame

$$\Delta W = 2\omega^2. \quad (1.19)$$

V praxi, kvôli zložitosti zemského povrchu, využívame na generovanie jeho aproximácie referenčný elipsoid. Z toho vyplýva, že tiažový (normálny) potenciál  $V$  generovaný elipsoidom zostrojíme podobne ako tiažový (skutočný) potenciál  $W$ , a teda

$$V = V_g + V_o, \quad (1.20)$$

pričom  $V_g$  je gravitačný, a  $V_o$  je odstredivý potenciál.

Rozdielom normálneho a skutočného tiažového potenciálu dostaneme poruchový potenciál  $T$ , z čoho vyplýva

$$W = V + T. \quad (1.21)$$

Jedným z dôvodov, prečo sa využíva referenčný elipsoid na aproximáciu je, že generovaný model má rovnakú hmotnosť ako Zem a rotuje aj rovnakou rýchlosťou ako Zem. Z toho dôvodu sa odstredivé zložky vynulujú, je možné ich zanedbanie [13]

$$T = W_g + W_o - V_g + V_o = W_g - V_g, \quad (1.22)$$

a teda poruchový potenciál v priestore mimo Zeme spĺňa Laplaceovu rovnicu

$$\Delta T = 0. \quad (1.23)$$

## 1.4 Geodetická okrajová úloha

Uvažujme nad vektorom skutočného tiažového zrýchlenia  $\vec{g}$  v bode  $P$  na zemskom povrchu a nad normálnym tiažovým zrýchlením  $\vec{\gamma}$  v bode  $Q$  na elipsoide. Ich rozdielom je vektor tiažovej anomálie

$$\Delta\vec{g} = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_Q. \quad (1.24)$$

Keďže elipsoid vieme matematicky vyjadriť, môžeme  $\vec{g}$  a  $\vec{\gamma}$  porovnávať v jednom bode  $P$  na zemskom povrchu, čím dostaneme vektor poruchovej anomálie

$$\vec{\delta g} = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_P, \quad (1.25)$$

pričom rozdiel ich veľkostí sa nazýva tiažová porucha

$$\delta g = g_P - \gamma_P. \quad (1.26)$$

Uvažujme teda ohraničenú oblasť  $\Omega$ , ktorej spodnú hranicu predstavuje zemský povrch  $\Gamma \subset \partial\Omega$  a jej hornú hranicu vytvára umelá hranica vo výške satelitu. Pre naše experimenty si musíme zdefinovať najskôr zmiešanú geodetickú okrajovú úlohu s Neumannovou okrajovou podmienkou na zemskom povrchu a Dirichletovou okrajovou podmienkou všade inde v uvažovanej oblasti:

$$\Delta T(x) = 0 \quad x \in \Omega, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = \delta g^* \quad x \in \Gamma, \quad (1.28)$$

$$T(x) = T_{SAT}(x) \quad x \in \partial\Omega - \Gamma, \quad (1.29)$$

kde  $\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = \delta g(x) \cdot \cos \mu(x) = \delta g(x)^*$ , pričom  $\mu(x)$  je uhol medzi vektorom smeru normálneho tiažového zrýchlenia  $\vec{s}$ , a vonkajším normálovým vektorom na zemský povrch  $\vec{n}$ , a  $T_{SAT}$  je poruchový potenciál získaný satelitnými meraniami.

Vyššie definovanú okrajovú úlohu si modifikujeme na geodetickú okrajovú úlohu, ktorou bude kombinácia Neumannovej okrajovej podmienky opäť na zemskom povrchu  $\Gamma$  a aproximácie 2. derivácie na hranici oblasti vo výške satelitu  $\Gamma_S$ :

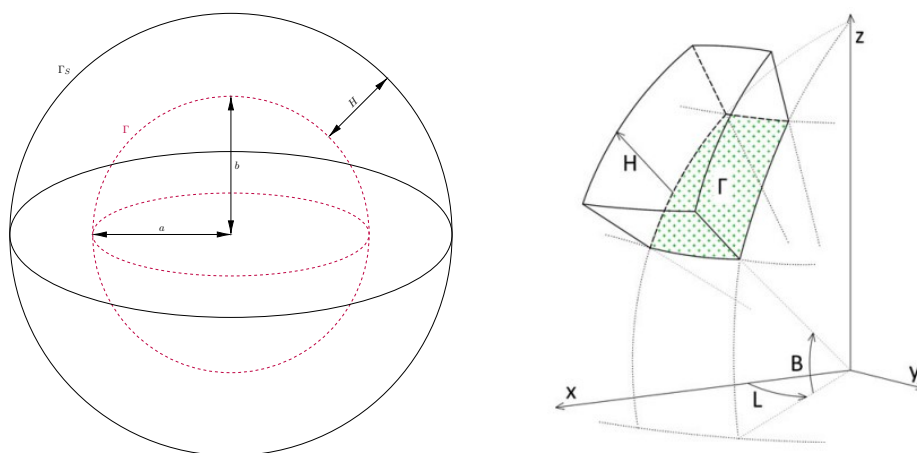
$$\Delta T(x) = 0 \quad x \in \Omega, \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = \delta g^* \quad x \in \Gamma, \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \vec{n}^2} = T_{RR(SAT)}(x) \quad x \in \Gamma_S, \quad (1.32)$$

$$T(x) = T_{SAT}(x) \quad x \in \partial\Omega - \Gamma - \Gamma_S, \quad (1.33)$$

kde  $T_{RR(SAT)}$  je 2. radiálna derivácia poruchového potenciálu získaná zo satelitného merania.



Obr. 1.2: Výpočtová oblasť  $\Omega$  [2].

## Kapitola 2

# Metóda konečných prvkov

V inžinierskych úlohách sa na hľadanie približného riešenia diferenciálnych rovníc používajú rôzne numerické metódy, ako napríklad:

- Metóda konečných diferencií (FDM)
- Metóda konečných objemov (FVM)
- Metóda okrajových prvkov (BEM)
- Variačné metódy

Medzi tzv. tradičné Variačné metódy patria napr. Metóda vážených rezíduí, Galerkinova alebo Rayleigh - Ritzova metóda. Tieto metódy majú jeden hlavný nedostatok a tým je zvolenie si vhodných aproximačných funkcií tak, aby spĺňali okrajové podmienky úlohy, ktorú treba vyriešiť. Keďže väčšina problémov v reálnom svete je definovaná na geometricky zložitých oblastiach, nie je úplne jednoduché nájsť správne aproximačné funkcie, aby boli splnené dané okrajové podmienky. Preto sa začala využívať metóda založená na variačnom prístupe: Metóda konečných prvkov (MKP).

Metóda konečných prvkov (MKP) je silná numerická metóda na riešenie diferenciálnych a integračných rovníc, s ktorými sa stretávame nie len v oblasti inžinierskych a aplikovaných vied. Základnou myšlienkou MKP je rozdelenie geometricky zložitej oblasti na konečný počet jednoduchších podoblastí, ktoré nazývame konečné prvky (elementy). Pre tieto elementy je potom možná jednoduchšia a systematickejšia voľba aproximačných funkcií. Vďaka tomu sa metóda konečných prvkov stala jednou z najvyužívanejších metód na riešenie inžinierskych problémov v rôznych oblastiach.

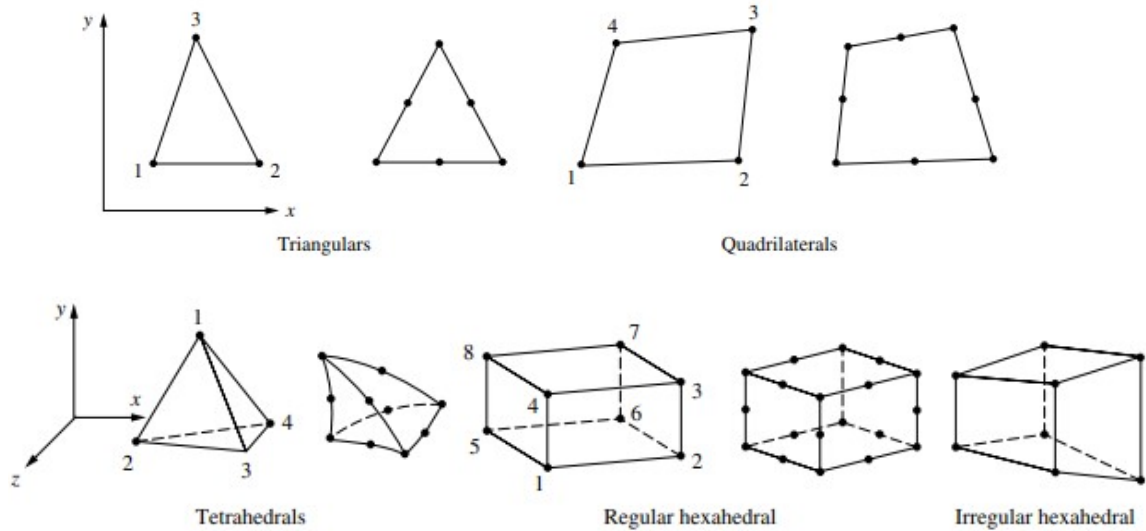
Pri aplikovaní MKP je potrebné poznať minimálne základnú kostru postupu tejto metódy, ktorú si pre daný typ úlohy vieme podľa potreby prispôbiť.

Základný postup pri aplikácii MKP je nasledovný:

1. Diskretizácia oblasti na množinu elementov
2. Zostavenie sústavy rovníc na elemente
  - Slabá formulácia rovníc na elemente
  - Aproximačné funkcie na elemente
3. Spojenie sústav rovníc na elemente do globálneho systému rovníc
4. Zahrnutie okrajových podmienok
5. Riešenie systému rovníc
6. Vyhodnotenie a spracovanie výsledkov

## 2.1 Diskretizácia oblasti

Ako sme uviedli na začiatku o metóde konečných prvkov, diskretizácia výpočtovej oblasti  $\Omega$  na konečnú množinu elementov  $\Omega^e$ ,  $e = 1, \dots, N$ , kde  $N$  je počet elementov, je jedným z hlavných znakov tejto metódy. Element  $\Omega^e$  môže byť rôzneho geometrického tvaru, preto je dôležité si pred samotnou diskretizáciou vybrať typ elementov, viď Obr. 2.1, ktorý nám vyhovuje.



Obr. 2.1: Najpoužívanejšie typy elementov: 2D elementy (hore), 3D elementy (dole) [6].

Je dôležité si uvedomiť, že pri diskretizácii oblasti  $\Omega$  dochádza k určitej chybe, ktorú nazývame diskretizačnou chybou. Túto chybu sa snažíme obmedziť zvolením čo najväčšieho počtu elementov  $N$ . Treba si ale uvedomiť aj to, že čím väčšie zvolené  $N$ , tým náročnejšie na výpočet to pre počítač bude. My sme v našich úlohách použili v 2D - štvoruholník so 4 uzlami a v 3D - nepravidelný šesťsten s 8 uzlami.

## 2.2 Slabá formulácia rovníc na elemente

Základným princípom zostrojenia slabej formulácie je, že cez oblasť elementu  $\Omega^e$  zintegrujeme súčin nami uvažovanej rovnice (1.23) a funkcie  $w$ , ktorú nazývame váhovou (testovacou) funkciou [8]

$$\int_{\Omega^e} \Delta T w \, d\Omega^e = 0. \quad (2.1)$$

V 2D môžeme vzťah (2.1) prepísať na tvar

$$\int_{\Omega^e} w \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0. \quad (2.2)$$

Keďže máme súčin dvoch funkcií, ktoré sú spojité aj s ich všetkými prvými parciálnymi diferenciálnymi rovnicami, môžeme na rovnicu (2.2) aplikovať Greenovu vetu [3]:

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx = \int_{\partial\Omega^e} f g n_i dS - \int_{\Omega^e} f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx, \quad (2.3)$$



kde  $\partial\Omega^e$  je Lipschitzovská hranica oblasti  $\Omega^e$ ,  $f(x_1, x_2)$  a  $g(x_1, x_2)$  sú spojité funkcie, a  $n = (n_1, n_2)$  je vonkajšia normála ku hranici  $\partial\Omega^e$ . Po aplikovaní Greenovej vety na (2.2) dostávame konečný tvar slabej formulácie

$$\int_{\Omega^e} \nabla T \cdot \nabla w \, d\Omega^e = \int_{\partial\Omega^e} w q_n \, d\partial\Omega^e. \quad (2.4)$$

Koeficient  $q_n$  má v každom riešenom probléme súvis s tým, o aký typ fyzikálneho problému ide.

Keďže naše experimenty budeme vykonávať aj v 3D priestore, je potrebné si uvedomiť, že konštrukcia slabej formulácie bude v takom prípade analogická tej v 2D, iba rozšírená o tretiu súradnicu  $z$ .

## 2.3 Aproximačné funkcie na elemente

Aproximačné funkcie si väčšinou volíme v tvare úplného polynómu, pretože s polynómami sa pracuje veľmi dobre, keďže sa pomerne ľahko derivujú a aj integrujú. Pri aproximačných funkciách je taktiež dôležité, aby derivácie, ktoré sa nachádzajú v slabej formulácii, boli pre nami zvolený polynóm nenulové. Ak máme v každom uzlovom bode našich elementov zvolené aproximačné funkcie a sú splnené vyššie uvedené podmienky, tak približné riešenie v 2D prípade budeme počítat v tvare [12]

$$T^e(x, y) = \sum_{j=1}^n T_j^e \psi_j^e(x, y). \quad (2.5)$$

Hodnoty  $T_j^e$  sú približné riešenia v uzlových bodoch  $X_j$  elementu, ktoré sa rovnajú presnému riešeniu v danom uzlovom bode a funkcie  $\psi_j^e(x, y)$  nazývame Lagrangeove tvarové (bázové) funkcie, pričom  $j = 1, \dots, n$  a  $n$  je počet uzlových bodov elementu. Keďže používame izoparametrické elementy, je potrebné ich transformovať z kartézskoho súradnicového systému  $(x, y)$  do lokálneho súradnicového systému  $(\xi, \eta) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ , a teda zmení sa aj tvar približného riešenia (2.5) na [12]

$$T^e = \sum_{j=1}^n T_j^e \psi_j^e(\xi, \eta), \quad (2.6)$$

čo konkrétne pre náš 4-uzlový element bude znamenať [11]:

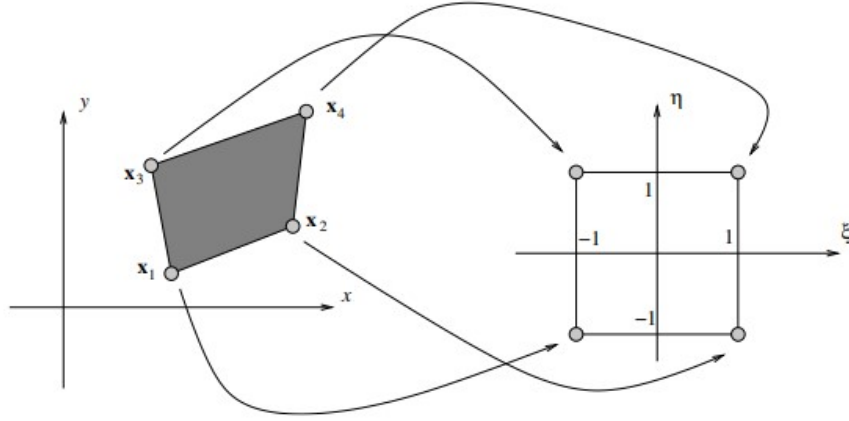
$$T^e = \sum_{j=1}^4 T_j^e \psi_j^e(\xi, \eta), \quad (2.7)$$

Pre tvarové funkcie  $\psi_i^e(X_j)$  platí

$$\psi_i^e(X_j) = \begin{cases} 1, & \text{ak } i = j, \\ 0, & \text{ak } i \neq j, \end{cases} \quad (2.8)$$

a ich definície v jednotlivých uzlových bodoch sú [11, 15]:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), & \psi_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\ \psi_3 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta), & \psi_4 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta). \end{aligned} \quad (2.9)$$



Obr. 2.2: Ilustrácia transformácie do lokálneho súradnicového systému [11].

Vzťah medzi pôvodnými a transformovanými súradnicami vieme potom vyjadriť pomocou

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 \psi_i(\xi, \eta) x_i^e, \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 \psi_i(\xi, \eta) y_i^e. \end{aligned} \quad (2.10)$$

## 2.4 Zostavenie sústavy rovníc na elemente

Keďže už máme slabú formuláciu a aj približné riešenie, ďalším krokom je dosadenie približného riešenia do slabej formulácie, a postupné dosádzanie ľubovoľných funkcií za váhovú funkciu  $w$  tak, aby stále platila rovnosť slabej formulácie (2.4). Funkciu  $w$  budeme nahrádzať postupne funkciami  $\psi_i^e, i = 1, \dots, n$ , a teda zo sústavy tak dostaneme  $i$ -tu rovnicu [13]

$$\sum_{j=1}^n T_j \left[ \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} d\Omega^e \right] = \int_{\partial\Omega^e} \psi_i^e q_n d\partial\Omega^e. \quad (2.11)$$

Vďaka tomu potom elementovú sústavu rovníc môžeme napísať v tvare [5]

$$\sum_{j=1}^n k_{ij}^e T_j = Q_i^e, \quad (2.12)$$

čo je v tvare matíc

$$k^e T^e = Q^e. \quad (2.13)$$

V rovnici (2.13) je neznáma vektor približných riešení  $T^e$ , maticu  $k^e$  poznáme pod pojmom elementová matica tuhosti a  $Q^e$  je vektor toku.

V kapitole 2.3 sme načrtli transformáciu súradníc a aby sme mohli prísť k numerickému riešeniu, musíme do lokálnych súradníc transformovať všetky použité funkcie a premenné, čiže budeme potrebovať poznať aj vzťah derivácií aproximačných funkcií  $\psi_i^e$  podľa kartézskych (globálnych) súradníc [5, 15]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} &= \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} &= \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

čo sa dá zapísať aj v tvare

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (2.15)$$

pričom maticu  $J$  nazývame Jakobiho matica

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Rovnosť (2.15) nám dáva možnosť vyjadriť si aj inverznú Jakobiho maticu, ktorá je pre nás tiež dôležitá [15]

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J^{-1}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad (2.17)$$

a teda inverznú Jakobiho maticu  $J^{-1}$  vieme vypočítať ako

$$[J^{-1}] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

z čoho vyplýva aj dôležitá poznámka, že treba dať pozor na to, aby pre determinant Jakobiánu  $J$  v každom bode elementu  $\Omega^e$  platilo

$$\det[J] > 0. \quad (2.19)$$

Pri bilineárnych transformáciách sa  $\det[J] \neq 0$  iba vtedy, ak je vybraný štvoruholníkový element konvexný, čiže všetky jeho vnútorné uhly sú menšie ako  $\pi$ .

### 2.4.1 Lokálna elementová matica

Pri riešení elementových sústav rovníc je možné prísť k elementovej matici  $k^e$  rôznymi spôsobmi. Jeden, ten najznámejší sme ukázali v kapitole 2.4. My sme ale pri riešení nášho problému použili iný spôsob, pretože pri programovaní bolo výhodnejšie použiť vzťah [5]

$$[k^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^e(\xi, \eta)]^T [B^e(\xi, \eta)] dx dy, \quad (2.20)$$

pričom  $dx dy = \det[J] d\xi d\eta$ , a teda (2.20) vyjadríme ako

$$[k^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B^e(\xi, \eta)]^T [B^e(\xi, \eta)] \det[J] d\xi d\eta. \quad (2.21)$$

Aktuálne poznáme všetky parametre, už nám chýba iba povedať si, čo je matica  $[B]$ . Maticu  $[B]$  najlepšie vyjadruje rovnica [5]

$$[B] = [J^{-1}][B_1], \quad (2.22)$$

kde

$$[B_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi_3}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \psi_3}{\partial \eta} & \frac{\partial \psi_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Vzťah (2.22) pre maticu  $[B]$  je potom konkrétnejšie

$$[B] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi_3}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \psi_3}{\partial \eta} & \frac{\partial \psi_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Z posledných podkapitol je dôležité si uvedomiť, že už nepracujeme s elementami v globálnom

súradnicovom systéme, ale v lokálnom, čo znamená, že všetky matice, resp. hodnoty uvažujeme vzhľadom na  $(\xi, \eta) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ . Transformáciou do lokálneho súradnicového systému sme dosiahli to, že už nemusíme integrovať cez pomerne zložitú oblasť elementu  $\Omega^e$ , ale iba cez jednoduchú štvorcovú oblasť  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , čo nám umožňuje počítať náš dvojité integrál numericky.

## 2.5 Numerická integrácia

Vo veľa prípadoch sa môže stať, že analytické riešenie problému je veľmi zložitú, resp. až nemožné. Stáva sa to napríklad pri používaní izoparametrických elementov v 2D a 3D, práve kvôli zložitosti integrálov, ako sme mohli vidieť v podkapitole 2.3. Najlepší spôsob, ako dostať pre takéto úlohy jednoduché a presné riešenie, je použitie numerickej integrácie [9]. Typov numerickej integrácie je veľa, ale my sa budeme venovať hlavne Gaussovej kvadratúre, resp. Gauss-Legendre kvadratúre. Sú to aproximácie tvaru [10]

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_1^n f(x_i) w_i. \quad (2.25)$$

Uzly  $x_i$  nazývame Gaussove body a koeficienty  $w_i$  sú váhy. Každému uzlu  $x_i, i = 1, \dots, 4$ , je pridelený jeden koeficient  $w_i$ . V 2D a 3D prípadoch je potrebné každý integrál aproximovať váženým súčtom ako v 1D prípade (2.25). Napríklad pre našu 2D úlohu, kde  $n_\xi$  je počet bodov elementu v smere  $\xi$  a  $n_\eta$  je počet bodov elementu v smere  $\eta$ , to bude vyzerať takto [10]:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi_i, \eta_j) d\xi d\eta \approx \sum_1^{n_\xi} \sum_1^{n_\eta} f(\xi_i, \eta_j) w_i w_j. \quad (2.26)$$

n	$\xi_i$	$w_i$
1	0.0	2.0
2	-0.57735026918963 0.57735026918963	1.0 1.0
3	-0.77459666924148 0.0 0.77459666924148	0.55555555555556 0.88888888888889 0.55555555555556
4	-0.86113631159405 -0.33998104358486 0.33998104358486 0.86113631159405	0.34785484513745 0.65214515486255 0.65214515486255 0.34785484513745

Obr. 2.3: Tabuľka s váhami a hodnotami v uzloch pre rôzne počty Gaussových bodov [10].

Keďže my máme štvoruholníkový element so 4 bodmi, použijeme Gaussovu kvadratúru pre  $n = 2$ , a teda hodnoty v našich uzloch budú  $x_i \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$  a koeficienty  $w_i = 1$  pre  $i = 1, 2$ .

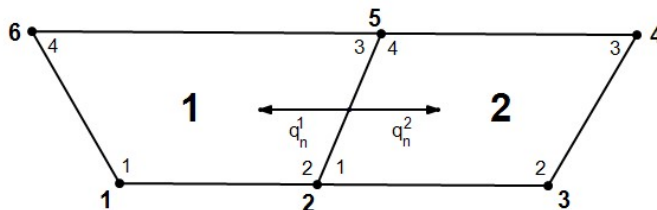
## 2.6 Zostavenie globálneho systému rovníc

Posledným krokom k vyriešeniu problému je spojenie sústavy rovníc na elemente do globálneho systému rovníc a zahrnutie okrajových podmienok. Je dôležité podotknúť, že doteraz sme mali iba tzv. lokálne číslovanie uzlových bodov a približného riešenia. Je preto potrebné zaviesť aj globálne číslovanie uzlových bodov.

Na Obr. 2.4 môžeme vidieť dva štvoruholníkové elementy a ich uzlové body. Na nich máme zavedené lokálne číslovanie - lokálne uzlové body, globálne číslovanie - globálne uzlové body a aj toky elementov.

Zostrojenie globálneho systému rovníc je založené na dvoch základných pravidlách, ktoré musia byť splnené [12]:

1. Spojitosť približného riešenie
2. Bilancia tokov



Obr. 2.4: Ilustračný príklad globálneho číslovania uzlových bodov.

Z ilustračnej diskretizácie na Obr. 2.4 je vidieť, že spojitosť približného riešenia, resp. spojitosť medzi lokálnymi a globálnymi uzlovými bodmi platí. Body prvého elementu 1,2,3 a 4 sú totožné s globálnymi bodmi 1,2,5, a 6. Taktiež body druhého elementu 1,2,3 a 4 sú totožné s globálnymi bodmi 2,3,4, a 5. Spojitosť približného riešenia potom značíme ako

$$\begin{aligned} t_1^1 &= T_1, & t_2^1 &= t_1^2 = T_2, & t_2^2 &= T_3, \\ t_3^2 &= T_4, & t_3^1 &= t_4^2 = T_5, & t_4^1 &= T_6. \end{aligned} \quad (2.27)$$

To, že je splnená aj bilancia tokov možno nie je úplne zreteľne vidieť na Obr. 2.4, ale vieme, že ich súčet je nulový, tým pádom je zachovaná rovnováha tokov:

$$q_n^1 = -q_n^2, \quad \text{resp. :} \quad q_n^1 + q_n^2 = 0. \quad (2.28)$$

### Zahrnutie okrajových podmienok

Na záver treba ešte zahrnúť okrajové podmienky (OP). V našom prípade budeme implementovať Dirichletovu, Neumannovu okrajovú podmienku a aproximáciu 2. derivácie. Keďže naše presné riešenie reprezentuje rovnica (1.27), okrajové podmienky vieme vyjadriť v tvare:

$$\text{Dirichletova okrajová podmienka} \quad T(x) = -\log r, \quad (2.29)$$

$$\text{Neumannova okrajová podmienka} \quad \frac{\partial T(x)}{\partial r} = -\frac{1}{r}, \quad (2.30)$$

$$\text{aproximácia 2. derivácie} \quad \frac{\partial^2 T(x)}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2}, \quad (2.31)$$

pričom  $r$  je vzdialenosť uzlového bodu s definovanou okrajovou podmienkou od stredu hmotného telesa. Pri implementácii každej OP je potrebné poznať princíp jej použitia:

**Dirichletova OP:** Ak chceme zdefinovať Dirichletovu okrajovú podmienku v uzlovom bode  $X_i$ , tak v matici tuhosti  $K_{ij}$  vynulujeme príslušajúci  $i$ -ty riadok a na pozíciu  $K_{ii}$  dosadíme hodnotu 1. Následne do príslušnej pravej strany  $Q_i$  dosadíme hodnotu zo vzťahu (2.29).

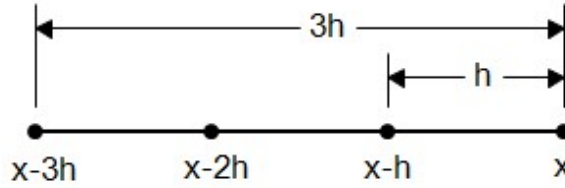
**Neumannova OP:** Zdefinovaním Neumannovej okrajovej podmienky v uzlovom bode  $X_i$ , hodnoty matice tuhosti  $K_{ij}$  zostanú nezmenené zo vzťahu (2.20) a do príslušajúcej pravej strany  $Q_i$  dosadíme hodnotu zo vzťahu (2.30) vynásobenú mierou príslušajúcej hranice.

**Aproximácia 2. derivácie:** Pri použití tohto typu okrajovej podmienky využijeme metódu konečných diferencií (FDM).

Metóda konečných diferencií je numerická metóda, v ktorej diferenciálnu rovnicu aproximujeme systémom algebraických rovníc, resp. konečnými diferenciami. Poznáme tri typy aproximácií: centrálnu, doprednú a spätnú diferenciáciu. Tieto tzv. diferenčné vzťahy si vieme odvodiť pomocou Taylorovho rozvoja presného riešenia v uzlových bodoch [14]:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots \quad (2.32)$$

Keďže našim cieľom je aproximovať 2. deriváciu a chceme, aby naša aproximácia bola 2. rádu presnosti, potrebujeme pre ňu poznať aproximačné koeficienty. Tieto koeficienty si odvodíme pomocou vyššie spomínaného systému rovníc.



Obr. 2.5: Ilustrácia výpočtovej oblasti v 1D.

Najskôr si vyjadríme aproximáciu 2. derivácie v tvare

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx Af(x-3h) + Bf(x-2h) + Cf(x-h) + Df(x). \quad (2.33)$$

Hodnotu funkcie  $f(x-3h)$  potom vieme pomocou Taylorovho rozvoja (2.32) funkcie  $f(x)$  vyjadriť tak, že ak si zvolíme  $b = x-3h$  a  $a = x$ , potom

$$Af(x-3h) = Af(x) - 3Ahf'(x) + 9Ah^2 \frac{f''(x)}{2} - 27Ah^3 \frac{f'''(x)}{6} + O(h^4), \quad (2.34)$$

pričom  $O(h^4)$  je zvyšok. Zjemňovaním diskretizačnej siete platí, že  $h \rightarrow 0$  a z toho vyplýva, že  $O(h^4) \rightarrow 0$ , čiže zvyšok  $O(h^4)$  môžeme zanedbať.

Obdobným spôsobom si vyjadríme aj hodnoty funkcií  $f(x-2h), f(x-h), f(x)$ :

$$Bf(x-2h) = Bf(x) - 2Bhf'(x) + 4Bh^2 \frac{f''(x)}{2} - 8Bh^3 \frac{f'''(x)}{6} + O(h^4), \quad (2.35)$$

$$Cf(x-h) = Cf(x) - Chf'(x) + Ch^2 \frac{f''(x)}{2} - Ch^3 \frac{f'''(x)}{6} + O(h^4), \quad (2.36)$$

$$Df(x) = Df(x). \quad (2.37)$$

Teraz potrebujeme zvoliť koeficienty  $A, B, C$  a  $D$  tak, aby sme súčtom rozvojev (2.34)-(2.37) odstránili členy  $f(x), f'(x), f'''(x)$ , a zostal nám len člen  $f''(x)$ . Odvodíme si preto z rozvojev (2.34)-(2.37) sústavu rovníc

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 0 \\ -3A - 2B - C &= 0 \\ 9A + 4B + C &= \frac{2}{h^2} \\ -27A - 8B - C &= 0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

ktorú vieme vyjadriť v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \\ -27 & -8 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

z čoho dostávame

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{11}{6} & 1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Dostali sme aproximačné koeficienty  $\frac{1}{h^2}(-1, 4, -5, 2)$ , ktoré keď dosadíme do vzťahu (2.33), dostaneme výsledný vzťah pre aproximáciu 2. derivácie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{-f(x-3h) + 4f(x-2h) - 5f(x-h) + 2f(x)}{h^2}. \quad (2.41)$$

Ako môžeme vidieť, pri použití aproximácie 2. derivácie je to trochu komplikovanejšie ako v predchádzajúcich dvoch OP. Naše aproximačné koeficienty teda budú  $c = (-1, 4, -5, 2)$ . Ak zadefinujeme aproximáciu 2. derivácie v uzlovom bode  $X_i$ , v matici tuhosti  $K_{ij}$  vynulujeme prislúchajúci  $i$ -ty riadok a na pozíciu  $K_{ik}$  dosadíme aprox. koeficient  $c_j$ , pričom index  $k = i - j$ , a index  $j = 0, \dots, 3$ . Do prislúchajúcej pravej strany  $Q_i$  dosadíme hodnotu zo vzťahu (2.31) vynásobenú hodnotou  $h^2$ , kde  $h$  je vzdialenosť medzi bodmi  $X_i$  a  $X_{i-1}$ .

Keďže máme zostavený globálny systém rovníc a máme v ňom zahrnuté aj okrajové podmienky, dostávame systém rovníc, ktorý už môžeme riešiť

$$K_{ij}T_j = Q_i. \quad (2.42)$$

## Kapitola 3

# Numerické experimenty

Keďže máme zadefinovanú geodetickú úlohu a vysvetlili sme si aj metódu, ktorou chceme danú úlohu riešiť, môžeme sa pustiť do numerického riešenia. Proces riešenia budeme realizovať v softvéri Wolfram Mathematica, pretože má vybudované celkom príjemné funkcie na vytváranie vektorov, matíc a zároveň aj vykresľovanie bodov, plôch, resp. našich modelov. Pri riešení budeme postupovať tak, že sa najskôr pozrieme na riešenie problému v 2D, kde naša oblasť bude medzikružie so stredom v bode  $S = [0, 0]$ , a polomery kružníc zvolíme  $r_1 = 1m$  a  $r_2 = 2m$ . Následne bude naše riešenie v 2D rozdelené do dvoch hlavných častí, kedy v prvej časti budeme uvažovať nad kruhovým výsekom v rozmedzí  $[0, \frac{\pi}{2}]$  a v druhej časti nad medzikružím v rozmedzí  $[0, 2\pi]$ , viď Obr. 3.1. V oboch prípadoch sa pozrieme na experimenty, v ktorých budeme pozorovať rozdiel medzi presným riešením a našim riešením za použitia kombinácii Dirichletovej, Neumannovej okrajovej podmienky a aproximácie druhej derivácie. Po vyhodnotení výsledkov v 2D prejdeme do 3D priestoru, kde budeme uvažovať nad oblasťou, ktorú nazývame tesseract, čiže tentokrát v troch smeroch  $[0, \frac{\pi}{2}] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \times [1, 2]$ . Aj v 3D priestore zhodnotíme výsledky experimentov, v ktorých opäť využijeme tie isté okrajové podmienky ako v 2D prípade. Hlavnou súčasťou našich výsledkov bude pozorovanie zmenšovania aproximačnej chyby dôsledkom zjemňovania diskretizačnej siete. Aproximačnú chybu budeme počítat v podobe  $L_1$  a  $L_2$  normy chyby. Spolu s normami sa pozrieme aj na experimentálny rád konvergencie EOC, z ktorého budeme vidieť, koľkého rádu presnosti je nami zvolená metóda konečných prvkov. Normy a EOC budeme počítat pomocou vzťahov:

$$\begin{aligned} L_1(N) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |(T_a - T_e)|, \\ L_2(N) &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (T_a - T_e)^2}, \\ EOC &= \log_2 \left( \frac{L(N)}{L(2N)} \right), \end{aligned} \tag{3.1}$$

pričom  $N$  je počet uzlových bodov,  $T_a$  je naše približné riešenie a  $T_e$  je presné riešenie.

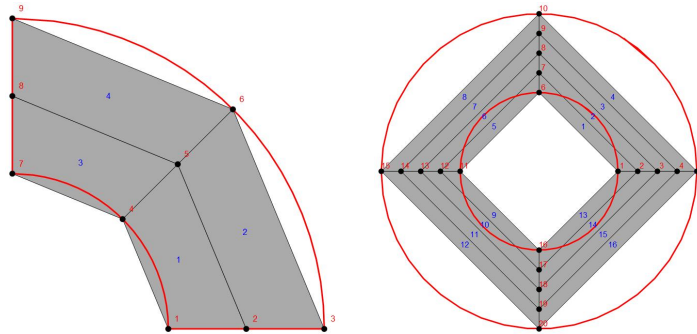
### 3.1 Teoretické experimenty v 2D

#### 3.1.1 Diskretizácia oblasti

Tak ako sme spomenuli vyššie, našou prvou uvažovanou oblasťou bude kruhový výsek s polomerami kružníc  $r_1 = 1m$  a  $r_2 = 2m$ , a v rozmedzí  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , čiže  $[1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ . Druhá uvažovaná oblasť bude

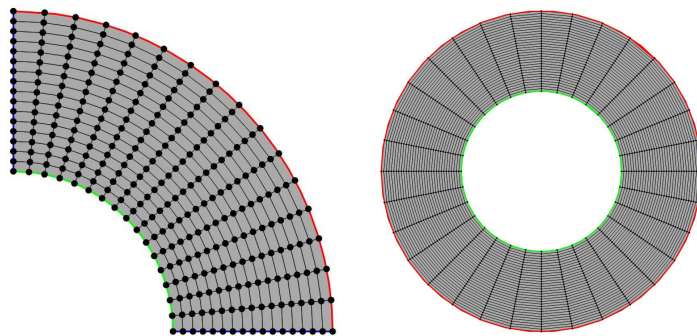


medzikružie  $[1, 2] \times [0, 2\pi]$ . Na diskretizáciu budeme využívať lineárny štvoruholníkový element so 4 uzlami, uvedený v podkapitole 2.1. Princíp zjemňovania siete je jednoduchý. Postupne budeme uvoľňovať  $2^a$ , čím budeme dostávať počet elementov v  $x$  a v  $y$  smere. Celkový počet elementov potom bude  $(2^a)^2$ . Z toho jednoznačne vyplýva, že čím väčšie  $a$ , tým jemnejšia sieť.



Obr. 3.1: Diskretizácia uvažovaných oblastí v 2D pre najmenší zadaný parameter  $a$ .

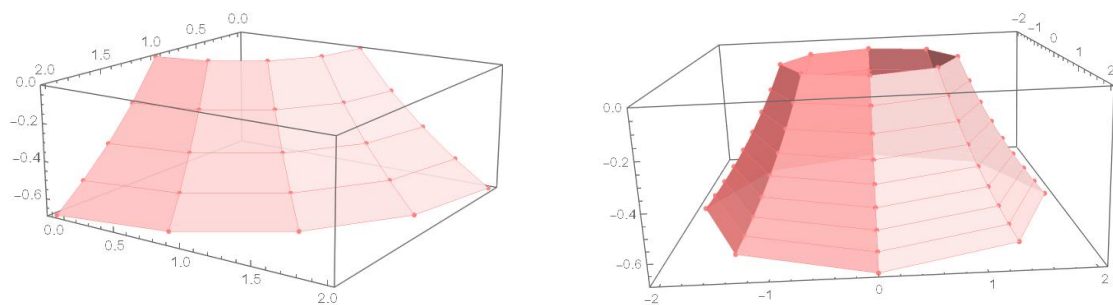
Na Obr. 3.1 môžeme vidieť diskretizáciu oblastí v 2D pre najmenší možný parameter v našom programe  $a = 1$ , resp.  $a = 2$ . Zároveň vidíme, že aproximácia celej plochy medzikružia je pre tak nízky parameter veľmi slabá. Ak však ale zvolíme  $a = 4$  v prvom prípade a  $a = 5$  v druhom prípade, už je aproximácia veľmi slušná, takže ak ho zvolíme ešte väčšie, diskretizačná chyba už bude minimálna.



Obr. 3.2: Diskretizácia uvažovaných oblastí v 2D pre  $a = 4$ , resp.  $a = 5$ .

Aby sme zjednodušili opis použitia jednotlivých okrajových podmienok pri experimentoch, pomeňujme si hrany našich výpočtových oblastí: horná hrana (červená), dolná hrana (zelená) a bočné hrany (modrá).

Pri úlohách v 2D priestore budeme naše aproximačné výsledky porovnávať s presným riešením  $-\log r$ . V grafickom znázornení riešenia budeme mať farebné odlišenie: presné - ružová a približné - bledomodrá.



Obr. 3.3: Grafy 2D presného riešenia: kruhového výseku (vľavo), medzikružia (vpravo).

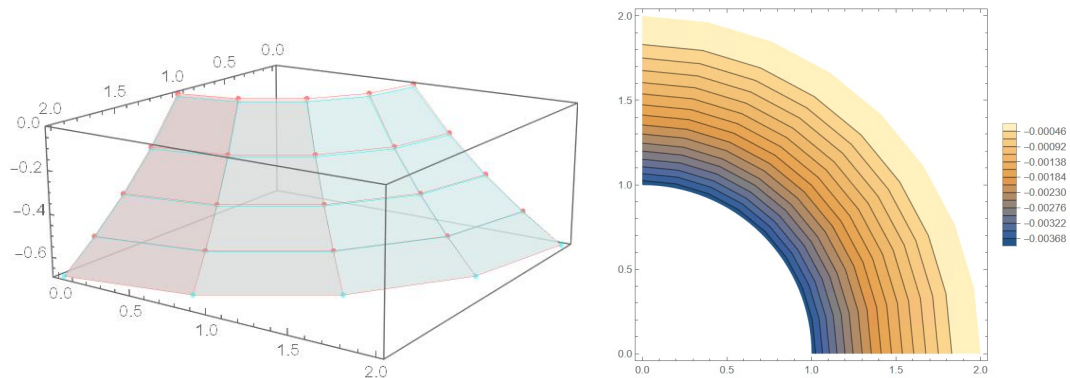
### 3.1.2 Rôzne kombinácie okrajových podmienok

Po diskretizácii sa môžeme pustiť do porovnávania a vyhodnocovania výsledkov rôznych kombinácií okrajových podmienok.

#### Kombinácia Dirichletovej a Neumannovej OP pre kruhový výsek

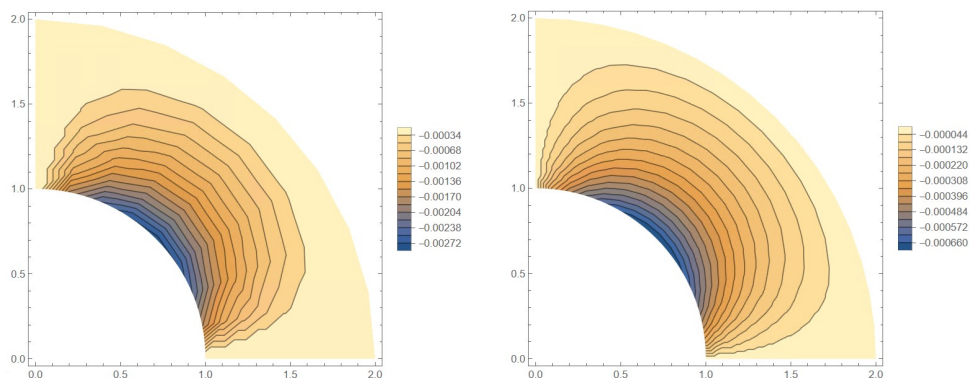
Experiment 3.1.2.: Prvou skúmanou kombináciou bude implementácia Dirichletovej okrajovej podmienky (2.29) s Neumannovou okrajovou podmienkou (2.30). Porovnáme si dva spôsoby aplikovania týchto OP.

Dva spôsoby teda budú: Exp. 3.1.2. a) horná hrana - Dirichlet. OP, dolná hrana - Neumann. OP, Exp. 3.1.2. b) horná hrana a bočné hrany - Dirichlet. OP, dolná hrana - Neumann. OP.



Obr. 3.4: Grafy 2D riešenia pre Exp. 3.1.2. a).

Na Obr. 3.4 máme na ľavom obrázku: porovnanie hodnôt presného a približného riešenia, a na pravom obrázku: vykreslenie chýb približného riešenia v porovnaní s presným riešením. Pri porovnaní hodnôt nie je okom badateľný rozdiel medzi presným a približným riešením, čo je spôsobené tým, že už aj pri nie tak veľmi jemnej sieti je aproximácia celkom presná. Preto je vhodnejšie sa pozrieť na vykreslenie chýb približného riešenia, z ktorého vidíme, že na hornej hrane je chyba riešenia minimálna, ale smerom k dolnej hrane postupne stúpa.



Obr. 3.5: Grafy 2D riešenia pre Exp. 3.1.2. b):  $(2^3)^2$  elementov (vľavo) a  $(2^4)^2$  elementov (vpravo).

Z predošlého experimentu vidíme, že pri takejto kombinácii okrajových podmienok nemá moc význam porovnávať konkrétne hodnoty približného a presného riešenia. Preto sa v Exp. 3.1.2. b) pozrieme iba na porovnanie chýb. Na Obr. 3.5 vidíme porovnanie chýb približného riešenia pri dvoch rôznych zjemneniach diskretizačnej siete. V oboch prípadoch môžeme vidieť, že opäť na hranách s definovanou Dirichletovou OP sú chyby minimálne a smerom k dolnej hrane s definovanou Neumannovou OP

chyby stúpajú. Legenda pri obidvoch grafoch nám potvrdzuje, že zjemňovaním siete sa diskretizačná chyba znižuje. Toto tvrdenie vidíme prehľadnejšie aj v tabuľkách. Tabuľky (3.1) a (3.2) potvrdzujú, že postupným zjemňovaním siete sa znižuje chyba aproximácie oproti presnému riešeniu, a taktiež aj to, že nami zvolené aproximácie sú druhého rádu presnosti. Porovnaním hodnôt chýb z tabuliek vyplýva aj to, že Exp. 3.1.2. b) má približne o polovicu menšiu aproximačnú chybu.

Počet elementov	$L_1(\Omega)$ norma	$EOC_{L_1}$	$L_2(\Omega)$ norma	$EOC_{L_2}$
$4 \times 4$	0.027782	-	0.03705	-
$8 \times 8$	0.0068014	2.0302	0.0086664	2.096
$16 \times 16$	0.0016734	2.023	0.0020723	2.0642
$32 \times 32$	0.00041451	2.0133	0.00050523	2.0362
$64 \times 64$	0.00010312	2.0071	0.00012464	2.0191
$128 \times 128$	0.000025715	2.0036	0.000030949	2.0098
$256 \times 256$	0.0000064205	2.0018	0.0000077107	2.005

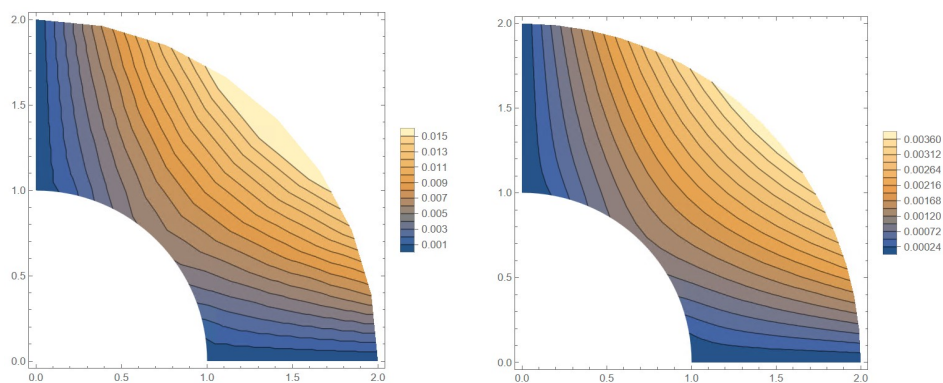
Tabuľka 3.1: Prehľad  $L(\Omega)$  noriem a EOC pre Exp. 3.1.2. a).

Počet elementov	$L_1(\Omega)$ norma	$EOC_{L_1}$	$L_2(\Omega)$ norma	$EOC_{L_2}$
$4 \times 4$	0.0067882	-	0.016516	-
$8 \times 8$	0.0024005	1.4997	0.0042023	1.9746
$16 \times 16$	0.00067586	1.8285	0.0010322	2.0254
$32 \times 32$	0.00017708	1.9323	0.00025466	2.0191
$64 \times 64$	0.00004518	1.9706	0.000063201	2.0106
$128 \times 128$	0.000011402	1.9864	0.000015741	2.0055
$256 \times 256$	0.0000028635	1.9935	0.0000039276	2.0028

Tabuľka 3.2: Prehľad  $L(\Omega)$  noriem a EOC pre Exp. 3.1.2. b).

### Kombinácia Neumannovej OP a aproximácie 2. derivácie pre kruhový výsek

Experiment 3.1.3.: Ako druhú skúmanú kombináciu okrajových podmienok si zvolíme na hornej hrane aproximáciu 2. derivácie (2.31) a na dolnej hrane opäť Neumannovu OP. Na bočných hranách budeme mať zadanú Dirichletovu okrajovú podmienku. Keďže máme zvolené aproximačné koeficienty tak, aby bola naša aproximácia druhého rádu presnosti, budeme také výsledky aj očakávať.



Obr. 3.6: Grafy 2D riešenia pre Exp. 3.1.3.:  $(2^3)^2$  elementov (vľavo) a  $(2^4)^2$  elementov (vpravo).

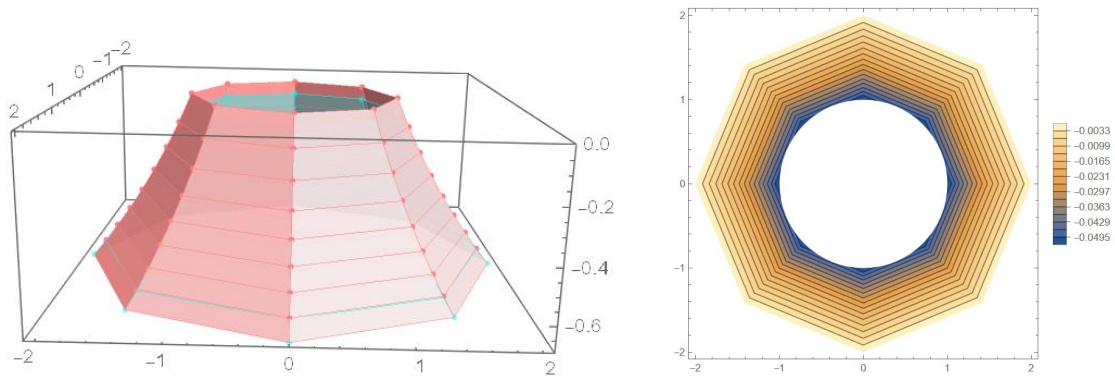
Keď sa pozrieme opäť na porovnanie dvoch rôznych zjemňovaní diskret. siete, viď Obr. 3.6, tak môžeme vidieť, že v tomto prípade je chyba najmenšia na bočných hranách a stúpa od dolnej hrany smerom k hornej hrane so zadanou aproximáciou 2. derivácie. Tabuľkou (3.3) máme potvrdené, že aj táto kombinácia OP je postupným zjemňovaním druhého rádu presnosti. Aproximačná chyba je približne 6-krát väčšia ako pri Exp. 3.1.2. b).

Počet elementov	$L_1(\Omega)$ norma	$EOC_{L_1}$	$L_2(\Omega)$ norma	$EOC_{L_2}$
$4 \times 4$	0.027767	-	0.039169	-
$8 \times 8$	0.0059917	2.2123	0.0076551	2.3552
$16 \times 16$	0.0013985	2.0991	0.0017155	2.1578
$32 \times 32$	0.00033723	2.0521	0.0004062	2.0784
$64 \times 64$	0.000082746	2.027	0.000098813	2.0394
$128 \times 128$	0.00002049	2.0138	0.000024367	2.0198

Tabuľka 3.3: Prehľad  $L(\Omega)$  noriem a EOC pre Exp. 3.1.3.

### Kombinácia Dirichletovej a Neumannovej OP pre medzikružie

Experiment 3.1.4.: Druhou časťou experimentov v 2D je implementácia okrajových podmienok na oblasti medzikružia. Opäť podobne ako v prípade kruhového výseku implementujeme najskôr kombináciu Dirichletovej OP na hornej hrane a Neumannovej OP na dolnej hrane.



Obr. 3.7: Grafy 2D riešenia pre Exp. 3.1.4.

Na Obr. 3.7 nám vykreslenie chýb približného riešenia hovorí, že na hornej hrane je chyba riešenia minimálna, ale smerom k dolnej hrane opäť postupne stúpa. Môžeme to celkom vidieť aj na ľavom obrázku, kde hodnoty presného riešenia na dolnej hrane sú o niečo vyššie ako hodnoty približného riešenia. Tak ako aj v predošlých experimentoch na kruhovom výseku, tak aj na medzikruží sú podľa tabuľky (3.4) naše aproximácie druhého rádu presnosti.

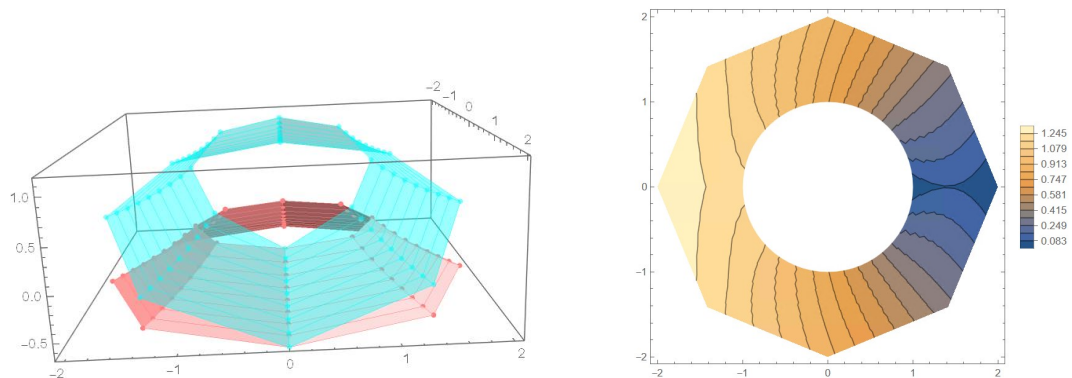
Počet elementov	$L_1(\Omega)$ norma	$EOC_{L_1}$	$L_2(\Omega)$ norma	$EOC_{L_2}$
$4 \times 4$	0.093324	-	0.118	-
$8 \times 8$	0.023897	1.9654	0.02937	2.0063
$16 \times 16$	0.0059851	1.9974	0.0072422	2.0199
$32 \times 32$	0.0014938	2.0023	0.001793	2.0141
$64 \times 64$	0.00037293	2.0021	0.00044574	2.0081
$128 \times 128$	0.00009315	2.0013	0.0001111	2.0043

Tabuľka 3.4: Prehľad  $L(\Omega)$  noriem a EOC pre Exp. 3.1.4.

### Kombinácie Neumannovej OP a aproximácie 2. derivácie pre medzikružie

Experiment 3.1.5.: V tejto časti si porovnáme dve kombinácie Neumannovej OP a aproximácie 2. derivácie. Ako uvidíme neskôr, implementáciou takejto kombinácie okrajových podmienok je naše približné riešenie nepresné, preto je potrebné ho zafixovať v niektorých bodoch, čo dosiahneme tým, že okrajové podmienky doplníme o rôzne kombinácie Dirichletovej OP. Tak ako v predošlých experimentoch s týmito okrajovými podmienkami, na dolnej hrane zadefinujeme Neumannovu OP a na hornej

hrane aproximáciu 2. derivácie. Dirichletove okrajové podmienky zadefinujeme: Exp. 3.1.5. a) v 1 uzlovom bode na hornej hrane a 1 uzl. bode na dolnej hrane, Exp. 3.1.5. b) v 2 uzlových bodoch na hornej hrane a 2 uzl. bodoch na dolnej hrane.

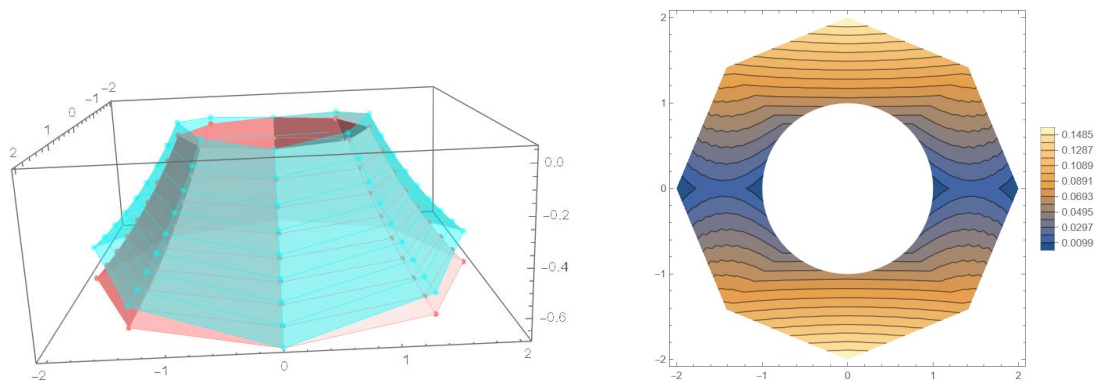


Obr. 3.8: Grafy 2D riešenia pre Exp. 3.1.5. a).

Počet elementov	$L_1(\Omega)$ norma	$EOC_{L_1}$	$L_2(\Omega)$ norma	$EOC_{L_2}$
$4 \times 4$	7.2182	-	8.5269	-
$8 \times 8$	0.73999	3.2861	0.84838	3.3292
$16 \times 16$	0.17474	2.0823	0.1967	2.1087
$32 \times 32$	0.043648	2.0012	0.048698	2.014
$64 \times 64$	0.010913	1.9999	0.012125	2.0059
$128 \times 128$	0.0027211	2.0037	0.0030176	2.0065

Tabuľka 3.5: Prehľad  $L(\Omega)$  noriem a EOC pre Exp. 3.1.5. a).

Z Obr. 3.8 vidíme, že keď zadefinujeme Dirichletovu OP v jednom bode na hornej hrane a v jednom bode na dolnej hrane, tak približné riešenie je naozaj veľmi nepresné. Potvrzuje nám to aj tabuľka (3.5), kde vidíme, že konvergencia k hodnote 2 nie je úplne jasná. Preto sme zvolili zdvojnásobenie uzlových bodov s Dirichletovou podmienkou a približné riešenie je omnoho presnejšie.



Obr. 3.9: Grafy 2D riešenia pre Exp. 3.1.5. b).

Na Obr. 3.9 je aj graficky vidno, že pri Exp. 3.1.5. b) nastalo zmenšenie diskretizačnej chyby. Opodstatnenie zdvojnásobenia uzlových bodov s definovanou Dirichletovou OP nám potvrdzuje aj tabuľka (3.6), keďže naša aproximácia už teraz dosahuje presnosť 2. rádu jednoznačnejšie. Aproximačná chyba Exp. 3.1.5. b) je približne 6-krát menšia ako v prípade Exp. 3.1.5. a).

Počet elementov	$L_1(\Omega)$ norma	$EOC_{L_1}$	$L_2(\Omega)$ norma	$EOC_{L_2}$
$4 \times 4$	0.10243	-	0.16159	-
$8 \times 8$	0.06298	0.70171	0.075511	1.0976
$16 \times 16$	0.021338	1.5615	0.024472	1.6256
$32 \times 32$	0.006048	1.8189	0.0067915	1.8493
$64 \times 64$	0.0015946	1.9232	0.001772	1.9384
$128 \times 128$	0.00040762	1.9679	0.00045054	1.9756

Tabuľka 3.6: Prehľad  $L(\Omega)$  noriem a EOC pre Exp. 3.1.5. b).

## 3.2 Teoretické experimenty v 3D

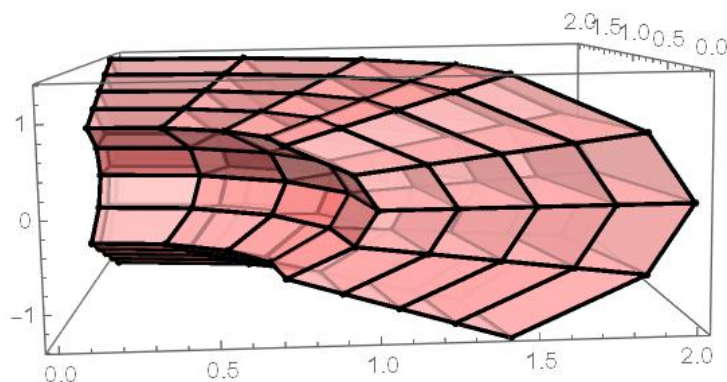
Po experimentoch v 2D priestore sa presunieme do 3D priestoru, kde budeme uvažovať o vyššie spomínanom tesseroide, definovanom na ploche  $[0, \frac{\pi}{2}] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \times [1, 2]$ . Naše aproximácie v 3D priestore budeme porovnávať s presným riešením, ktorého tvar bude  $\frac{1}{r}$ . Zmenia sa nám tým pádom aj okrajové podmienky:

$$\text{Dirichletova okrajová podmienka} \quad T(x) = \frac{1}{r}, \quad (3.2)$$

$$\text{Neumannova okrajová podmienka} \quad \frac{\partial T(x)}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}, \quad (3.3)$$

$$\text{aproximácia 2. derivácie} \quad \frac{\partial^2 T(x)}{\partial r^2} = \frac{2}{r^3}. \quad (3.4)$$

Diskretizácia oblasti v 3D priestore je obdobná tej v 2D, len nám pribudne jeden smer diskretizácie, a teda celkový počet elementov bude tentokrát  $(2^a)^3$ .



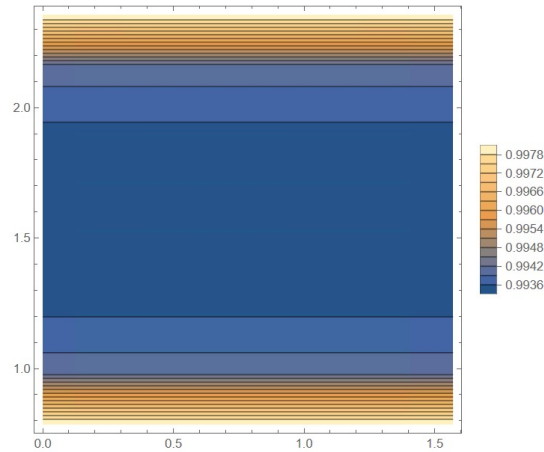
Obr. 3.10: Diskretizácia uvažovanej oblasti v 3D.

### 3.2.1 Rôzne kombinácie okrajových podmienok

V 3D priestore sa opäť pozrieme na výsledky rôznych kombinácií okrajových podmienok, ale teraz nás pri grafickom znázornení bude zaujímať predovšetkým dolná plocha tesseroidu a nebudeme na nej pozorovať chyby približného riešenia v porovnaní s presným riešením, ale konkrétne hodnoty približného riešenia.

#### Kombinácia Dirichletovej a Neumannovej OP pre tesseroid

Experiment 3.2.1.: Prvým našim skúmaným experimentom v 3D priestore bude implementácia Dirichletovej OP (3.2) na hornú plochu a Neumannovej OP (3.3) na dolnú plochu tesseroidu.



Obr. 3.11: Graf 2D riešenia dolnej plochy pre Exp. 3.2.1.

Na Obr. 3.11 vidno, že hodnoty približného riešenia na dolnej hrane sa správajú tak, že symetricky z obidvoch strán postupne klesajú, a teda vytvárajú vypuknutie strednej časti dolnej hrany. Ale hodnoty sa od seba líšia minimálne, takže môžeme zhodnotiť, že vypuknutie je veľmi jemné.

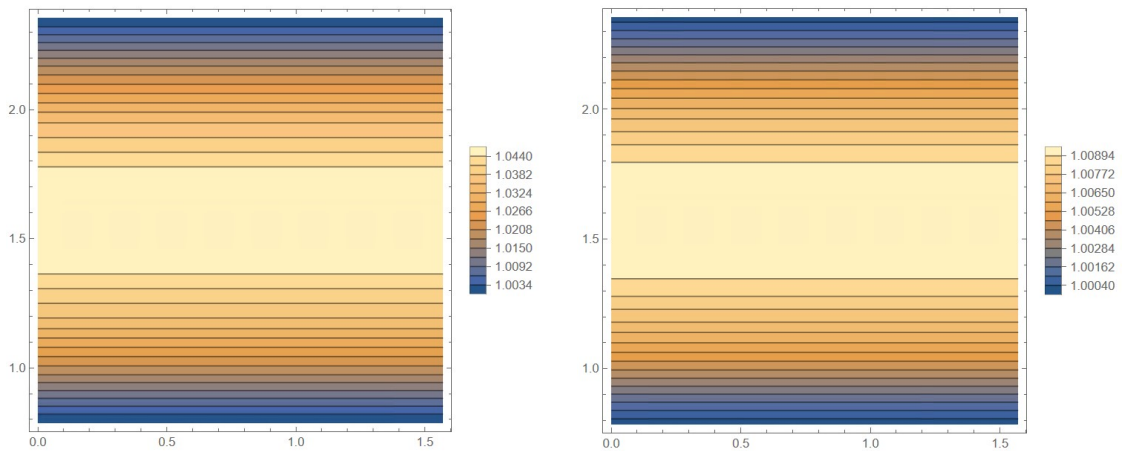
Počet elementov	$L_1(\Omega)$ norma	$EOC_{L_1}$	$L_2(\Omega)$ norma	$EOC_{L_2}$
$4 \times 4 \times 4$	0.036437	-	0.050506	-
$8 \times 8 \times 8$	0.0087661	2.0554	0.011846	2.0921
$16 \times 16 \times 16$	0.0021565	2.0232	0.0028423	2.0593
$32 \times 32 \times 32$	0.00053584	2.0088	0.00069292	2.0363
$64 \times 64 \times 64$	0.0001338	2.0017	0.0001707	2.0212

Tabuľka 3.7: Prehľad  $L(\Omega)$  noriem a EOC pre Exp. 3.2.1.

Tabuľka (3.7) hovorí, že opäť aj aproximácia z Exp. 3.2.1. je druhého rádu presnosti.

### Kombinácia Neumannovej OP a aproximácie 2. derivácie pre tesseract

Experiment 3.2.2.: Posledným experimentom v 3D priestore sa pozrieme na implementáciu kombinácie Neumannovej OP na dolnej ploche a aproximácie 2. derivácie (3.4) na hornej ploche tesseractu.



Obr. 3.12: Grafy 2D riešenia pre Exp. 3.2.2.:  $(2^3)^3$  elementov (vľavo) a  $(2^4)^3$  elementov (vpravo).

Na Obr. 3.12 máme porovnanie rôznych zjemňovaní diskretizačnej siete. V obidvoch prípadoch vidno úplný opak Exp. 3.2.1., pretože pri Exp. 3.2.2. nám hodnoty približného riešenia symetricky

stúpajú smerom do stredu dolnej plochy tesseractu. Ale vypuknutie strednej časti dolnej plochy je opäť jemné a grafické znázornenia nám potvrdzujú aj to, že pri zjemňovaní diskret. siete sa diskretizačná chyba znižuje.

V tabuľke (3.8) vidíme podobne ako aj na Obr. 3.12 zjemňovaním siete postupné znižovanie diskretizačnej chyby, a taktiež tendenciu EOC konvergovať k hodnote 2, ale pre potvrdenie by to chcelo ešte ďalšie pozorovania pre jemnejšiu diskretizačnú sieť. Z hodnôt noriem ale vidíme, že aproximačná chyba klesá ako má, tak nie je dôvod na väčšie pochybnosti a môžeme uznať, že aj táto naša aproximácia je 2. rádu presnosti.

Počet elementov	$L_1(\Omega)$ norma	$EOC_{L_1}$	$L_2(\Omega)$ norma	$EOC_{L_2}$
$4 \times 4 \times 4$	0.24855	-	0.33427	-
$8 \times 8 \times 8$	0.039776	2.6436	0.048361	2.7891
$16 \times 16 \times 16$	0.0088831	2.1628	0.010363	2.2224
$32 \times 32 \times 32$	0.0021172	2.0689	0.0024248	2.0955

Tabuľka 3.8: Prehľad  $L(\Omega)$  noriem a EOC pre Exp. 3.2.2.



# Záver

V práci sme vykonali niekoľko experimentov na porovnanie  $L_1, L_2$  noriem a experimentálneho rádu konvergencie. Vo všetkých experimentoch prevedených v 2D priestore na kruhovom výseku sa nám potvrdilo, že postupným zjemňovaním siete sa chyba aproximácie znižuje a zároveň, že všetky naše aproximácie dosahujú 2. rád presnosti. Keď si porovnáme grafické, či numerické výsledky experimentov 3.1.2 a výsledky experimentu 3.1.3, vidíme, že implementácia aproximácie 2. derivácie dosahuje presnejšie výsledky až pri jemnejšej sieti. Experimenty na oblasti medzikružia v 2D nám ukazujú, že pri zložitejších oblastiach to s implementáciou aproximácie 2. derivácie nie je tak jednoduché. Na experimentoch 3.1.5 vidíme, že je potrebné zvoliť aj vhodne dopĺňujúce Dirichletove OP, aby sme dosiahli lepšie výsledky približného riešenia. Keby sme v našom prípade ešte zdvojnásobili počet uzlových bodov s definovanou Dirichletovou OP, výsledky by boli ešte presnejšie. Pri 3D experimentoch sa nám potvrdzujú tvrdenia z 2D priestoru. Zjemňovaním siete nám chyby klesajú a EOC konverguje k hodnote 2. Žiaľ, môžeme vidieť už aj obmedzenia, pretože počet pozorovaní v tabuľkách sa oproti 2D zmenšil, pričom v 2D by sme mohli ešte ďalšie pozorovania pridať, v 3D to už možné v softvéri Wolfram Mathematica nebolo.

Z vyššie uvedeného teda vidíme, že riešiť náš geodetický problém v softvéri Wolfram Mathematica sa dalo iba do určitej miery. Zvyšovaním počtu uzlových bodov spôsobeného vytváraním 3D objektov a následným zjemňovaním diskretizačnej siete sa nám zväčšovala sústava rovníc, a teda aj náročnosť výpočtov. To znamená aj to, že čím náročnejší výpočet, tým väčší výpočtový čas. Tento problém sa nám do určitej miery podarilo optimalizovať. Zo začiatku sme v programe využívali `For[.]` cykly a na tvorbu matíc sme používali funkciu `Table[.]`, ale keď sme zmenili cykly, a aj napĺňanie matíc pomocou cyklu `Do[.]`, tak sa výpočtový čas zmenšil o polovicu. Ďalší problém, na ktorý sme narazili je taký, že hoci všetky matice v našich výpočtoch sú pomerne riedke, Wolfram Mathematica si ich neukladá do pamäte ako riedke, ale ukladá aj všetky nuly v maticiach, čo pri väčšom zjemňovaní siete v 3D experimentoch aj nás obmedzovalo. Možno by stálo za to, vyskúšať aplikovať do nášho programu funkciu `SparseArray[.]`, ktorá vytvára riedke matice a ukladá si iba nenulové hodnoty.

Tým, že sme experimenty vykonávali iba na teoretickej báze, pokračovaním vo výskume by určite mal byť prechod na experimenty s reálnymi dátami generovanými zo satelitov, ktoré by sa potom porovnávali. Keďže sme ale vyššie spomínali obmedzenia, na ktoré sme narazili pri implementácii riešenia v softvéri Wolfram Mathematica, bolo by vhodné experimenty s reálnymi dátami previesť do iného programovacieho jazyka, napr.: C, C++. Ďalšou časťou pokračovania výskumu by mohlo taktiež byť použitie okrajových podmienok vyššieho rádu ako rádu 2.

Napriek tomu, že naše experimenty boli iba teoretické, tak už len z nich vieme zhodnotiť, že implementácia okrajových podmienok 2. rádu do geodetickej úlohy, v ktorej počítame poruchový potenciál, je vhodná a má zmysel pokračovať v skúmaní tohto problému do väčšej hĺbky.

# Literatúra

1. CODATA. *Fundamental Physical Constants* [[https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg|search\\_for=gravitation](https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg|search_for=gravitation)]. 2018.
2. ČUNDERLÍK, R.; MACÁK, M.; MEDL'A, M.; MIKULA, K.; MINARECHOVÁ, Z. Numerical Methods for Solving the Oblique Derivative Boundary Value Problems in Geodesy. In: 2020, s. 575–622. ISBN 978-3-662-55853-9. Dostupné z DOI: 10.1007/978-3-662-55854-6\_105.
3. HANDLOVIČOVÁ, A.; TIBENSKÝ, M. *Základy funkcionálnej analýzy a variačného počtu*. Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2016.
4. HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. *Physical geodesy*. Springer Science & Business Media, 2006.
5. KOUTROMANOS, I. *Fundamentals of finite element analysis: linear finite element analysis*. John Wiley & Sons, 2018.
6. LOGAN, D. L. *A first course in the finite element method*. Cengage Learning, 2016.
7. MACÁK, M. *Numerical Methods in Geodesy, Dizertačná práca*. Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2015.
8. MINARECHOVÁ, Z.; MACÁK, M.; ČUNDERLIÚK, R.; MIKULA, K. On the finite element method for solving the oblique derivative boundary value problems and its application in local gravity field modelling. *Journal of Geodesy*. 2021, roč. 95, č. 6, s. 1–19.
9. OÑATE, E. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 1: Basis and Solids*. Springer Science & Business Media, 2009.
10. PEPPER, D. W.; KASSAB, A. J.; DIVO, E. A. *An introduction to finite element, boundary element, and meshless methods with applications to heat transfer and fluid flow*. American Society Of Mechanical Engineers, 2014.
11. POZRIKIDIS, C. Finite and spectral element methods using Matlab. *University of California San Diego, USA*. 2005.
12. REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. *The finite element method in heat transfer and fluid dynamics*. CRC press, 2010.
13. SCHWARZOVÁ, P. *Metóda nekonečných prvkov ako nástroj riešenia geodetickej okrajovej úlohy, Diplomová práca*. Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2021.
14. TAYLOR, C. R. *Finite Difference Coefficients Calculator* [<https://web.media.mit.edu/~crtaylor/calculator.html>]. 2016.
15. TIRUPATHI R, C.; ASHOK D, B. et al. *Introduction to finite elements in engineering*. 2016.