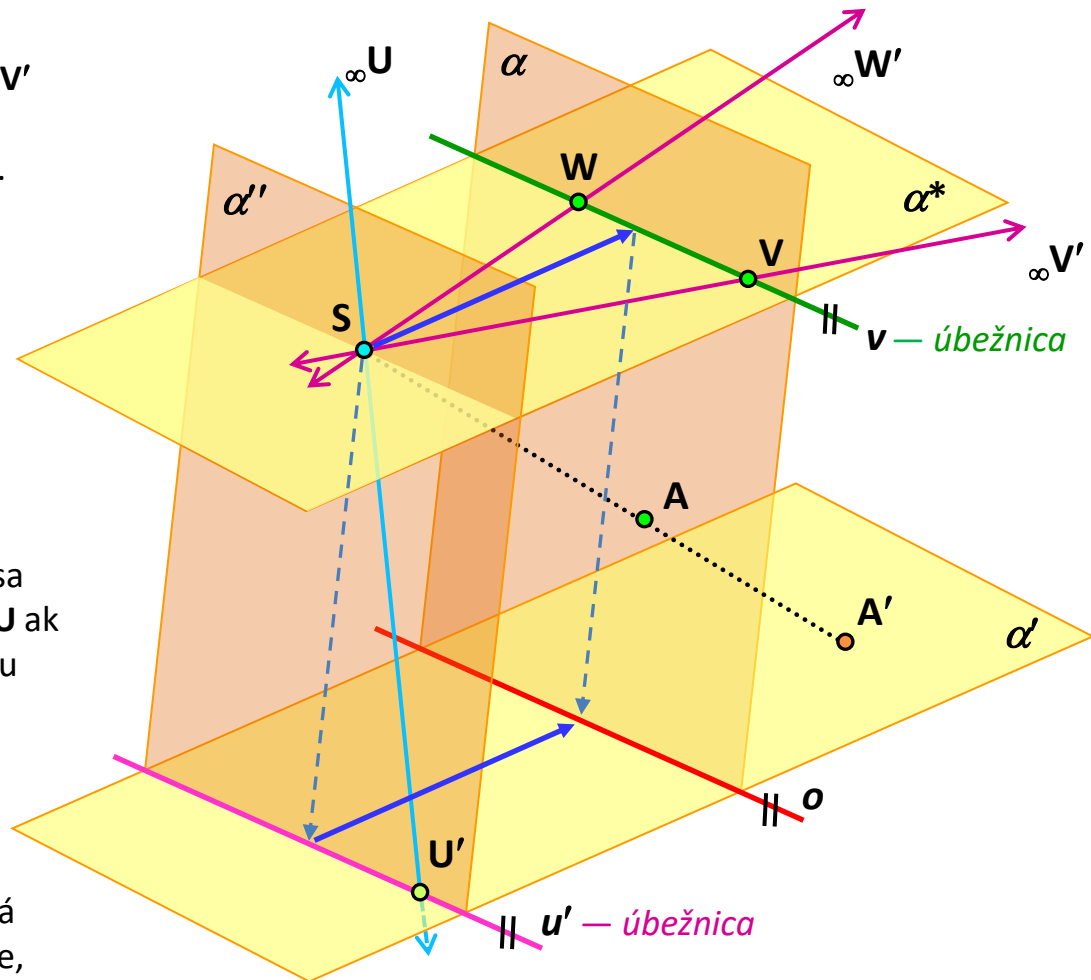


5.3 Využitie úbežnice v kolineácii

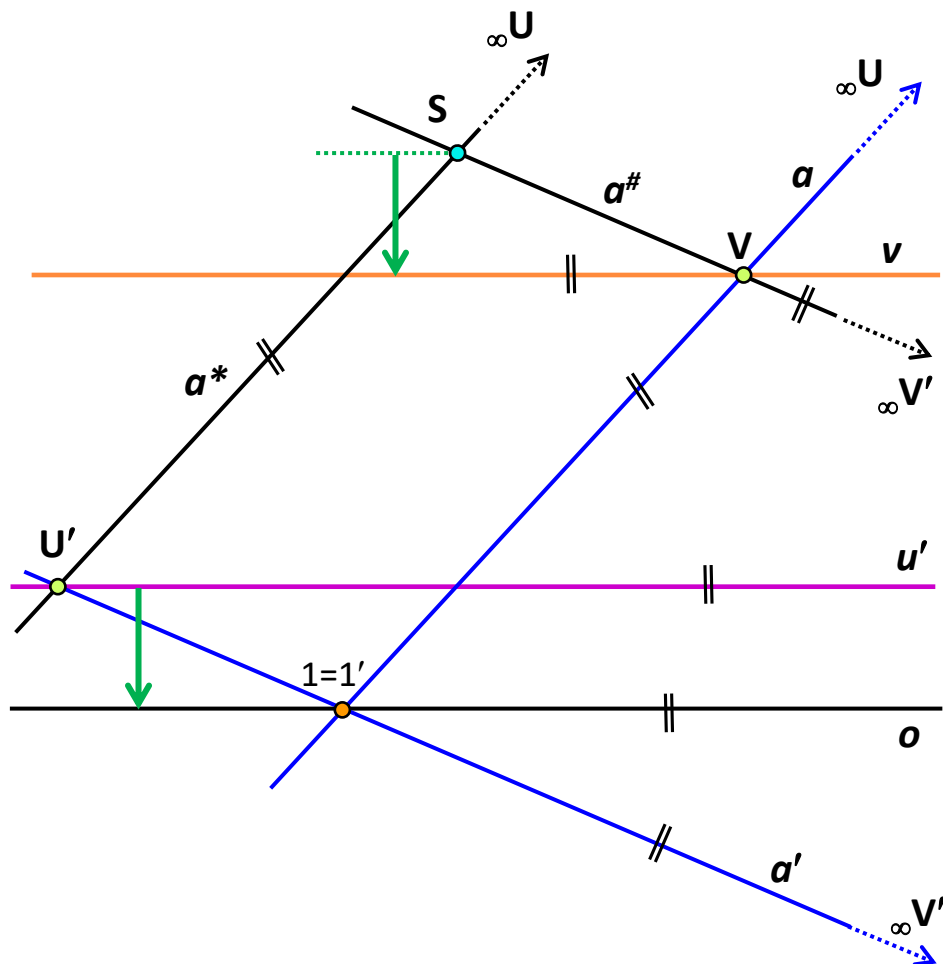
Perspektívna kolineácia medzi dvomi rovinami – úbežník a úbežnica

V rozšírenom euklidovskom priestore ∞E^3 zobrazujeme v perspektívnej kolineácii aj nevlastné body a priamky. V súvislosti s tým zavedieme nové pojmy ako **úbežník** a **úbežnica**.

- Obrazom vlastného bodu A je vlastný bod A' ak $AS \parallel \alpha'$, $A \rightarrow A'$.
- Obrazom vlastného bodu V je nevlastný bod $\infty V'$ ak $VS \parallel \alpha'$, $V \rightarrow \infty V'$.
Analogicky pre bod W , ak $WS \parallel \alpha'$, $W \rightarrow \infty W'$.
- Bod, ktorý sa zobrazí do nevlastného bodu, nazývame **úbežník** (body V a W sú úbežníky).
- Body roviny α , ktoré sa zobrazia do nevlastných bodov, ležia na priamke v . Je to priamka, ktorá sa zobrazí do nevlastnej priamky a nazývame ju **úbežnica**:
 $v = \alpha^* \cap \alpha$, $S \in \alpha^*$, $\alpha^* \parallel \alpha'$.
- V inverznom zobrazení roviny α' na rovinu α sa vlastný bod U' zobrazí do nevlastného bodu ∞U ak $US \parallel \alpha$, $U' \rightarrow \infty U$. V tomto prípade je úbežnicou priamka u' : $u' = \alpha' \cap \alpha'$, $S \in \alpha'$, $\alpha' \parallel \alpha$.
- Obe úbežnice sú rovnobežné s osou o kolineácie, pričom platí:
Orientovaná vzdialenosť stredu S kolineácie od jednej úbežnice je taká istá ako orientovaná vzdialenosť druhej úbežnice od osi o kolineácie,
 $|Sv| = |u'o|$ a zároveň $|Su'| = |vo|$.



Príklad 5.7: Daná je PK (S, o, a, a') . Zostrojte úbežnice u' a v kolineácie.



Poznámka: Pri presnom rysovaní platí, že orientovaná vzdialenosť stredu S kolineácie od jednej úbežnice je taká istá ako orientovaná vzdialenosť druhej úbežnice od osi o kolineácie. Preto je možné vynechať kroky 5 a 6 postupu a druhú úbežnicu narysovať hneď po zostrojení prvej úbežnice.

Úbežnica kolineácie je priamka, na ktorej ležia obrazy (v inverznom zobrazení vzory) nevlastných bodov. Preto stačí zostrojiť obraz nevlastného bodu ∞U priamky a a vzor nevlastného bodu $\infty V'$ priamky a' a zostrojiť nimi priamky rovnobežné s osou kolineácie (pozri strana 2).

Postup:

1. $1'$; $a \cap a' = 1 = 1'$.
2. a^* ; $a^* = S_{\infty U}$, $a^* \parallel a$.
3. U' ; $\infty U \rightarrow U'$, $a^* \cap a' = U'$.

Bodom U' zostrojíme úbežnicu u' :

4. u' ; $U' \in u'$, $u' \parallel o$.

Podobne zostrojíme vzor V nevlastného bodu $\infty V'$ priamky a' :

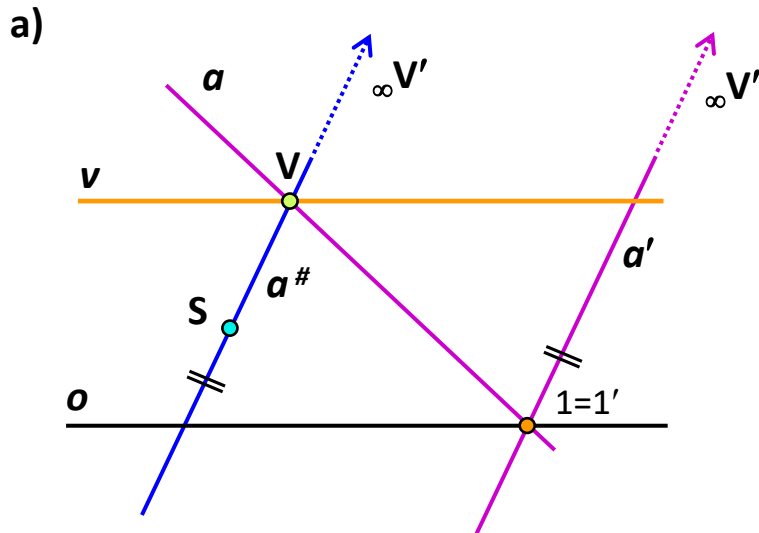
5. $a^\#$; $a^\# = S_{\infty V'}$, $a^\# \parallel a'$.
6. V ; $\infty V' \rightarrow V$, $a^\# \cap a = V$.

Bodom V zostrojíme úbežnicu v :

7. v ; $V \in v$, $v \parallel o$.

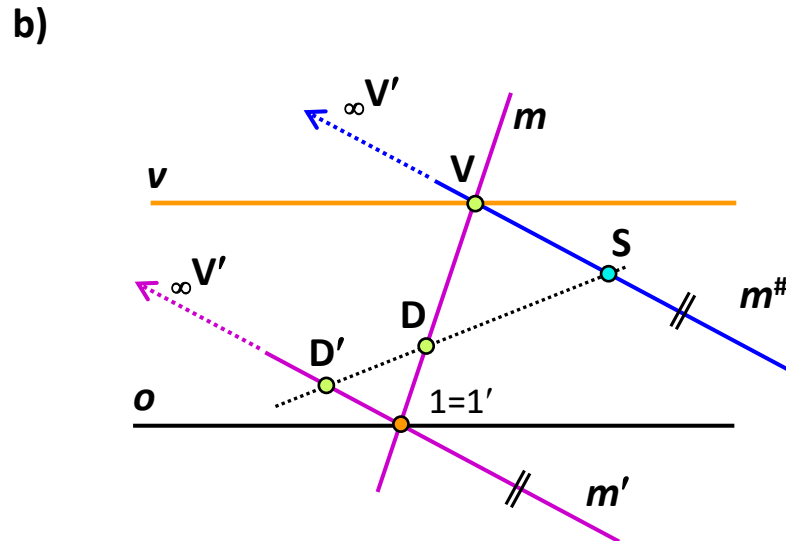
Príklad 5.8: V perspektívnej kolineácii **PK** (**S**, **o**, **v**) zostrojte

- obraz priamky **a**,
- obraz bodu **D**.



Postup:

- $1'$; $a \cap o = 1 = 1'$.
- V ; $V = a \cap v$.
- $a^\#$; $a^\# = SV$, $V \rightarrow \infty V'$,
 $\infty V'$ - nevlastný bod priamky $a^\#$.
- a' ; $a' = 1' \infty V'$, t. j. $a' \parallel a^\#$.



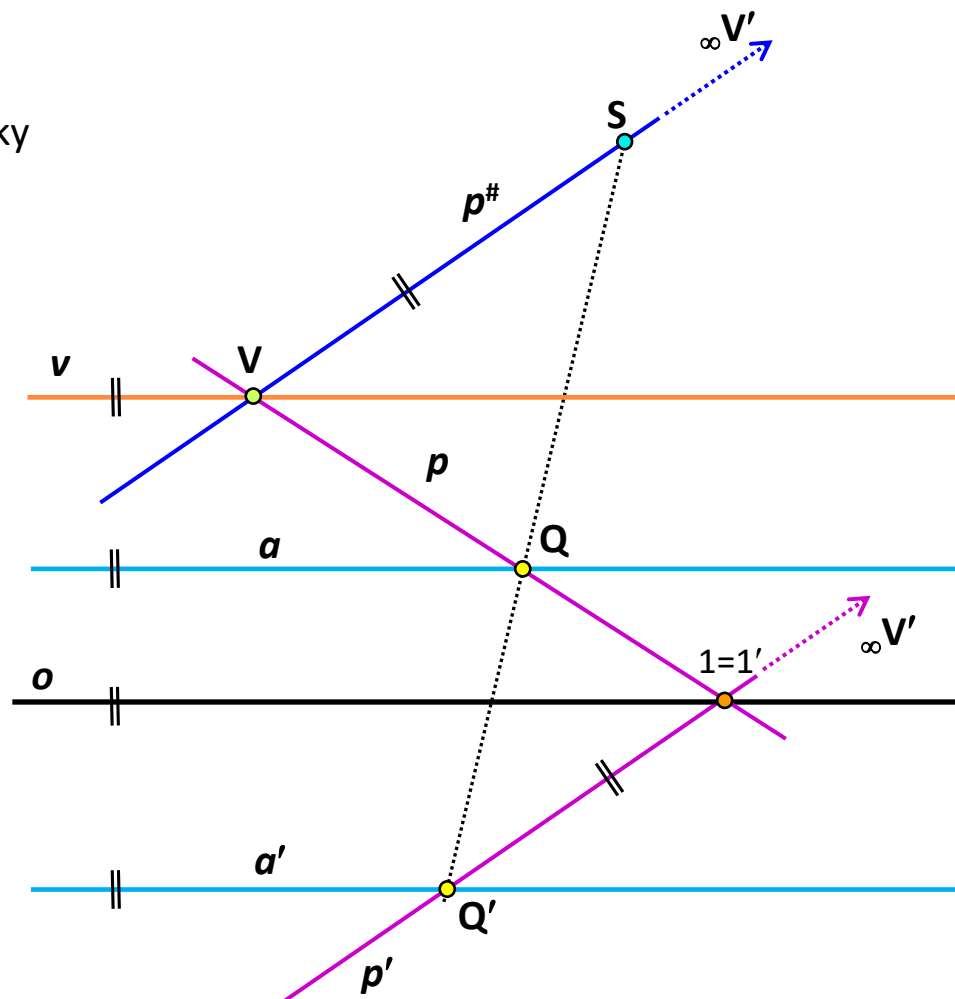
Postup:

- m ; $D \in m$, m - ľubovoľná, $m \nparallel o$.
- Obraz m' priamky m zostrojíme analogicky ako obraz priamky a v prípade a):
 m' ; $m \rightarrow m'$.
- D' ; $D' = m' \cap SD$.

Príklad 5.9: V perspektívnej kolineácii $PK(S, o, v)$ zostrojte obraz priamky a , $a \parallel o$.

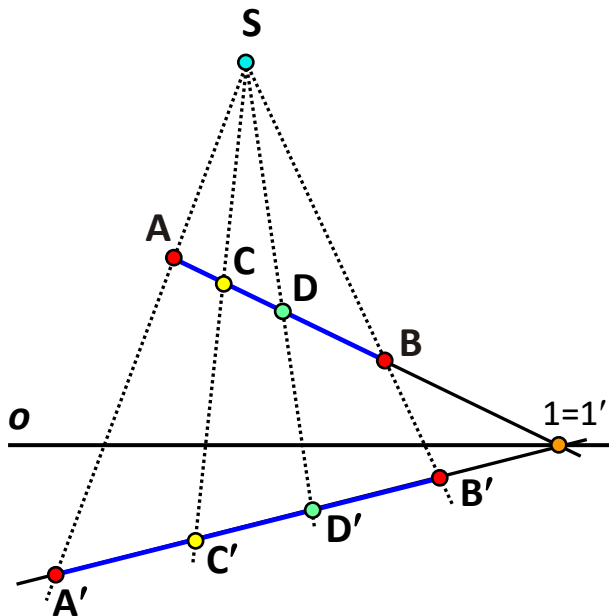
Postup:

1. p ; p – ľubovoľná, $p \nparallel o$.
2. Obraz p' priamky p zostrojíme analogicky ako obraz priamky a v príklade 5.8:
 p' ; $p \rightarrow p'$.
3. Q ; $Q = p \cap a$.
4. Q' ; $Q' = p' \cap SQ$.
5. a' ; $Q' \in a'$, $a' \parallel o$.



Príklad 5.10: Daná je PK (S, o, A, A'). Zostrojte obraz úsečky AB .

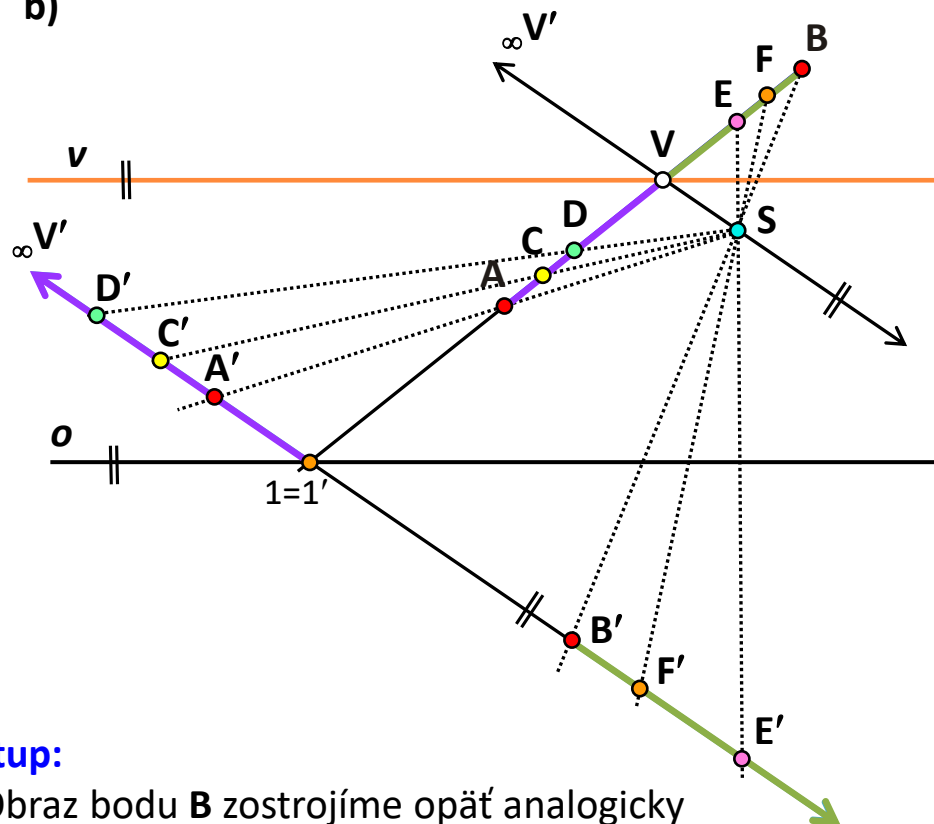
a)



Postup:

1. Obráz bodu **B** zostrojíme analogicky ako v Príklade 5.2:
 $B'; B \rightarrow B'$.
2. Obrázom úsečky **AB** je úsečka **A'B'**.
Všetky body úsečky **AB** sa zobrazia do bodov úsečky **A'B'**, napr. body **C** a **D**.

b)

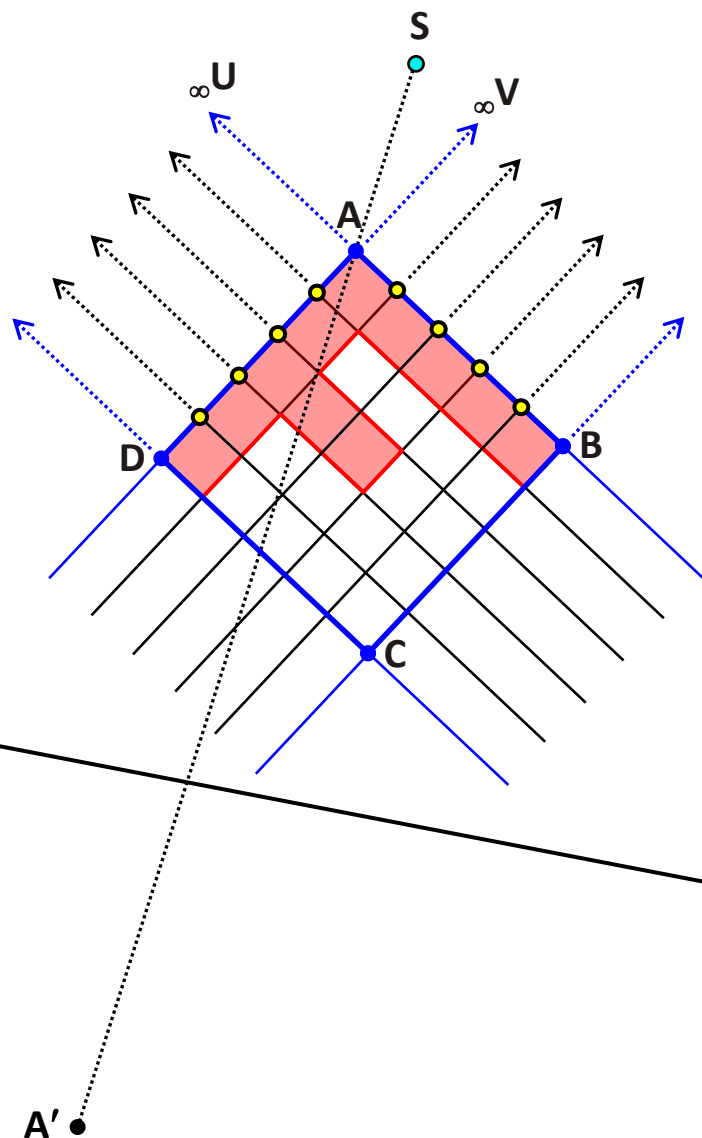


Postup:

1. Obráz bodu **B** zostrojíme opäť analogicky ako v Príklade 5.2: $B'; B \rightarrow B'$.
2. Obrázom úsečky **AB** sú dve polpriamky s krajnými bodmi **A'** a **B'**. Vzorom nevlastného bodu $\infty V'$ priamky **A'B'** je bod **V** ležiaci medzi bodmi **A** a **B**. Bod **V** rozdeľuje úsečku **AB** na dve úsečky: úsečka **AV** sa zobrazí do polpriamky $A'_{\infty V'}$ a úsečka **VB** do polpriamky $B'_{\infty V'}$.

Poznámka: Bod **V** je spoločný bod úsečky **AB** a úbežnice **v** danej kolineácie.

Príklad 5.11: Daná je PK (S, o, A, A'). Zostrojte obraz útvaru vpísaného pomocou štvorcovej siete do štvorca $ABCD$.



Strany štvorca rozdelíme na 5 zhodných častí a zostrojíme štvorcovú sieť, do ktorej vpíšeme útvar v tvare písmena F.

Štvorcová sieť obsahuje dve sústavy rovnobežných priamok (vrátane príslušnej dvojice priamok, na ktorých ležia protíahlé strany štvorca). V rozšírenom priestore ∞E^3 majú tieto sústavy priamok spoločné nevlastné body ∞U a ∞V . Ich obrazy sú úbežníky U' a V' , ktoré využijeme pri riešení úlohy.

Príklad 5.11: Daná je PK (S, o, A, A'). Zostrojte obraz útvaru vpísaného pomocou štvorcovej siete do štvorca $ABCD$.

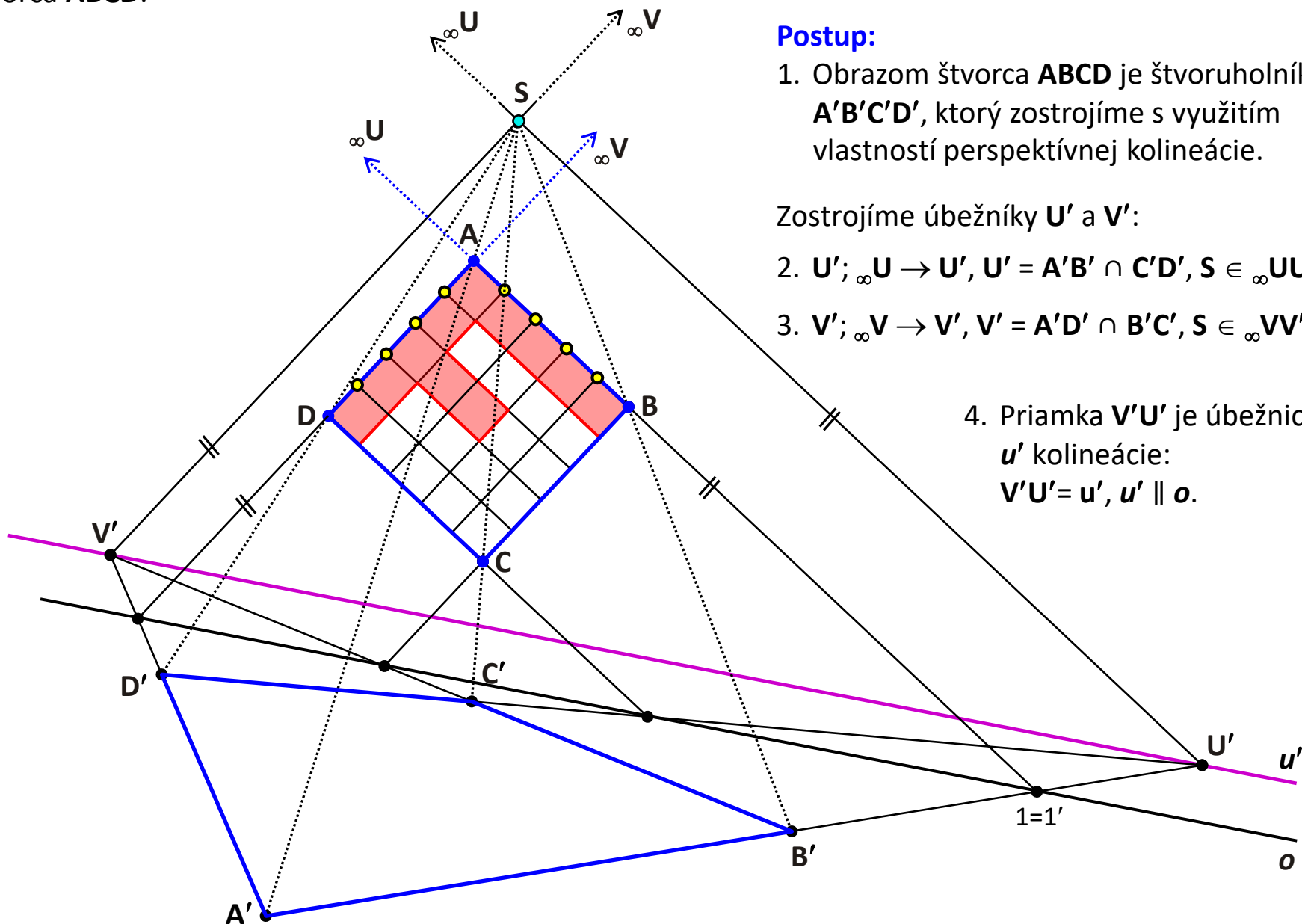
Postup:

1. Obrazom štvorca $ABCD$ je štvoruholník $A'B'C'D'$, ktorý zostrojíme s využitím vlastností perspektívnej kolineácie.

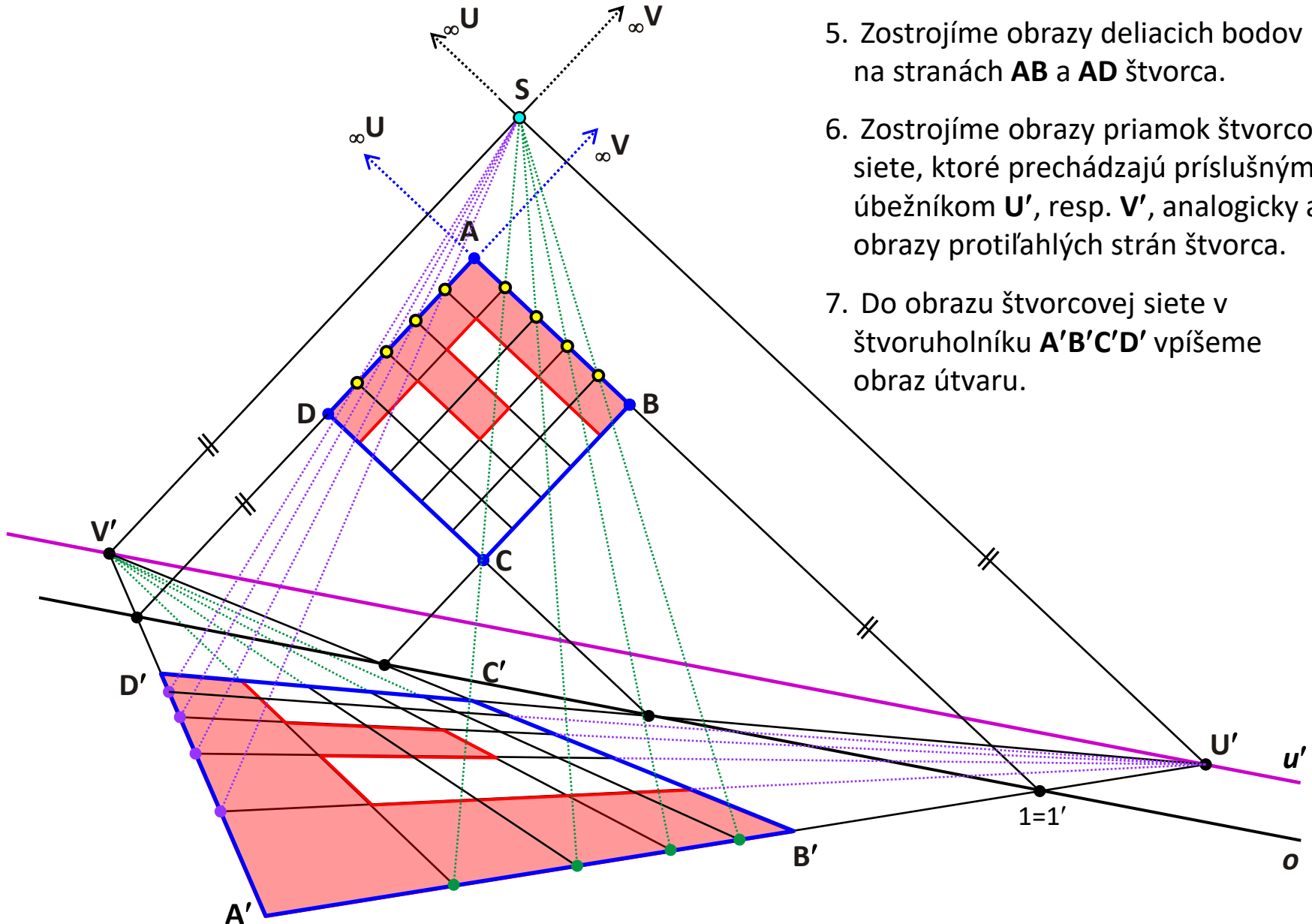
Zostrojíme úbežníky U' a V' :

2. U' ; ${}_{\infty}U \rightarrow U'$, $U' = A'B' \cap C'D'$, $S \in {}_{\infty}UU'$.
3. V' ; ${}_{\infty}V \rightarrow V'$, $V' = A'D' \cap B'C'$, $S \in {}_{\infty}VV'$.

4. Priamka $V'U'$ je úbežnica u' kolineácie:
 $V'U' = u'$, $u' \parallel o$.



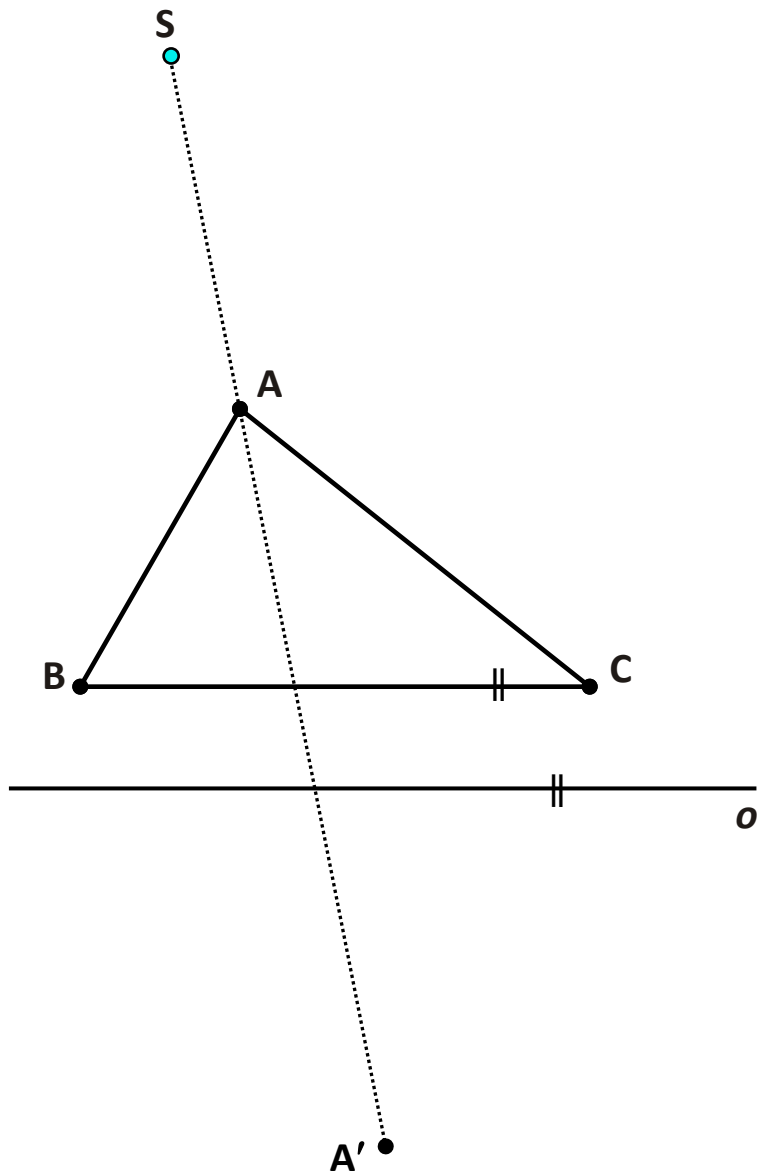
Príklad 5.11: Daná je PK (S , o , A , A'). Zostrojte obraz útvaru vpísaného pomocou štvorcovej siete do štvorca $ABCD$.



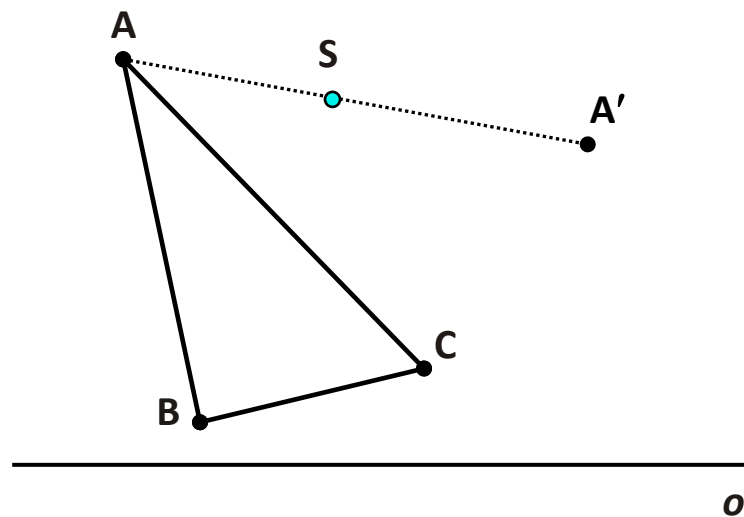
5. Zostrojíme obrazy deliacich bodov na stranách **AB** a **AD** štvorca.
6. Zostrojíme obrazy priamok štvorcovej siete, ktoré prechádzajú príslušným úbežníkom **U'**, resp. **V'**, analogicky ako obrazy protiľahlých strán štvorca.
7. Do obrazu štvorcovej siete v štvoruholníku **A'B'C'D'** vpíšeme obraz útvaru.

Príklad 5.12: Daná je PK (S, o, A, A'). Zostrojte obraz trojuholníka ABC .

a)



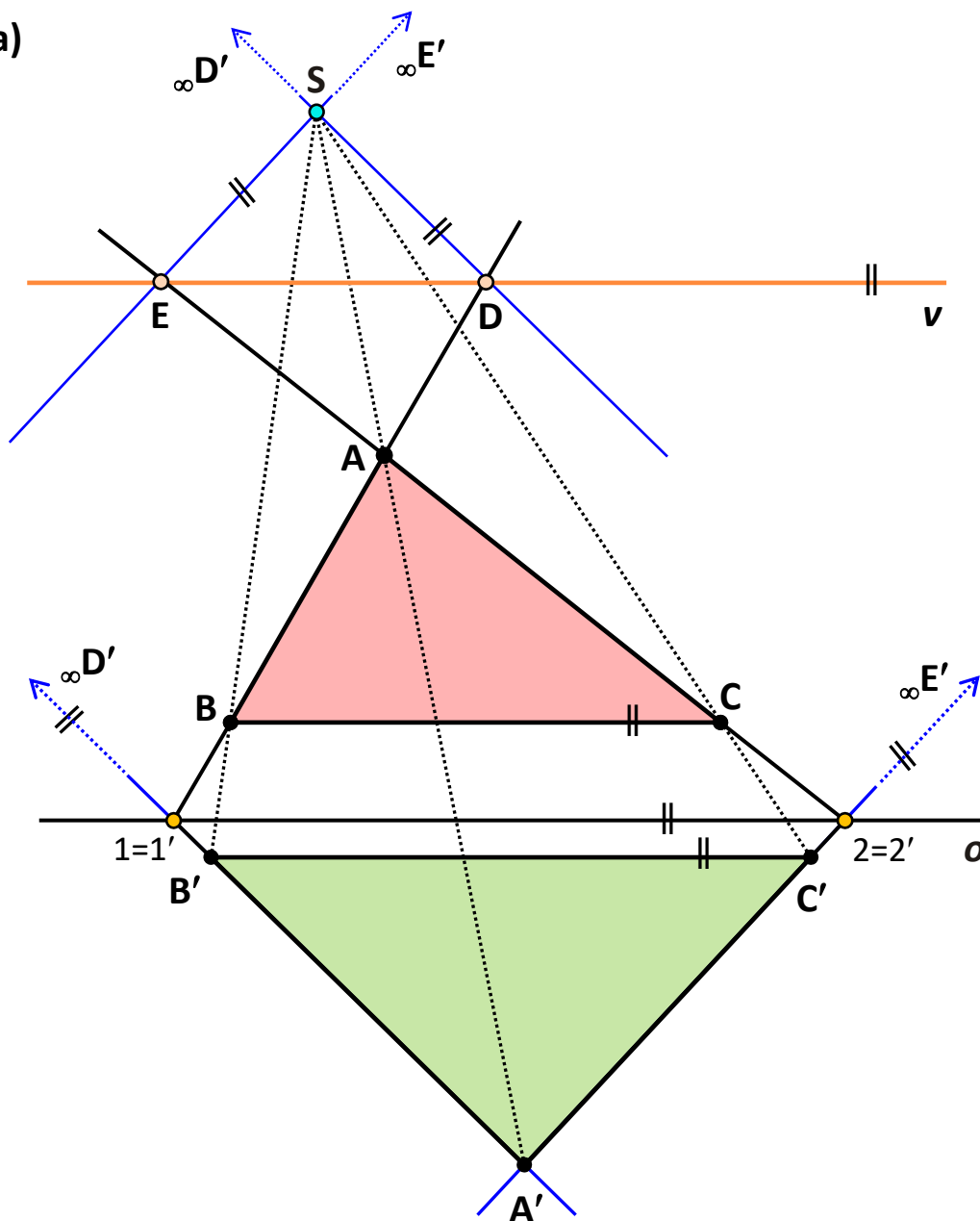
b)



Podklad na rysovanie
vhodný na tlač.

Príklad 5.12: Daná je PK (S, o, A, A'). Zostrojte obraz trojuholníka ABC .

a)



Postup:

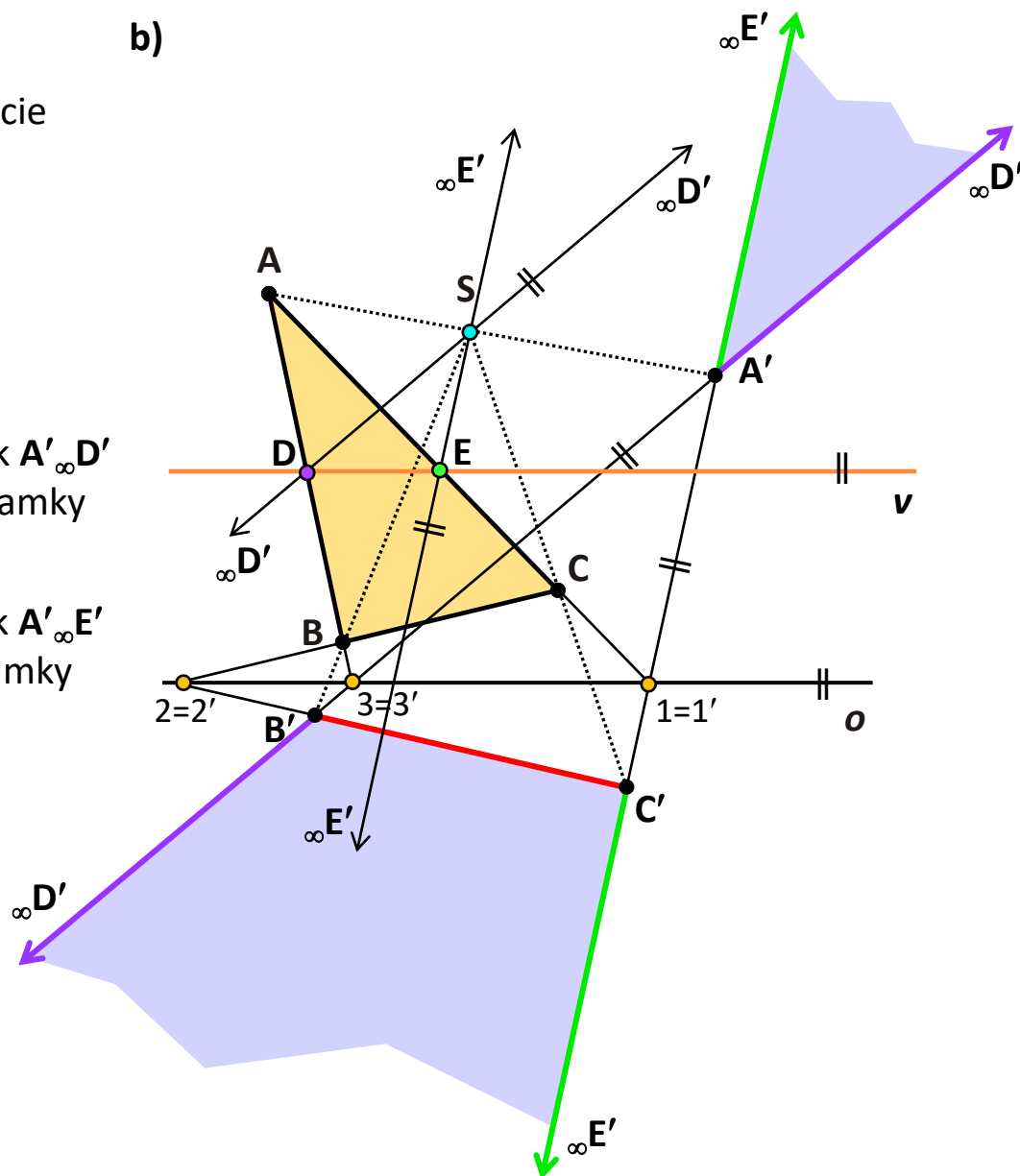
1. Obraz trojuholníka ABC zostrojíme s využitím vlastností perspektívnej kolineácie, identicky ako v Príklade 5.4. Je to trojuholník $A'B'C'$.
2. Označme $\infty D'$ a $\infty E'$ nevlastné body priamok $A'B'$ a $A'C'$.
3. Zostrojíme body D a E , ktoré sú ich vzormi a ležia na priamkach BA a CA .
4. Priamka ED je úbežnica v kolineácie: $ED = v, v \parallel o$.

Poznámka: Strany AB , BC a AC trojuholníka ABC nemajú spoločné body s úbežnicou v kolineácie. Úsečky AB , BC a AC sa zobrazia do úsečiek $A'B'$, $B'C'$ a $A'C'$. Obrazom trojuholníka je teda opäť trojuholník.

Príklad 5.12: Daná je PK (S, o, A, A'). Zostrojte obraz trojuholníka ABC .

Postup:

1. S využitím vlastností perspektívnej kolineácie zostrojíme obrazy B', C' bodov B, C trojuholníka: $B \rightarrow B', C \rightarrow C'$.
2. Úsečka BC sa zobrazí do úsečky $B'C'$.
Pri zobrazení úsečiek AB a AC postupujeme analogicky ako v Príklade 5.10, časť b):
3. Úsečka AB sa zobrazí do dvoch polpriamok $A'_{\infty}D'$ a $B'_{\infty}D'$. Vzorom nevlastného bodu $_{\infty}D'$ priamky $A'B'$ je bod D ležiaci medzi bodmi A a B .
4. Úsečka AC sa zobrazí do dvoch polpriamok $A'_{\infty}E'$ a $C'_{\infty}E'$. Vzorom nevlastného bodu $_{\infty}E'$ priamky $A'C'$ je bod E ležiaci medzi bodmi A a C .
5. Priamka ED je úbežnica v kolineácie:
 $ED = v, v \parallel o$.
6. Obraz trojuholníka ABC sa v kolineácii rozpadne na dve časti, ktoré sú spojené nevlastnou úsečkou $_{\infty}D'_{\infty}E'$ na nevlastnej priamke roviny.



Obráz kužeľosečky v perspektívnej kolineácii

V perspektívnej kolineácii v rovine π s úbežnicou v sa regulárna kužeľosečka k zobrazí do regulárnej kužeľosečky k' .

Typ kužeľosečky však kolineácia nezachováva, kužeľosečka k' je:

- elipsa, ak $k \cap v = 0$ bodov,
- parabola, ak $k \cap v = 1$ bod,
- hyperbola, ak $k \cap v = 2$ rôzne body.

Obráz kružnice k v PK (S, o, v)

$k \cap v = 0$ bodov $\rightarrow k'$ je **elipsa**

$k \cap v = T$ $\rightarrow k'$ je **parabola**

$k \cap v = \{U, V\}$ $\rightarrow k'$ je **hyperbola**

