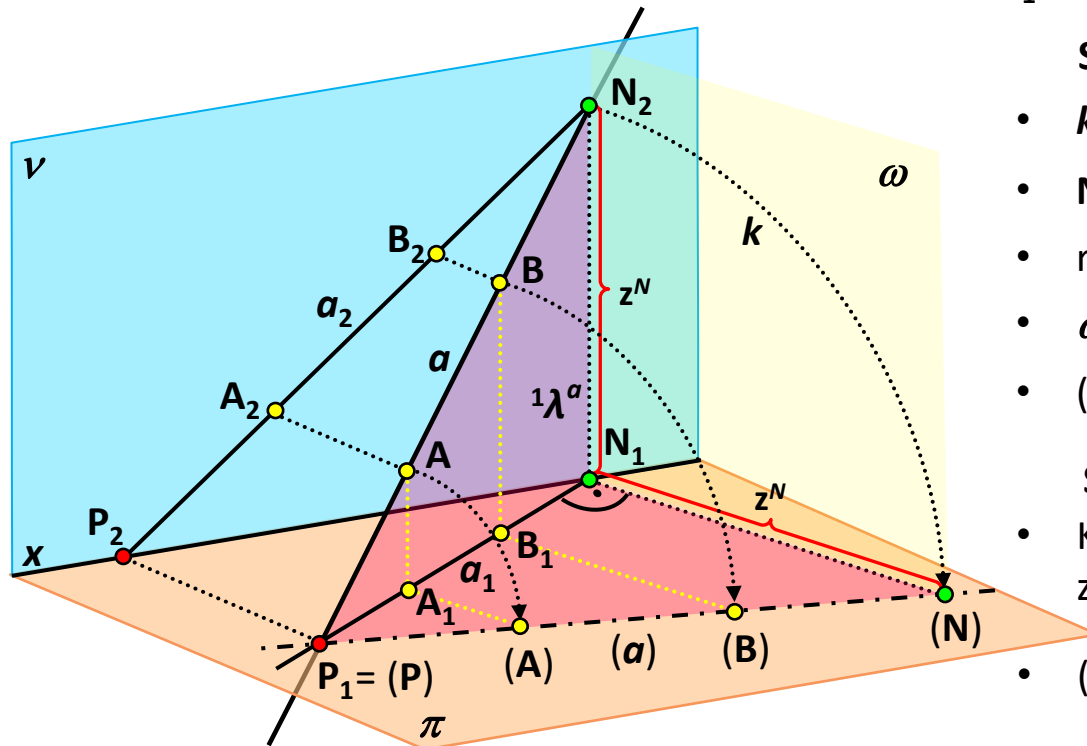


10.4 Metrické úlohy v Mongeovej projekcii

Sklápanie premietacej roviny priamky

V Mongeovej projekcii (podobne ako v kótovanom premietaní) riešime niektoré typy úloh pre priamku vo všeobecnej polohe pomocou **sklápania premietacej roviny priamky do priemetne**. Je možné takto určiť dĺžku úsečky na priamke, či uhol, ktorý zvierajú priamka s priemetňou.

Sklápanie 1. premietacej roviny ${}^1\lambda^a$ priamky a do priemetne π



Sklopenie je špeciálny prípad otočenia, kedy je **uhol otočenia 90°** . Sklopenú polohu priamky získame sklopením dvoch jej rôznych bodov. Sklopené polohy bodov označujeme zátvorkami napr. **(F)**. Útvary v sklopenej polohe budeme vyznačovať bodkočiarkovanou čiarou.

- ${}^1\lambda^a$ – 1. premietacia rovina priamky a , ${}^1\lambda^a \perp \pi$,
- a_1 – os otáčania roviny ${}^1\lambda^a$,

Sklápanie bodu N

- k – kružnica otáčania bodu N , $k(N_1, r = |z^N|)$,
- N_1 – stred otáčania bodu N ,
- $r = |z^N|$ – polomer otáčania bodu N ,
- ω – rovina otáčania bodu N , $k \subset \omega$, $\omega \perp a_1$,
- (N) – sklopená poloha bodu N .

Sklápanie bodu P

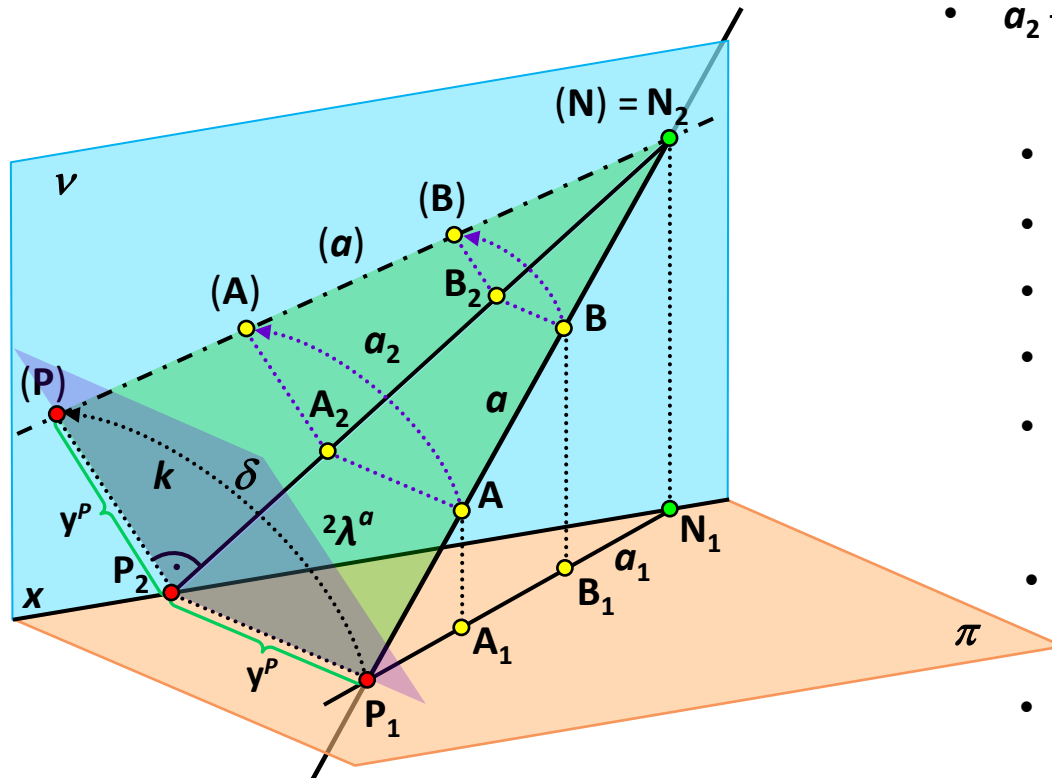
- Keďže bod P leží v priemetni π ($z^P = 0$), zostáva pri sklápaní na mieste: $P_1 = (P)$.
- $(a) = (P)(N)$ – sklopená poloha priamky a .

Poznámka: Bod A priamky a sa pri sklápaní otáča po kružnici, ktorej polomer je z -ová súradnica bodu A a stred leží v pôdoryse A_1 , analogicky pre bod B .

Sklápanie premietacej roviny priamky

Analogickým spôsobom určíme sklápanie 2. premietacej roviny priamky do nárysne, pričom osou otáčania je nárys danej priamky a polomery otáčania jednotlivých bodov priamky sú ich y -ové súradnice.

Sklápanie 2. premietacej roviny ${}^2\lambda^a$ priamky a do priemetne ν



- ${}^2\lambda^a$ – 2. premietacia rovina priamky a , ${}^2\lambda^a \perp \nu$,
- a_2 – os otáčania roviny ${}^2\lambda^a$,

Sklápanie bodu P

- k – kružnica otáčania bodu P , $k(P_2, r = |y^P|)$,
- P_2 – stred otáčania bodu P ,
- $r = |y^P|$ – polomer otáčania bodu P ,
- δ – rovina otáčania bodu P , $k \subset \delta$, $\delta \perp a_2$,
- (P) – sklopená poloha bodu P .

Sklápanie bodu N

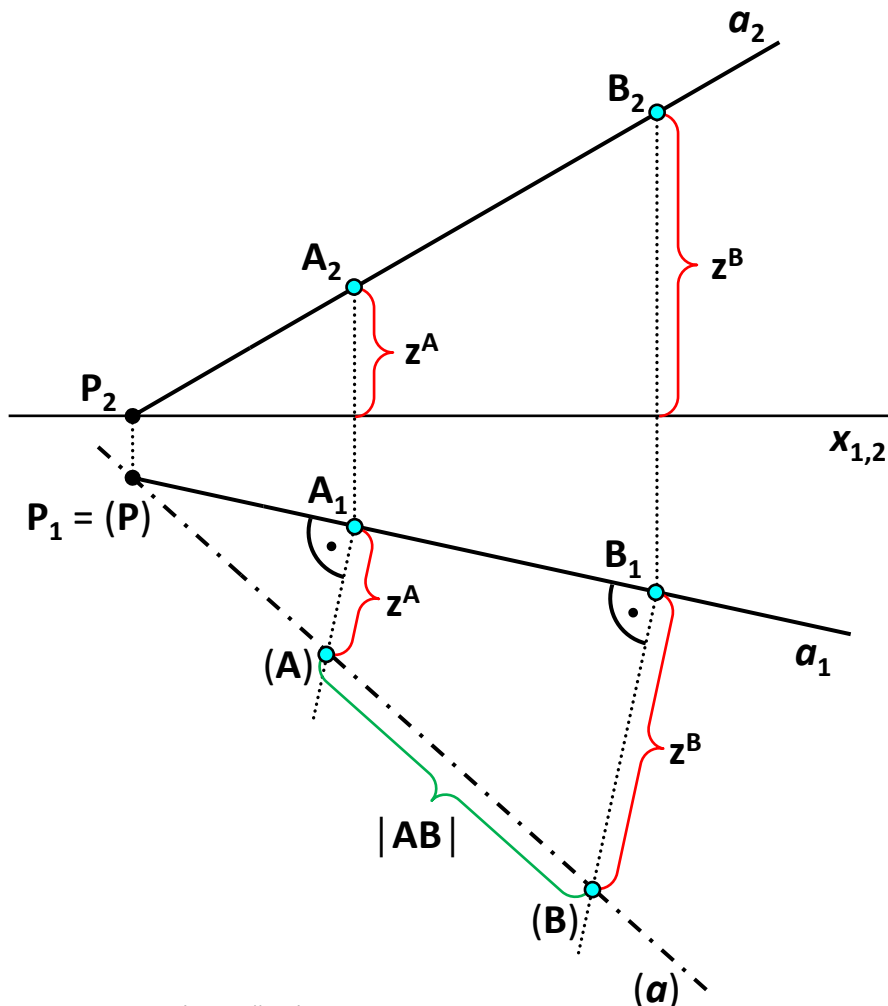
- Keďže bod N leží v priemetni ν ($y^N = 0$), zostáva pri sklápaní na mieste: $N_2 = (N)$.
- $(a) = (P)(N)$ – sklopená poloha priamky a .

Poznámka: Bod A priamky a sa pri sklápaní do nárysne otáča po kružnici, ktorej polomer je y -ová súradnica bodu A a stred leží v náryse A_2 , analogicky pre bod B .

Určenie dĺžky úsečky

V nasledujúcom príklade využijeme sklápanie premietacej roviny na **určenie dĺžky úsečky**, ktorá je vzhľadom na priemetne **vo všeobecnej polohe**. Ukážeme niekoľko možností riešenia.

Príklad 10.18: V Mongeovej projekcii určte dĺžku úsečky **AB** na priamke **a**.



1. možnost:

Úlohu vyriešime **sklopením 1. premietacej roviny** priamky a do pôdorysne.

Postup:

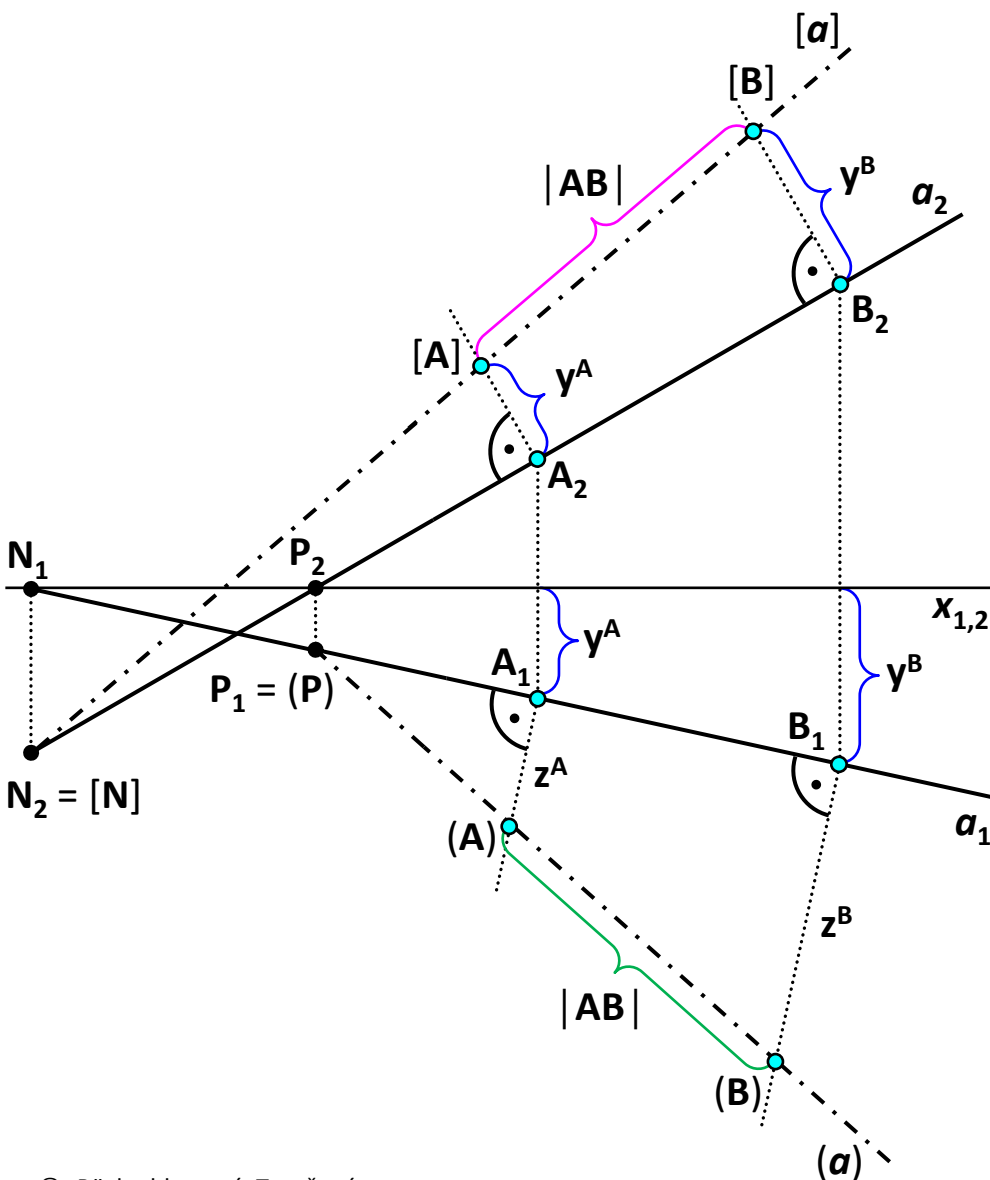
1. Bodom A_1 vedieme kolmicu na pôdorys a_1 priamky a . Na túto kolmicu nanesieme **z-ovú** súradnicu z^A bodu **A**. Získame sklopenú polohu (**A**) bodu **A**.
2. Analogicky zostrojíme sklopenú polohu (**B**) bodu **B**.
3. Spojením bodov (**A**) a (**B**) získame sklopenú polohu (a) priamky a . Úsečka (**A**)(**B**) určuje veľkosť úsečky **AB**.

Poznámka: Body (**A**) a (**B**) ležia v tej istej polrovine vzhľadom na $\mathbf{a}_1$, lebo $\mathbf{z}^A$ a $\mathbf{z}^B$ majú rovnaké znamienko.

Poznámka: V bode, kde priamka $\mathbf{a}_1$ pretína priamku $(\mathbf{a})$, leží pôdorysný stopník priamky $\mathbf{a}$. Jeho pôdorys $\mathbf{P}_1$ a sklopená poloha $(\mathbf{P})$ sú totožné.

Určenie dĺžky úsečky

Príklad 10.18: V Mongeovej projekcii určte dĺžku úsečky **AB** na priamke **a**.



2. možnosť:

Úlohu vyriešime **sklopením 2. premietacej roviny** priamky **a** do nárysne.

Poznámka: Keďže v obrázku budú znázornené dve sklápania do rôznych priemetní, rozlíšime ich použitím iného typu zátvoriek.

Postup:

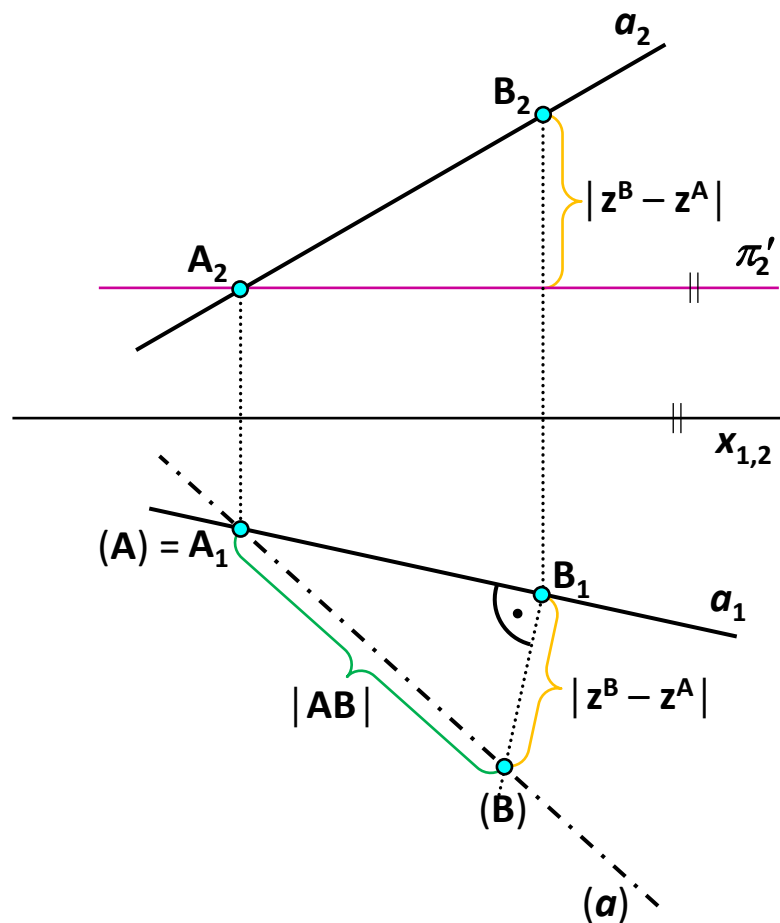
1. Analogicky ako v predchádzajúcom postupe zostrojíme sklopené polohy $[A]$, $[B]$ bodov **A**, **B** do nárysne s využitím ich y -ových súradníc.
2. Spojením bodov $[A]$ a $[B]$ získame sklopenú polohu $[a]$ priamky **a** do nárysne. Úsečka $[A][B]$ určuje veľkosť úsečky **AB**.

Poznámka: Body $[A]$ a $[B]$ opäť ležia v tej istej polrovine vzhľadom na a_2 , lebo y^A a y^B majú rovnaké znamienko.

Poznámka: V bode, kde priamka a_2 pretína priamku $[a]$, leží nárysný stopník priamky **a**. Jeho nárys N_2 a sklopená poloha $[N]$ sú totožné.

Určenie dĺžky úsečky

Príklad 10.18: V Mongeovej projekcii určte dĺžku úsečky **AB** na priamke **a**.



3. možnosť:

Úlohu vyriešime **sklopením 1. premietacej roviny** priamky **a** do **úrovne bodu A**.

Postup:

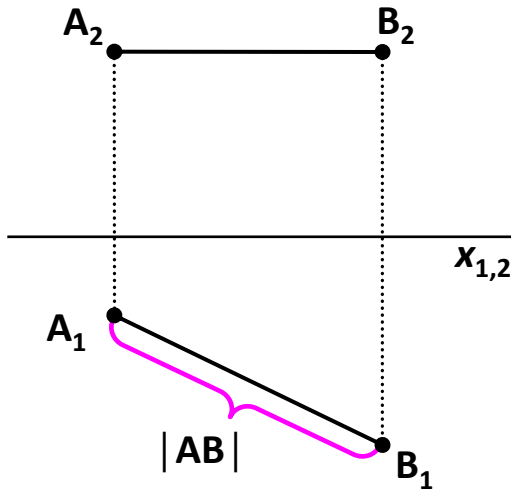
1. Bodom **A** vedieme rovinu π' (úroveň), rovnobežnú s pôdorysňou π , ktorej nárysom je priamka π'_2 .
2. Sklápanie do úrovne bodu **A** znamená, že sklápame do roviny π' . Sklopená poloha **(A)** bodu **A** je teda totožná s priemetom A_1 . Bod **B** sklopíme o rozdiel **z**-ových súradníc bodov **B** a **A**.
3. Spojením bodov **(A)** a **(B)** získame sklopenú polohu **(a)** priamky **a**. Úsečka **(A)(B)** určuje veľkosť úsečky **AB**.

Určenie dĺžky úsečky – špeciálne prípady

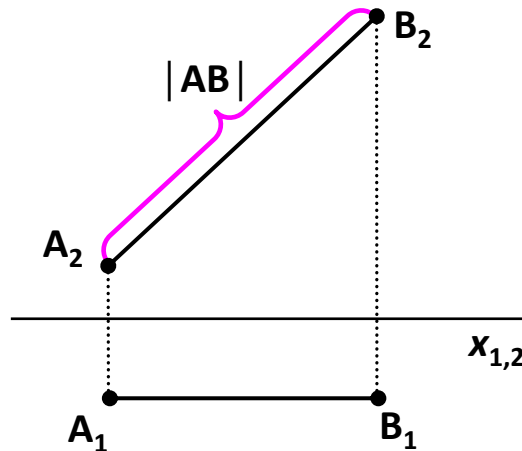
V špeciálnych prípadoch, keď je úsečka kolmá na niektorú priemetňu alebo je s ňou rovnobežná či rovnobežná s osou x , vieme určiť dĺžku úsečky priamo z jej príslušného priemetu bez využitia sklápania premietacej roviny.

Príklad 10.19: V Mongeovej projekcii určte dĺžku úsečky AB .

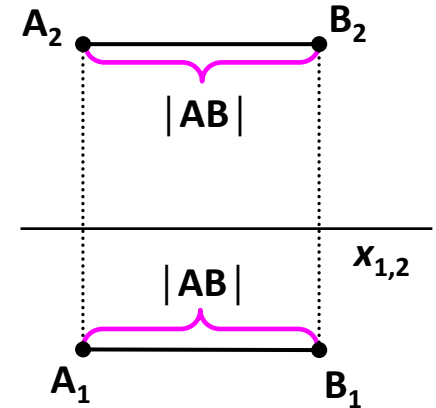
a) $AB \parallel \pi \rightarrow |AB| = |A_1B_1|$



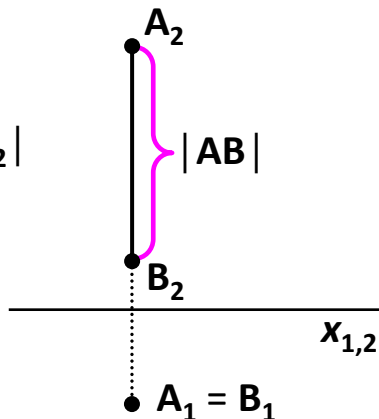
b) $AB \parallel \nu \rightarrow |AB| = |A_2B_2|$



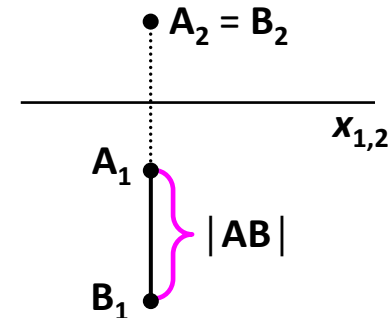
c) $AB \parallel x \rightarrow |AB| = |A_1B_1|$
 $\rightarrow |AB| = |A_2B_2|$



d) $AB \perp \pi \rightarrow |AB| = |A_2B_2|$



e) $AB \perp \nu \rightarrow |AB| = |A_1B_1|$



Odchýlka priamky od priemetne

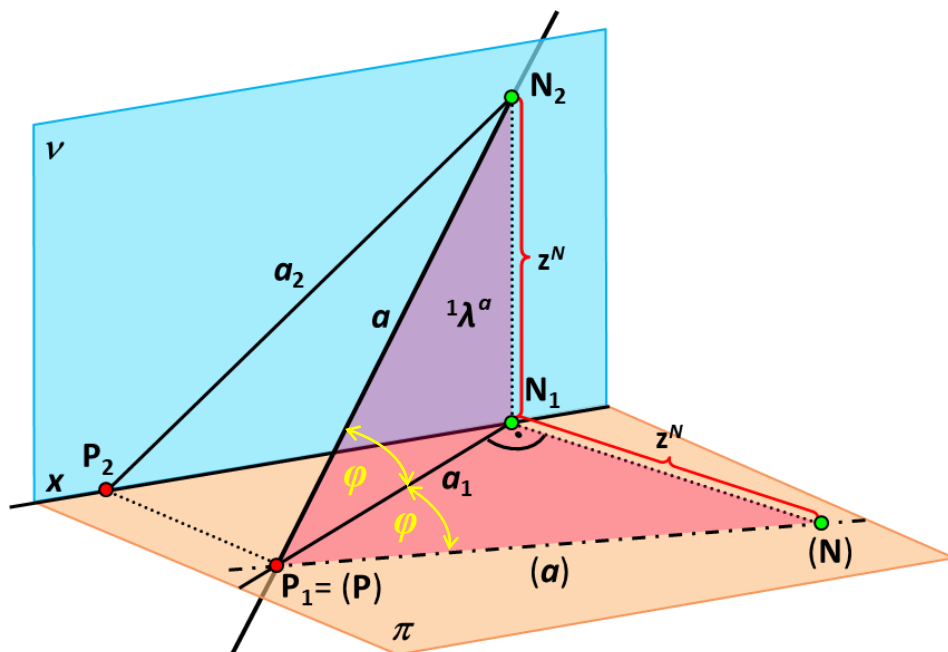
Pomocou sklopenia premietacej roviny priamky zisťujeme tiež **odchýlku priamky od priemetne**.

- je to **uhol priamky a priemetne**,
- t. j. je to **uhol, ktorý zvierá priamka a jej kolmý priemet do tejto priemetne**.

Vzhľadom na dve priemetne rozlišujeme **odchýlku priamky od pôdorysne** a **odchýlku priamky od nárysne**.

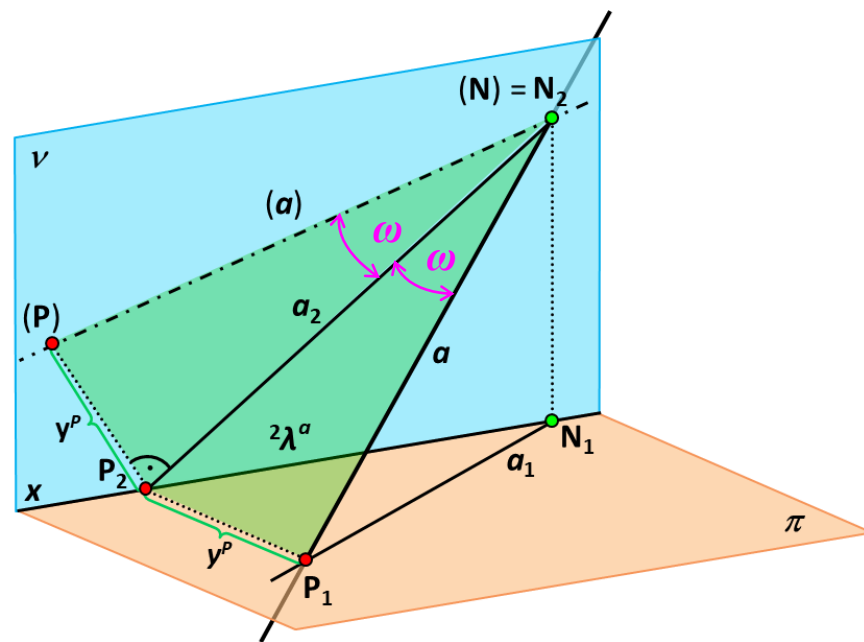
Odchýlka priamky a od pôdorysne π

$$\varphi = \angle(a, \pi) = \angle(a, a_1) = \angle((a), a_1)$$



Odchýlka priamky a od nárysne ν

$$\omega = \angle(a, \nu) = \angle(a, a_2) = \angle((a), a_2)$$



Príklad 10.20: V Mongeovej projekcii určte odchýlku priamky $a = AB$ od pôdorysne a nárysne.

Odchýlka φ priamky a od pôdorysne π : $\varphi = \angle(a, \pi)$

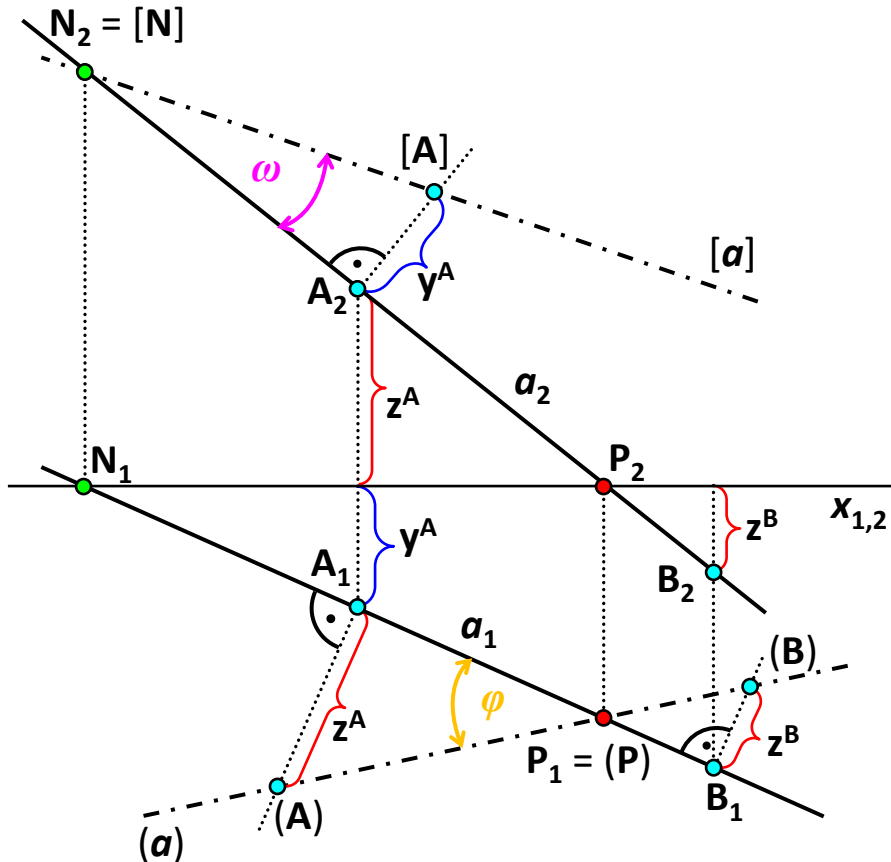
Postup:

1. Úlohu riešime v sklopení 1. premietacej roviny priamky a do priemetne π .

Poznámka: Keďže v tomto prípade je hodnota z^A kladná a hodnota z^B záporná, ležia body (A) a (B) v opačných polrovinách vzhľadom na priamku a_1 .

2. Hľadaný uhol φ je uhol priamok a_1 a (a) pri vrchole $P_1 = (P)$, pre ktorý platí:

- $\varphi = \angle(a, \pi) = \angle(a, a_1) = \angle((a), a_1)$.



Odchýlka ω priamky a od nárysne ν : $\omega = \angle(a, \nu)$

Postup:

1. Úlohu riešime v sklopení 2. premietacej roviny priamky a do priemetne ν .
2. Hľadaný uhol ω je uhol priamok a_2 a $[a]$ pri vrchole $N_2 = [N]$, pre ktorý platí:

- $\omega = \angle(a, \nu) = \angle(a, a_2) = \angle([a], a_2)$.

Odchýlka roviny od priemetne

Každá priamka roviny zviera s priemetňou nejaký uhol. Najväčší uhol s priemetňou zviera spádová priamka. Určuje preto **odchýlku roviny od priemetne**.

- je to **uhol roviny a priemetne**,
- t. j. je to **uhol, ktorý zviera spádová priamka roviny a priemetňa**.

Vzhľadom na dve priemetne rozlišujeme **odchýlku roviny od pôdorysne** a **odchýlku roviny od nárysne**.

Odchýlka roviny α od pôdorysne π

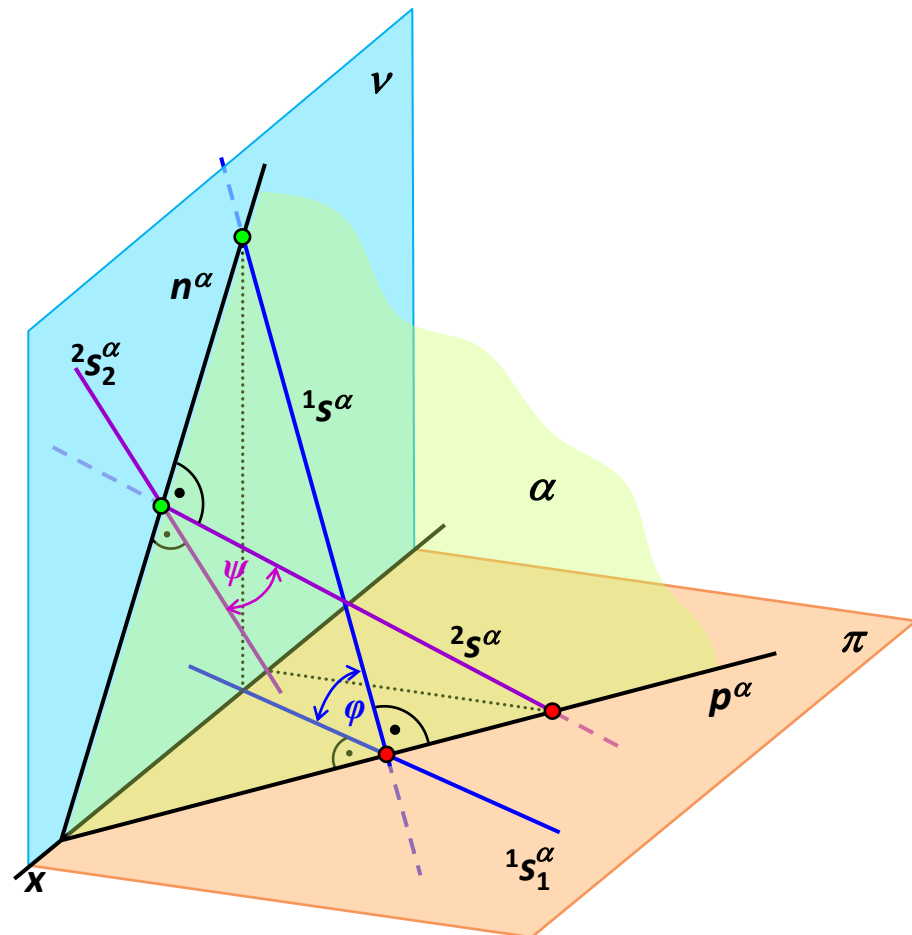
– je to uhol spádovej priamky 1. osnovy roviny α s pôdorysňou

$$\varphi = \angle(\alpha, \pi) = \angle(1s^\alpha, \pi)$$

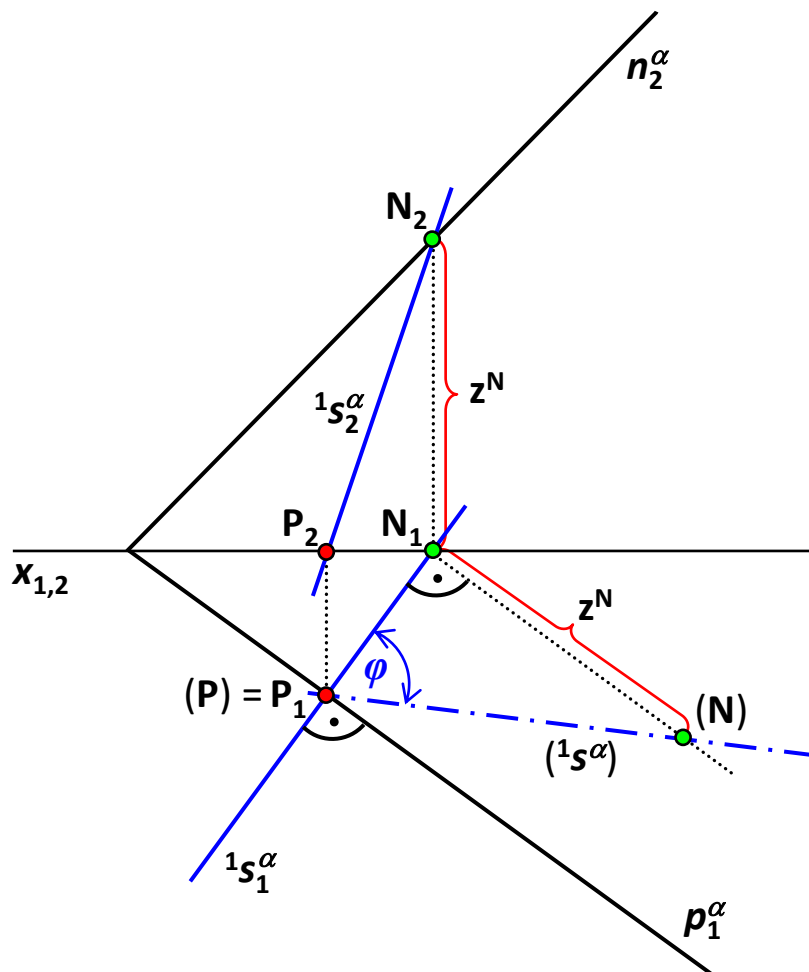
Odchýlka roviny α od nárysne ν

– je to uhol spádovej priamky 2. osnovy roviny α s nárysňou

$$\psi = \angle(\alpha, \nu) = \angle(2s^\alpha, \nu)$$



Príklad 10.21: V Mongeovej projekcii určte odchýlku roviny α (p_1^α, n_2^α) od pôdorysne.



Odchýlka φ roviny α od pôdorysne π je odchýlka spádovej priamky 1. osnovy roviny α od pôdorysne π :

$$\varphi = \angle(\alpha, \pi) = \angle(1s^\alpha, \pi).$$

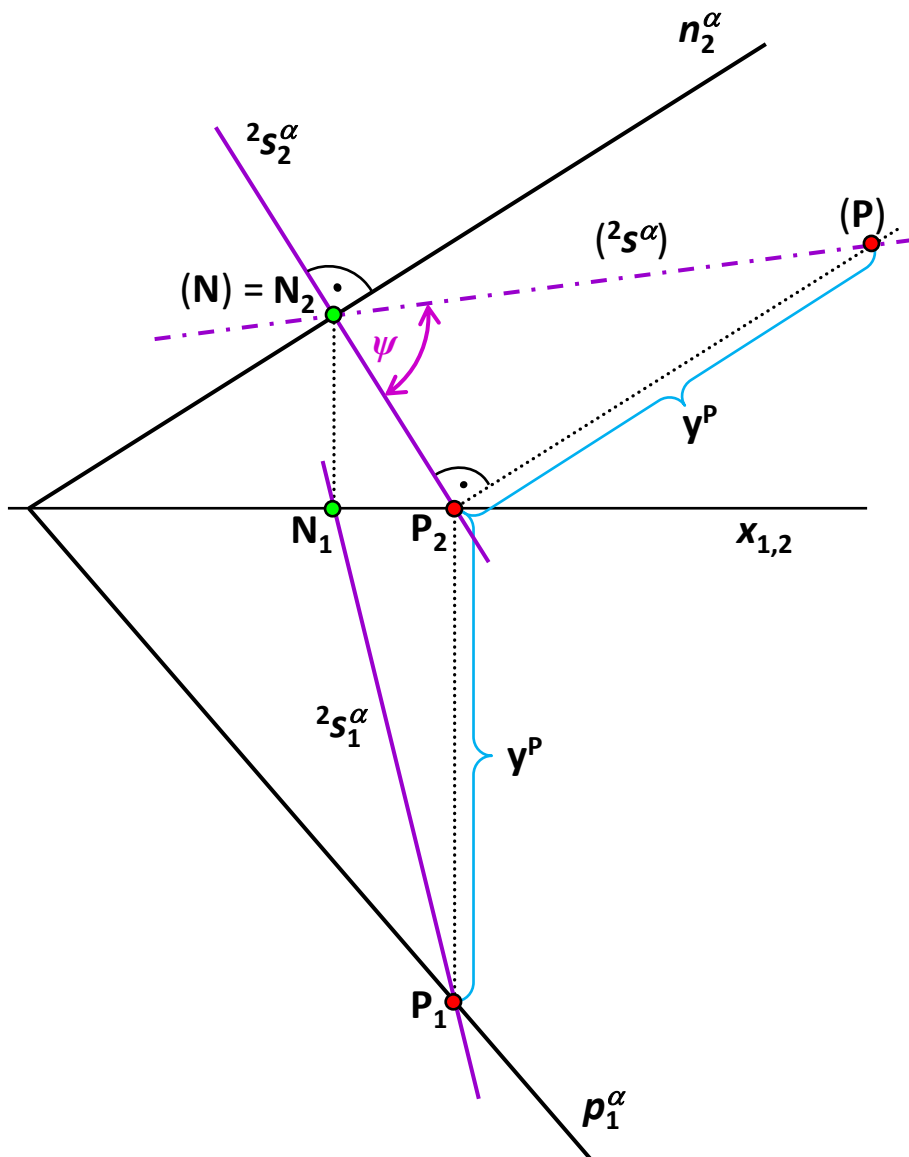
Určíme ju pomocou sklopenia 1. premietacej roviny priamky $1s^\alpha$ do priemetne π .

Postup:

1. Zostrojíme priemety ľubovoľnej spádovej priamky 1. osnovy roviny α .
2. Sklopíme 1. premietáciu roviny priamky $1s^\alpha$ do pôdorysne.
3. Hľadaný uhol φ je uhol priamok $1s_1$ a $(1s^\alpha)$ pri vrchole $P_1 = (P)$, pre ktorý platí:

$$\varphi = \angle(\alpha, \pi) = \angle(1s^\alpha, \pi) = \angle(1s^\alpha, 1s_1^\alpha) = \angle(1s_1^\alpha, (1s^\alpha)).$$

Príklad 10.22: V Mongeovej projekcii určte odchýlku roviny α (p_1^α, n_2^α) od nárysne.



Odchýlka φ roviny α od nárysne ν je odchýlka spádovej priamky 2. osnovy roviny α od nárysne ν :

$$\psi = \angle(\alpha, \nu) = \angle(2s^\alpha, \nu).$$

Určíme ju pomocou sklopenia 2. premietacej roviny priamky $2s^\alpha$ do priemetne ν .

Postup:

1. Zostrojíme priemety ľubovoľnej spádovej priamky 2. osnovy roviny α .

2. Sklopíme 2. premietáciu roviny priamky $2s^\alpha$ do pôdorysne.

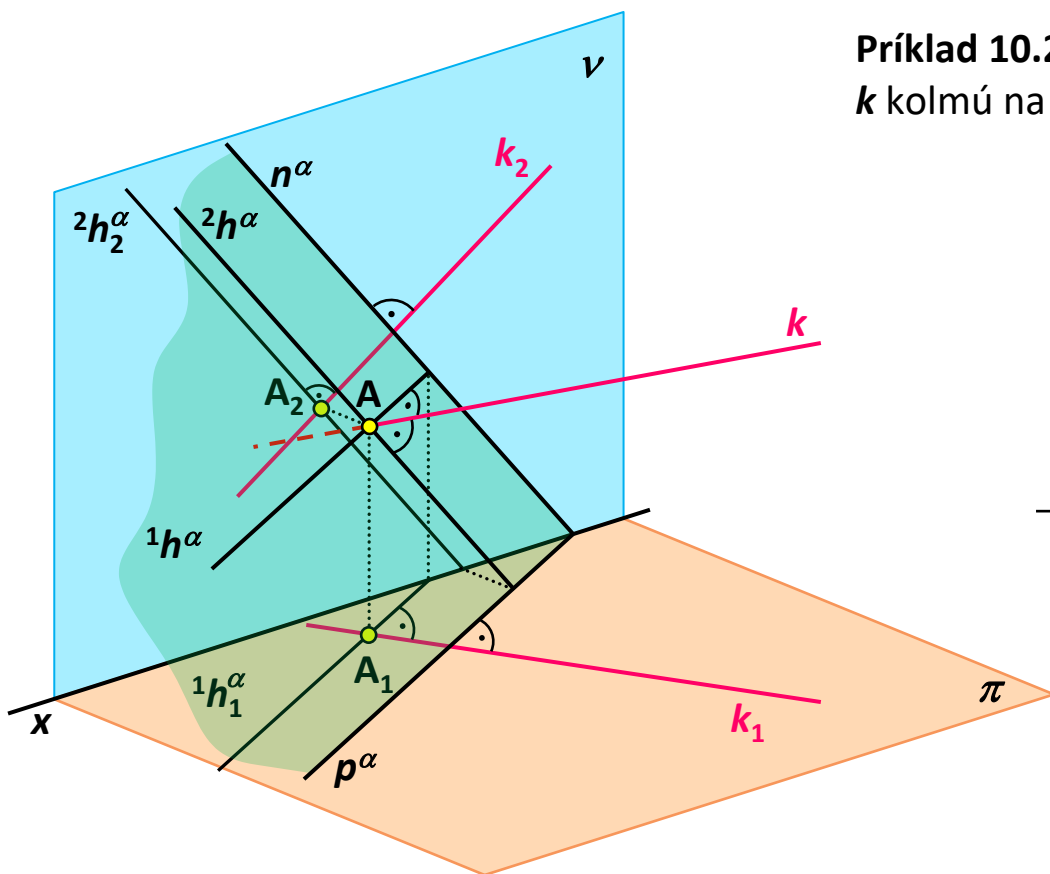
3. Hľadaný uhol ψ je uhol priamok $2s_2$ a $(2s^\alpha)$ pri vrchole $N_2 = (N)$, pre ktorý platí:

$$\psi = \angle(\alpha, \nu) = \angle(2s^\alpha, \nu) = \angle(2s^\alpha, 2s_2^\alpha) = \angle(2s_2^\alpha, (2s^\alpha)).$$

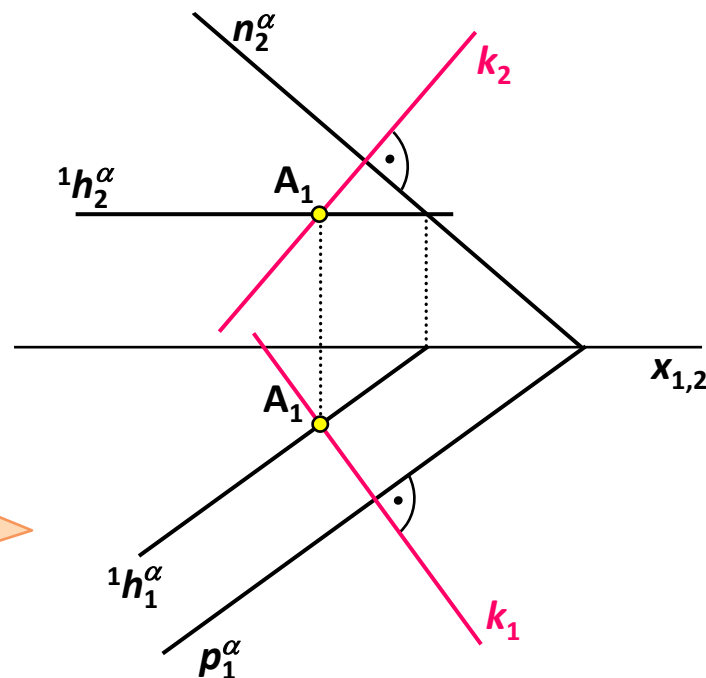
Priamka kolmá na rovinu

Priamka kolmá na rovinu je kolmá na všetky priamky roviny a preto je kolmá aj na hlavné priamky oboch osnôv vrátane stôp roviny. Z vety o priemete pravého uhla vyplýva, že:

- pôdorys priamky kolmej na rovinu je kolmý na pôdorysnú stopu roviny (a tiež na pôdorys hlavných priamok 1. osnovy): $k_1 \perp p_1^\alpha \rightarrow (k_1 \perp {}^1h_1^\alpha)$.
- nárys priamky kolmej na rovinu je kolmý na nárysnú stopu roviny (a tiež na nárys hlavných priamok 2. osnovy): $k_2 \perp n_2^\alpha \rightarrow (k_2 \perp {}^2h_2^\alpha)$.

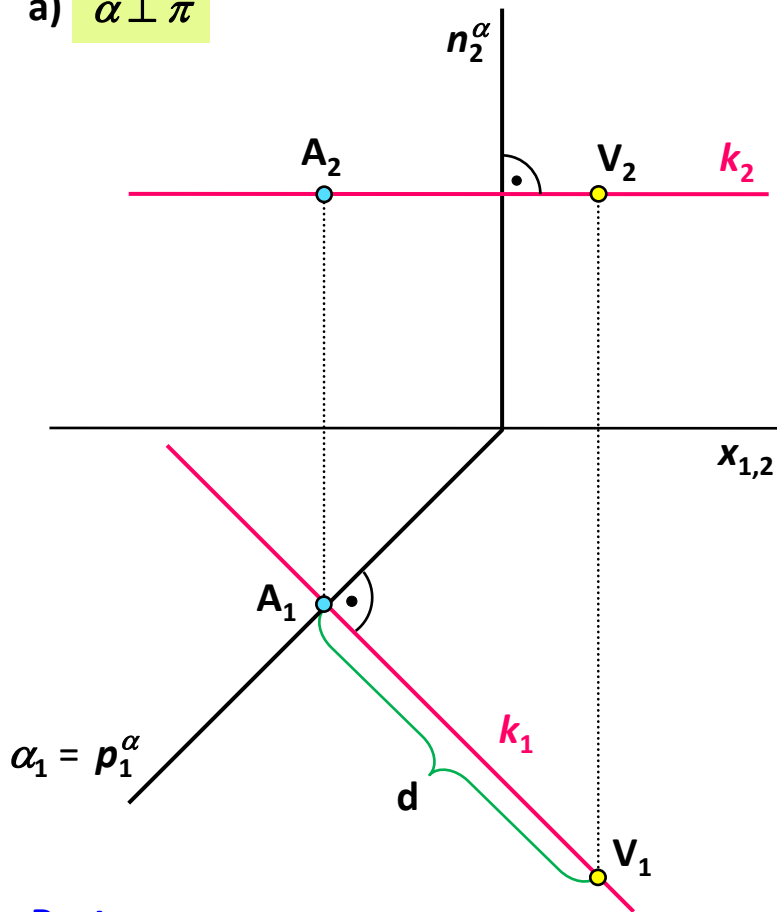


Príklad 10.23: V Mongeovej projekcii zostrojte priamku k kolmú na rovinu α a incidentnú s bodom A , $A \in \alpha$.



Príklad 10.24: V Mongeovej projekcii zostrojte priamku k kolmú na rovinu α a incidentnú s bodom A , $A \in \alpha$. Na kolmicu k naneste dĺžku $d = 5$ cm.

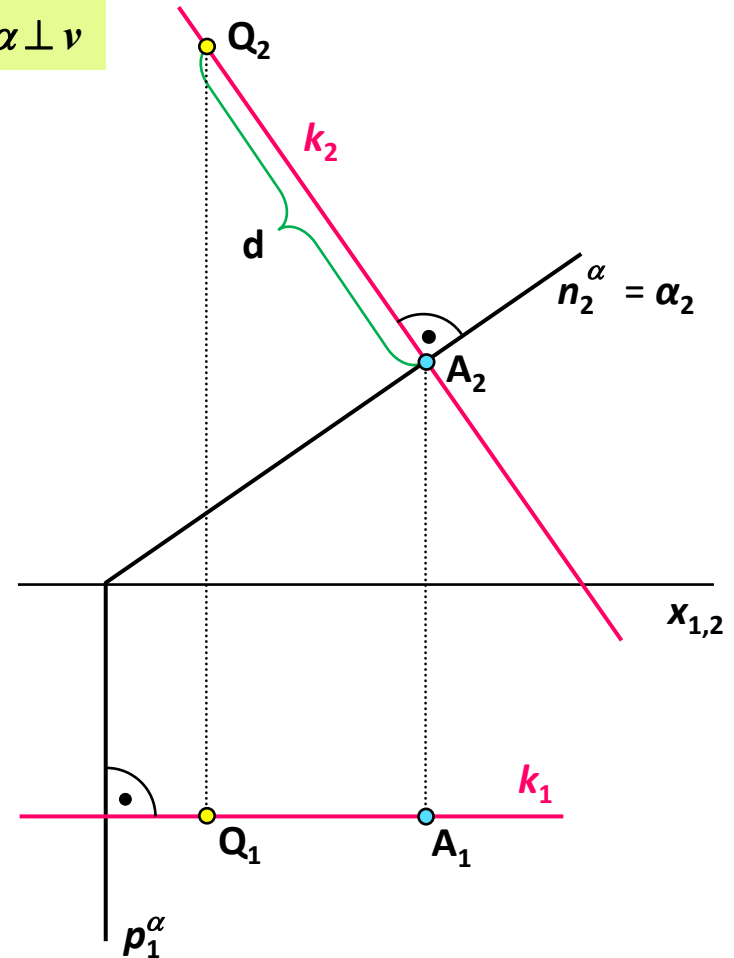
a) $\alpha \perp \pi$



Postup:

Keďže rovina α je kolmá na pôdorysňu, kolmica na ňu je s pôdorysňou rovnobežná. Preto sa príslušná dĺžka v pôdoryse na tejto kolmici zachová, t. j. $|A_1V_1| = d = 5$ cm.

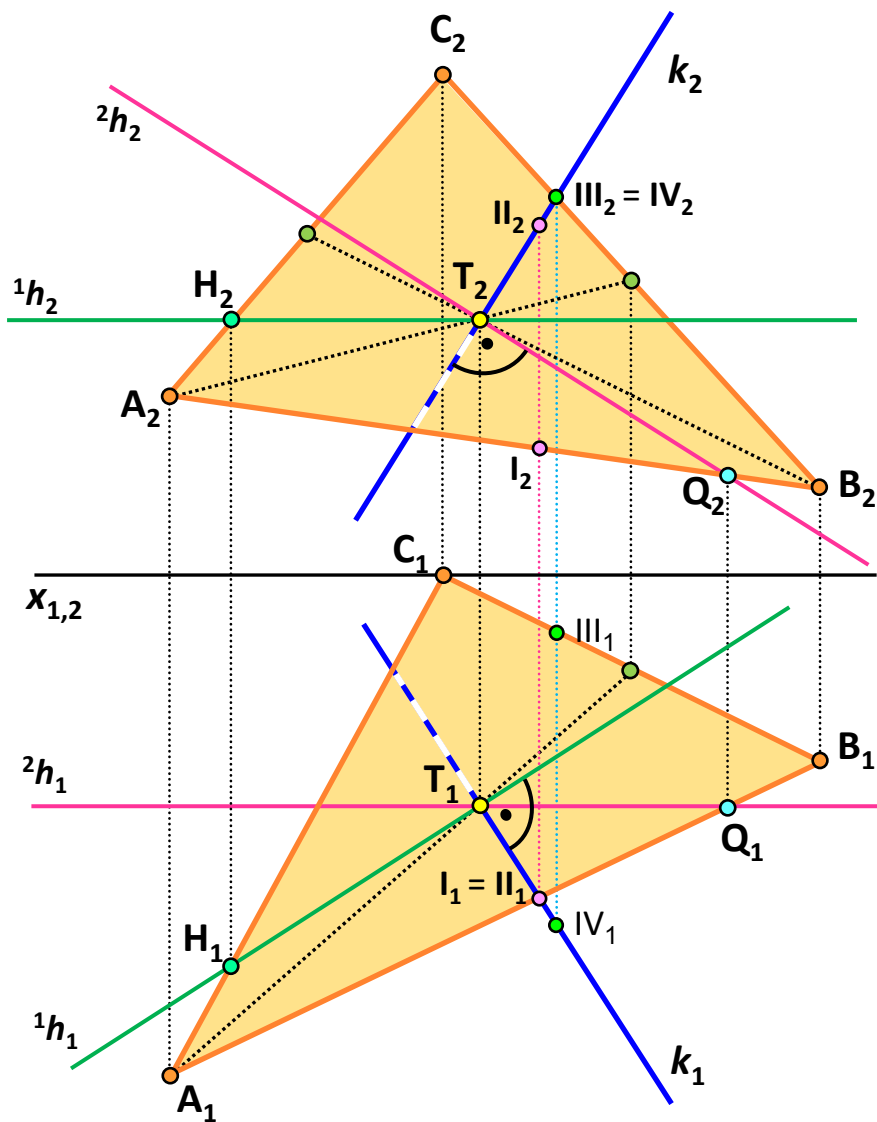
b) $\alpha \perp v$



Postup:

Príklad riešime analogicky ako v prípade a). Tentoraz je zachovaná dĺžka na priemete kolmice v náryse, t. j. $|A_2Q_2| = d = 5$ cm.

Príklad 10.25: V Mongeovej projekcii zostrojte priamku ***k*** kolmú na rovinu trojuholníka **ABC**, ktorá inciduje s jeho ťažiskom **T**.



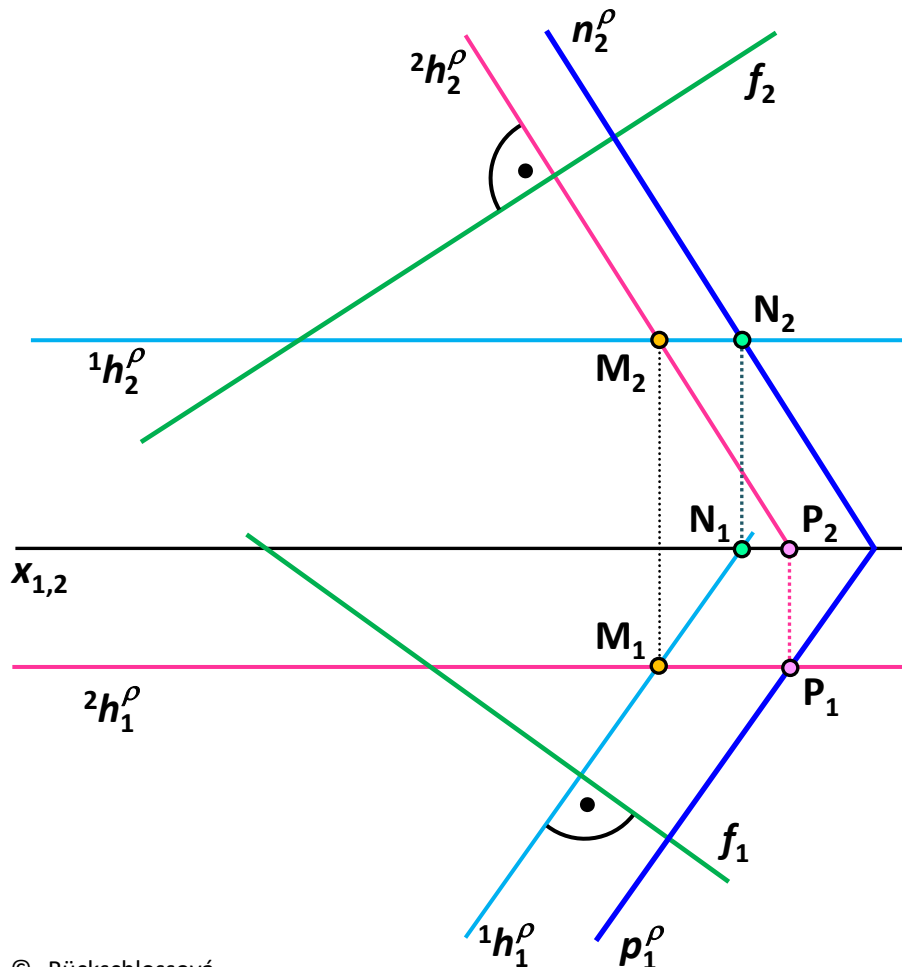
Postup:

1. Ťažisko **T** trojuholníka **ABC** má pôdorys **T₁** v ťažisku $\Delta \mathbf{A_1B_1C_1}$ a nárys **T₂** v ťažisku $\Delta \mathbf{A_2B_2C_2}$.
2. Bodom **T₁** vedieme pôdorys hlavnej priamky druhej osnovy ${}^2\mathbf{h_1}$ roviny $\Delta \mathbf{ABC}$ rovnobežne so základnicou $\mathbf{x_{1,2}}$.
3. Nárys ${}^2\mathbf{h_2}$ odvodíme pomocou priesečníka **Q** so stranou **AB** trojuholníka: ${}^2\mathbf{h_2} = \mathbf{T_2Q_2}$.
4. Analogicky, bodom **T₂** vedieme nárys hlavnej priamky prvej osnovy ${}^1\mathbf{h_2}$ roviny $\Delta \mathbf{ABC}$ rovnobežne so základnicou $\mathbf{x_{1,2}}$.
5. Pôdorys ${}^1\mathbf{h_1}$ odvodíme pomocou priesečníka **H** so stranou **AC** trojuholníka: ${}^1\mathbf{h_1} = \mathbf{T_1H_1}$.
6. Pôdorys $\mathbf{k_1}$ kolmice vedieme bodom **T₁** kolmo na hlavnú priamku prvej osnovy: $\mathbf{k_1} \perp {}^1\mathbf{h_1}$.
7. Nárys $\mathbf{k_2}$ kolmice vedieme bodom **T₂** kolmo na hlavnú priamku druhej osnovy: $\mathbf{k_2} \perp {}^2\mathbf{h_2}$.
8. Viditeľnosť kolmice **k** vzhľadom na $\Delta \mathbf{ABC}$ určíme v pôdoryse pomocou krycích bodov $\mathbf{I_1} = \mathbf{II_1}$ a v náryse pomocou bodov $\mathbf{III_2} = \mathbf{IV_2}$.

Rovina kolmá na priamku

Opačnou úlohou ako zostrojiť priamku kolmú na rovinu je zostrojiť rovinu, ktorá je kolmá na danú priamku. Pri riešení opäť využívame dôsledok vety o priemete pravého uhla t. j., že sa zachová pravý uhol medzi priemetmi hlavných priamok hľadanej roviny a priemetmi danej priamky, na ktorú je rovina kolmá.

Príklad 10.26: V Mongeovej projekcii zostrojte stopy roviny ρ , ktorá prechádza bodom M a je kolmá na priamku f . Bod a priamka sú dané združenými priemetmi.



Postup:

1. V pôdoryse a náryse zostrojíme hlavné priamky prvej a druhej osnovy roviny ρ prechádzajúce bodom M :

$${}^1h_1^{\rho}; M_1 \in {}^1h_1^{\rho}, {}^1h_1^{\rho} \perp f_1,$$

$${}^1h_2^{\rho}; M_2 \in {}^1h_2^{\rho}, {}^1h_2^{\rho} \parallel x_{1,2},$$

$${}^2h_2^{\rho}; M_2 \in {}^2h_2^{\rho}, {}^2h_2^{\rho} \perp f_2,$$

$${}^2h_1^{\rho}; M_1 \in {}^2h_1^{\rho}, {}^2h_1^{\rho} \parallel x_{1,2}.$$

2. Stopy roviny ρ prechádzajú príslušnými stopníkmi P a N hlavných priamok:

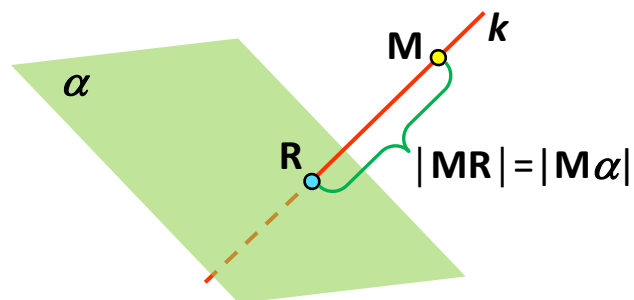
$$p_1^{\rho}; P_1 \in p_1^{\rho}, p_1^{\rho} \parallel {}^1h_1^{\rho},$$

$$n_2^{\rho}; N_2 \in n_2^{\rho}, n_2^{\rho} \parallel {}^2h_2^{\rho}.$$

Vzdialenosť bodu od roviny

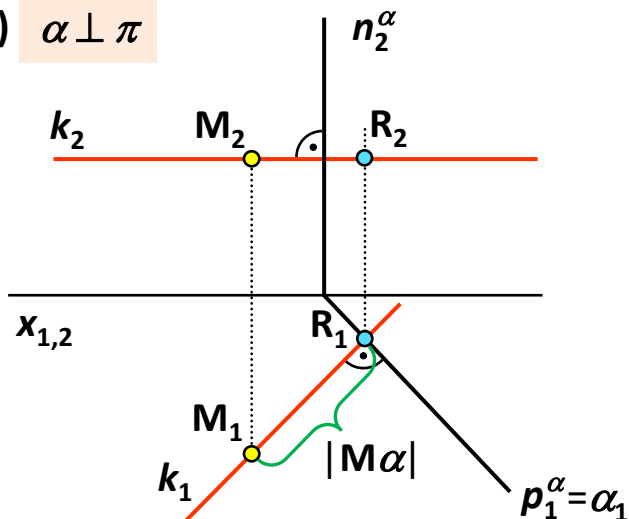
Priamka kolmá na rovinu sa tiež využíva v úlohách, kde je potrebné zistiť vzdialenosť daného bodu od roviny. Postupujeme pri tom nasledovným spôsobom:

1. Bodom **M** zostrojíme priamku **k** kolmú na rovinu α .
2. Určíme priesečník **R** kolmice **k** a roviny α .
3. Určíme dĺžku úsečky $|\mathbf{MR}| = |\mathbf{M}\alpha|$.



Príklad 10.27: V Mongeovej projekcii určte vzdialenosť bodu **M** a roviny α .

a) $\alpha \perp \pi$

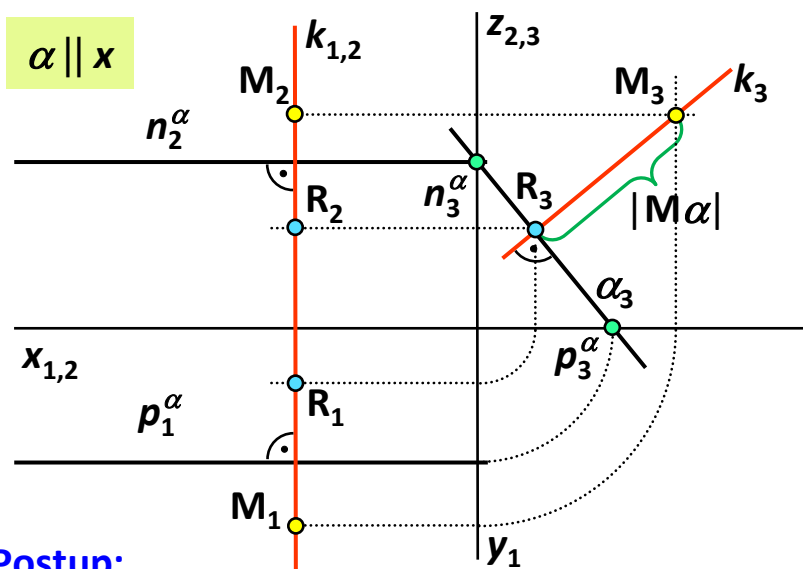


Postup:

Podľa odporúčaného postupu zostrojíme bodom **M** kolmicu **k** na rovinu α a nájdeme ich priesečník **R**. Vzdialenosť bodu **M** od roviny α je možné odmerať priamo v pôdoryse:

$$|\mathbf{M}_1\mathbf{R}_1| = |\mathbf{MR}| = |\mathbf{M}\alpha|.$$

b) $\alpha \parallel x$



Postup:

Pri riešení je výhodné použiť bokorysňu, do ktorej sa rovina α premietne ako priamka a bude tak možné odmerať vzdialenosť bodu **M** od roviny α priamo:

$$|\mathbf{M}_3\mathbf{R}_3| = |\mathbf{MR}| = |\mathbf{M}\alpha|.$$

Príklad 10.27: V Mongeovej projekcii určte vzdialenosť bodu **M** a roviny α .

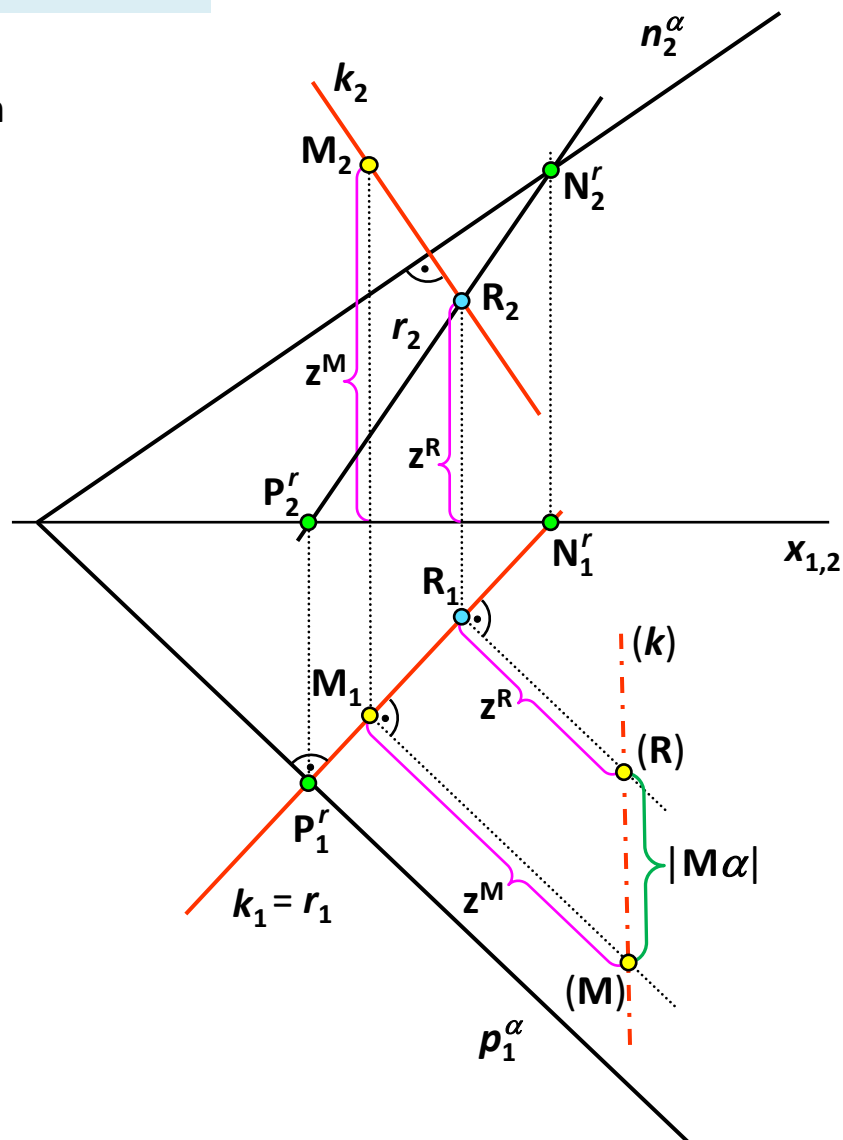
c) Rovina α je vzhľadom na priemetne vo všeobecnej polohe.

Pri riešení opäť použijeme postupnosť jednoduchých krokov ako v predchádzajúcich prípadoch:

Postup:

1. Bodom **M** zostrojíme kolmicu **k** na rovinu α .
2. Priesečník **R** kolmice **k** a roviny α zostrojíme použitím metódy krycej priamky napríklad pôdoryse.
3. Dĺžku úsečky **MR**, ktorá predstavuje vzdialenosť bodu **M** od roviny α , určíme v sklopení napríklad prvej premietacej roviny kolmice **k** v pôdoryse:

$$|(\mathbf{M})(\mathbf{R})| = |\mathbf{MR}| = |\mathbf{M}\alpha|.$$

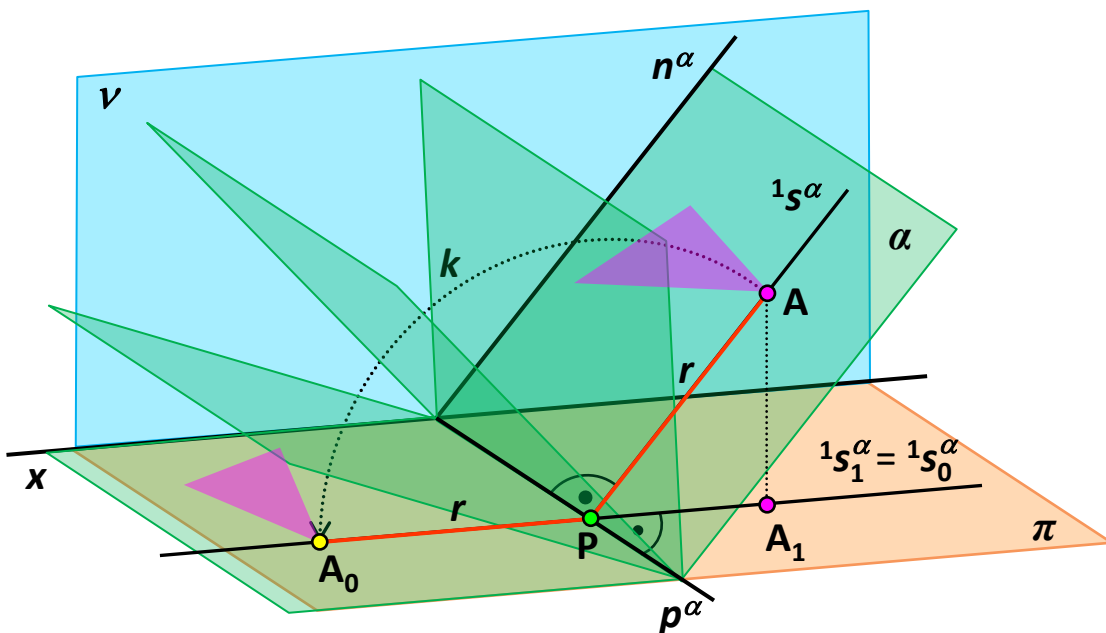


Otáčanie roviny do priemetne

V Mongeovej projekcii sa stretávame často s potrebou riešiť úlohy v rovine. Ide o zostrojenie a zobrazenie útvaru, ktorý v danej rovine leží alebo určenie skutočnej veľkosti či tvaru rovinného útvaru, ktorého obraz už poznáme. Pre rovinu, ktorá nie je rovnobežná s priemetňou, riešime takéto úlohy pomocou otočenia roviny do priemetne.

Vzhľadom na dve priemetne v Mongeovej projekcii, môžeme otáčať rovinu okolo jej pôdorysnej stopy do pôdorysne alebo okolo jej nárysnej stopy do nárysne. Uvedieme **otáčanie roviny, ktorá je kolmá na pôdorysňu alebo na nárysňu**. Postupujeme pri tom nasledovným spôsobom:

Otáčanie roviny $\alpha \perp \nu$ do pôdorysne π



Otočenie bodu $A \in \alpha$ do pôdorysne π

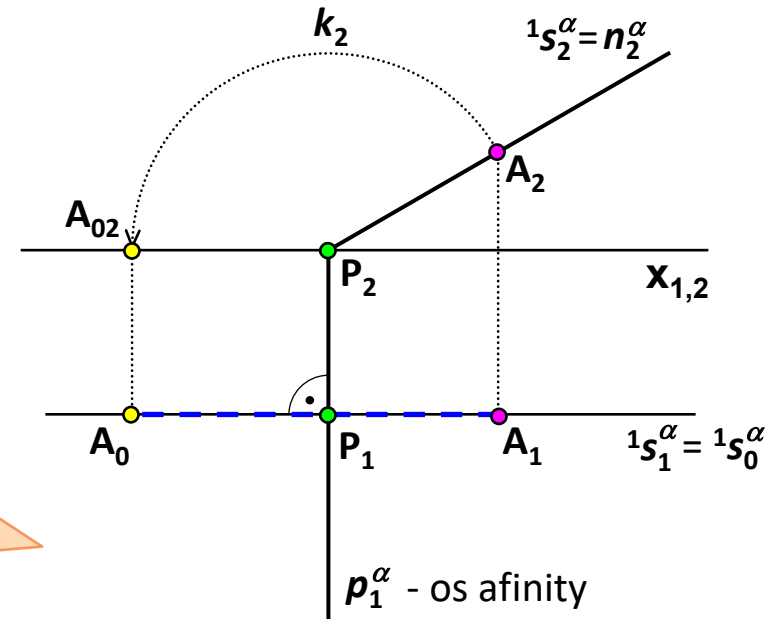
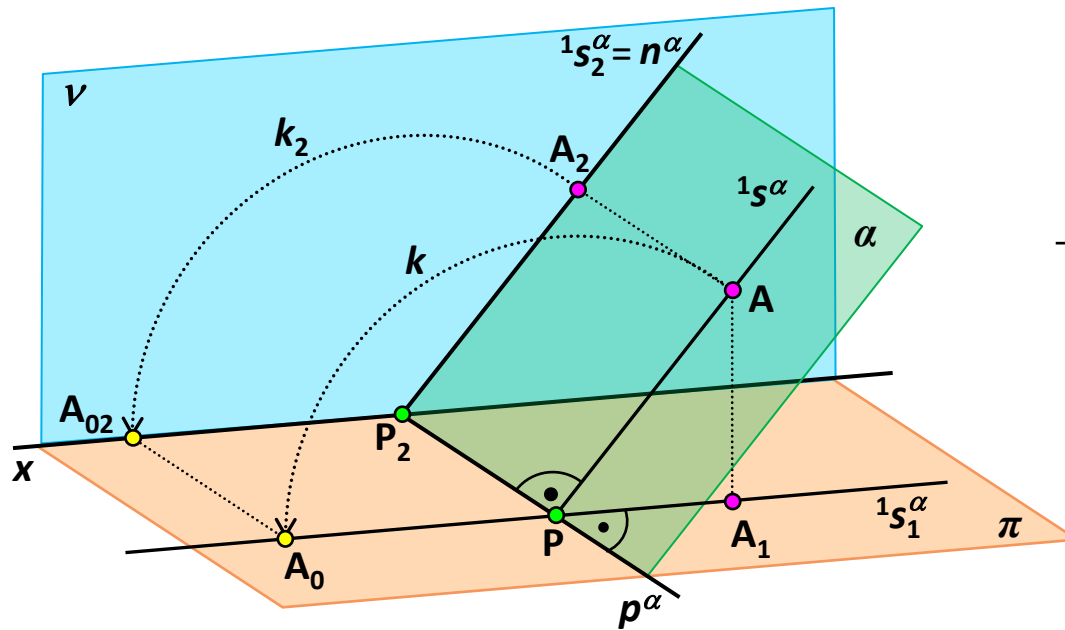
- $\mathbf{A} \in {}^1\mathbf{s}^\alpha$, $\mathbf{A}_1 \in {}^1\mathbf{s}_1^\alpha$,
- $\mathbf{p}^\alpha$ - os otáčania,
- k - kružnica otáčania bodu $\mathbf{A}$,
 $k(\mathbf{P}, r = |\mathbf{PA}|)$,
 leží v rovine rovnobežnej s nárysňou ν ,
- $\mathbf{P}$ - stred otáčania bodu $\mathbf{A}$,
- r - polomer otáčania bodu $\mathbf{A}$,
- $\mathbf{A}_0$ - otočená poloha bodu $\mathbf{A}$,
 $\mathbf{A}_0 \in {}^1\mathbf{s}_0^\alpha = {}^1\mathbf{s}_1^\alpha$.

Dá sa ukázať, že medzi pôdorysmi bodov roviny α a ich otočenými polohami do pôdorysne je **vzťah perspektívnej afinity**, ktorej osou je stopa roviny p^α a smer určuje dvojica odpovedajúcich si bodov A_1, A_0 . Túto afinitu v rovine π môžeme využiť pri otáčaní ďalších bodov roviny a naopak, pri získavaní obrazov bodov z otočenia.

Otáčanie roviny $\alpha \perp v$ do pôdorysne π

Kružnice, po ktorých sa pohybujú body pri otáčaní roviny, ležia v rovinách rovnobežných s nárysňou. Preto sa v náryse neskresľujú a vieme ich priamo zostrojiť.

Ukážeme, ako zostrojiť kružnicu otáčania bodu **A** a jeho otočenú polohu **A₀** v nákresni:



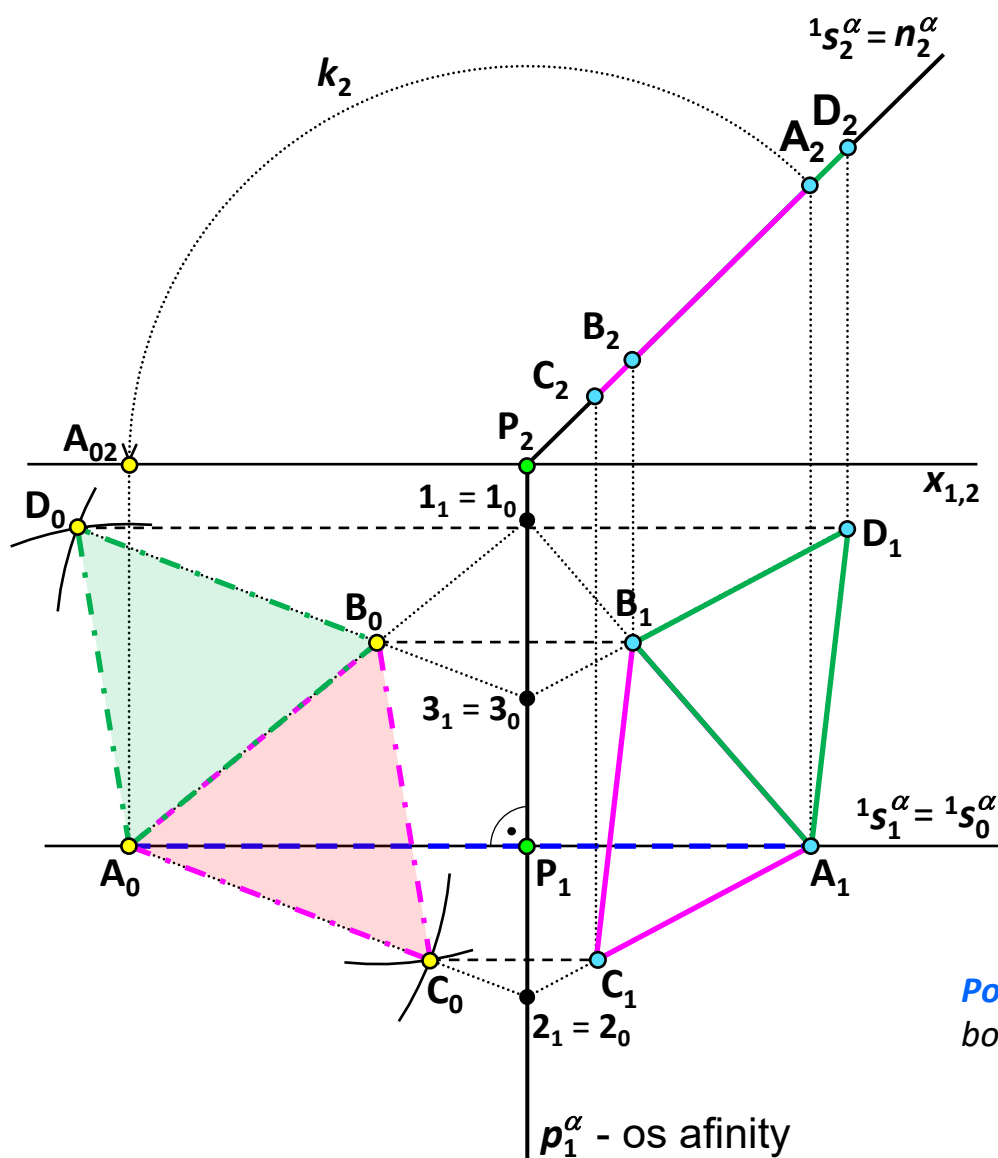
Postup:

1. Doplníme priemet **A₂** bodu **A** a zostrojíme priemety spádovej priamky $^1s^\alpha$, ktorá ním prechádza vrátane priemetov jej stopníka **P**.
2. Zostrojíme v náryse kružnicu **k** otáčania bodu **A** a jeho otočenú polohu **A₀₂**: k_2 ; $k_2(P_2, r = |P_2A_2|)$,

$$A_{02}; A_{02} = k_2 \cap x_{1,2}.$$

3. Otočená poloha **A₀** leží na $^1s_0 = ^1s_1$.
4. Osou p^α a dvojicou **A₁**, **A₀** je určená perspektívna afinita medzi otočenými polohami bodov roviny α a ich prvými priemetmi.

Príklad 10.28: V Mongeovej projekcii zobrazte rovnostranný trojuholník **ABC** v rovine α , ktorá je kolmá na nárysňu. Dané sú body **A**, **B**.



Pri riešení použijeme otáčanie roviny α do pôdorysne π okolo stopy p^α .

Postup:

1. Otočenú polohu **A**₀ bodu **A** zostrojíme postupom opísaným na predchádzajúcej snímke.
2. Pomocou afinity (p^α , **A**₁, **A**₀) určíme bod **B**₀. V otočenej polohe zostrojíme rovnostranný trojuholník. Úloha má dve riešenia:

$$\triangle A_0 B_0 C_0 \text{ a } \triangle A_0 B_0 D_0.$$

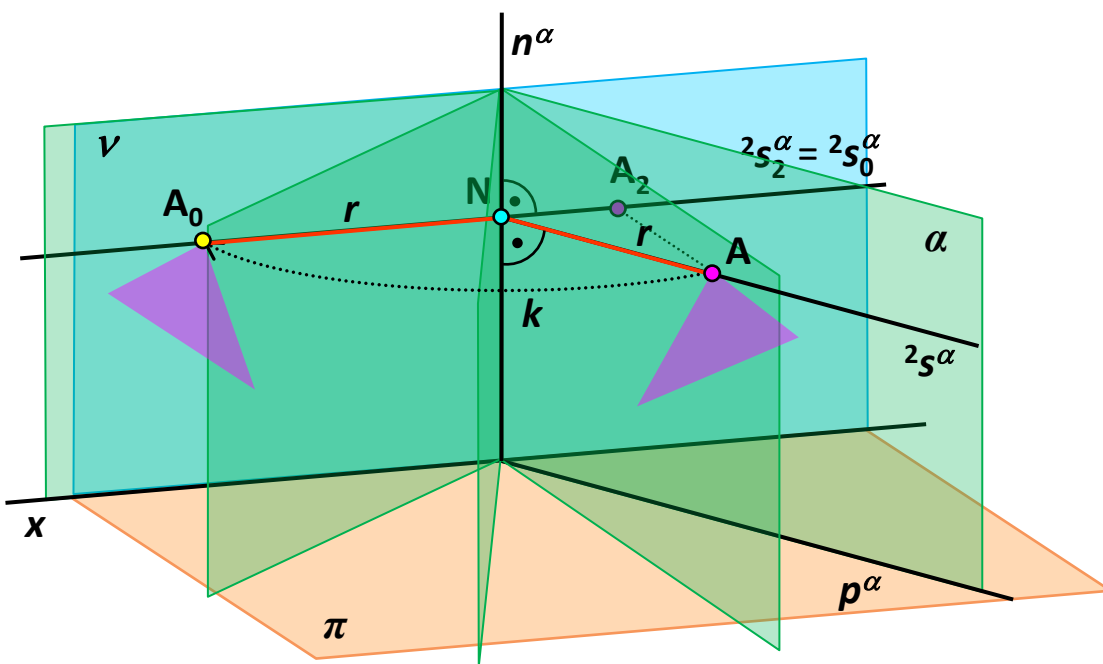
3. Pomocou afinity v opačnom smere zobrazíme body **C**₁, **D**₁. V náryse doplníme body **C**₂, **D**₂.

Poznámka: Útvary v otočenej polohe budeme vyznačovať bodkočiarkovanou čiarou (rovnako ako v sklopenej polohe).

Otáčanie roviny $\alpha \perp \pi$ do nárysne ν

Rovinu, ktorá je kolmá na pôdorysňu π , otáčame do nárysne okolo jej nárysnej stopy n^α analogickým spôsobom ako sme otáčali rovinu komú na nárysňu do pôdorysne.

Otáčanie roviny $\alpha \perp \pi$ do pôdorysne π



Otočenie bodu $A \in \alpha$ do nárysne ν

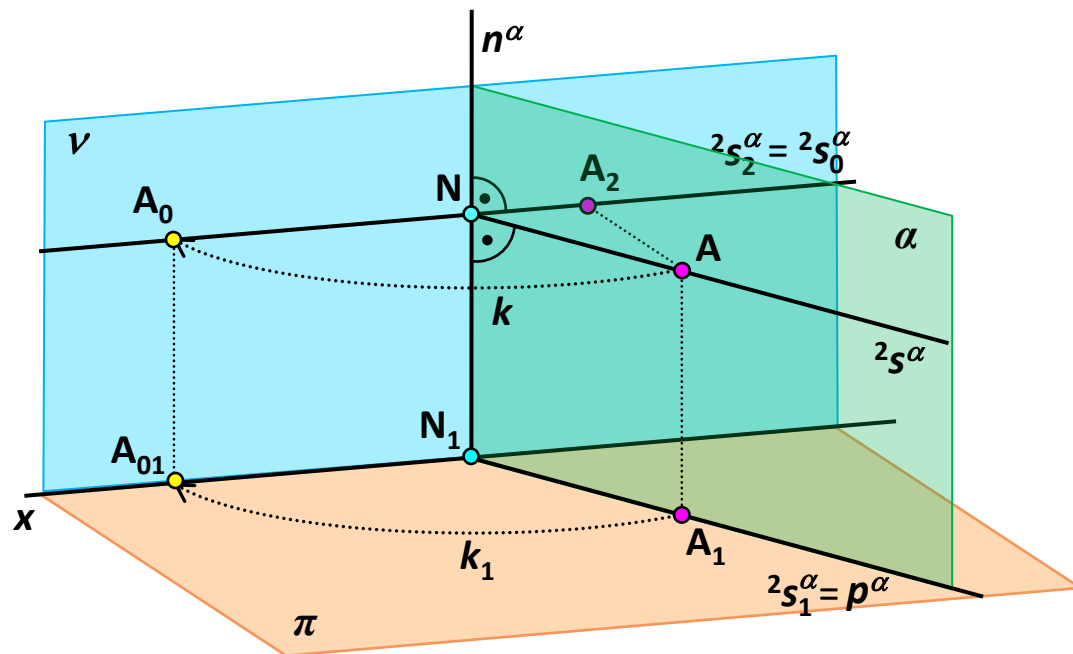
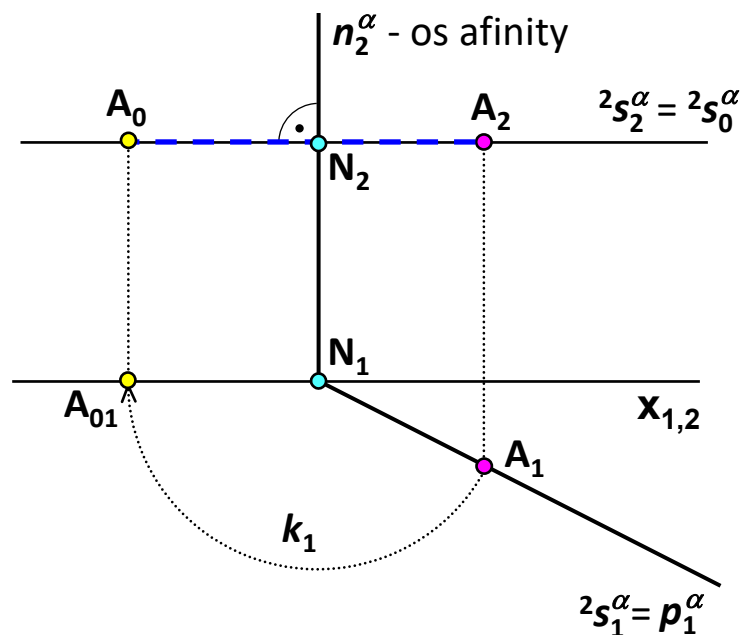
- $A \in {}^2s^\alpha$, $A_2 \in {}^2s_2^\alpha$,
- n^α - os otáčania,
- k - kružnica otáčania bodu A ,
 $k(N, r = |NA|)$,
 leží v rovine rovnobežnej s rovinou π ,
- N - stred otáčania bodu A ,
- r - polomer otáčania bodu A ,
- A_0 - otočená poloha bodu A ,
 $A_0 \in {}^2s_0^\alpha = {}^2s_2^\alpha$.

Dá sa ukázať, že medzi nárysmi bodov roviny α a ich otočenými polohami do nárysne je **vzťah perspektívnej afinity**, ktorej osou je stopa roviny n^α a smer určuje dvojica odpovedajúcich si bodov A_2, A_0 . Túto afinitu v rovine ν môžeme využiť pri otáčaní ďalších bodov roviny a naopak, pri získavaní obrazov bodov z otočenia.

Otáčanie roviny $\alpha \perp \pi$ do nárysne ν

Kružnice, po ktorých sa pohybujú body pri otáčaní roviny, ležia v rovinách rovnobežných s pôdorysňou. Preto sa v pôdoryse neskresľujú a vieme ich priamo zostrojiť.

Ukážeme, ako zostrojiť kružnicu otáčania bodu **A** a jeho otočenú polohu **A₀** v nákresni:



Postup:

1. Doplníme priemet **A₁** bodu **A** a zostrojíme priemety spádovej priamky ${}^2s^\alpha$, ktorá ním prechádza vrátane priemetov jej stopníka **N**.
2. Zostrojíme v pôdoryse kružnicu **k** otáčania bodu **A** a jeho otočenú polohu **A₀₁**: k_1 ; $k_1(N_1, r = |N_1A_1|)$,

$$A_{01}; A_{01} = k_1 \cap x_{1,2}.$$

3. Otočená poloha **A₀** leží na ${}^1s_0 = {}^1s_1$.
4. Osou n^α a dvojicou **A₂**, **A₀** je určená perspektívna afinita medzi otočenými polohami bodov roviny α a ich druhými priemetmi.

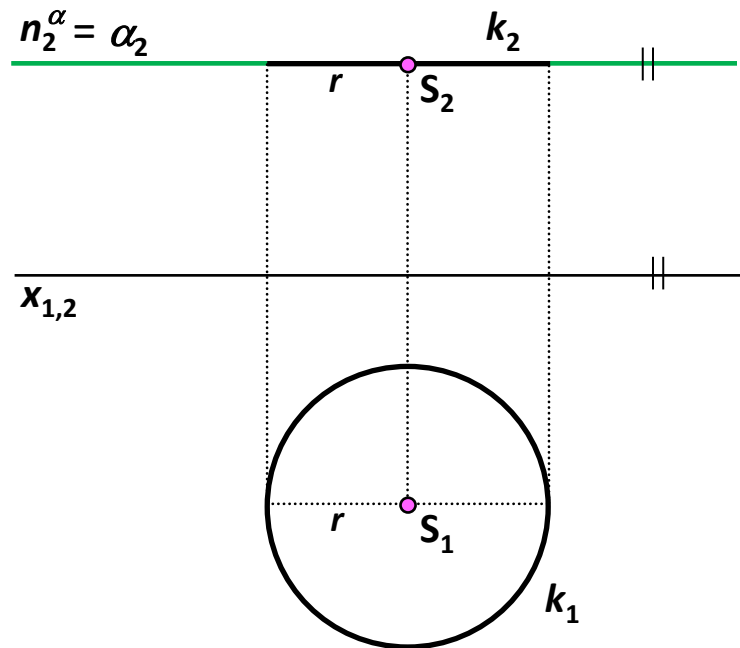
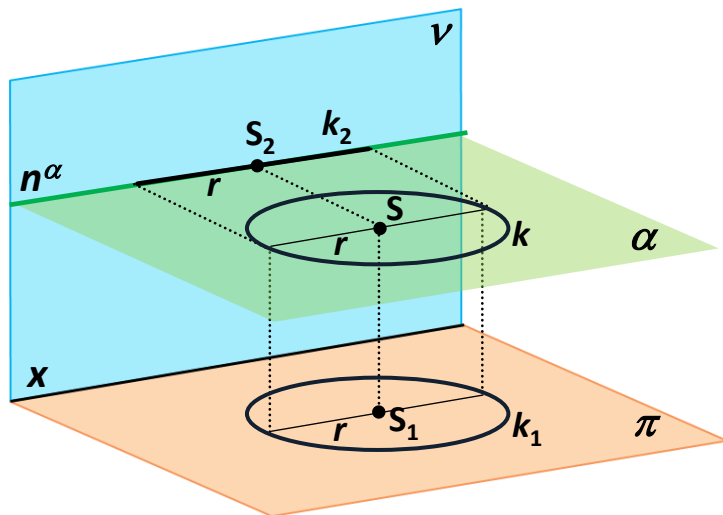
Zobrazenie kružnice

Priemetom kružnice, ktorá leží v rovine rovnobežnej s priemetňou, je zhodná kružnica, ktorej stred je priemetom stredy danej kružnice.

Priemetom kružnice ležiacej v rovine kolmej na priemetňu je úsečka, ktorej dĺžka je rovnaká ako priemer kružnice a jej stred je priemetom stredy kružnice.

Nech rovina α kružnice $k(S, r)$ je rovnobežná s pôdorysňou a teda zároveň kolmá na nárysňu.

Situácia v nákrese:



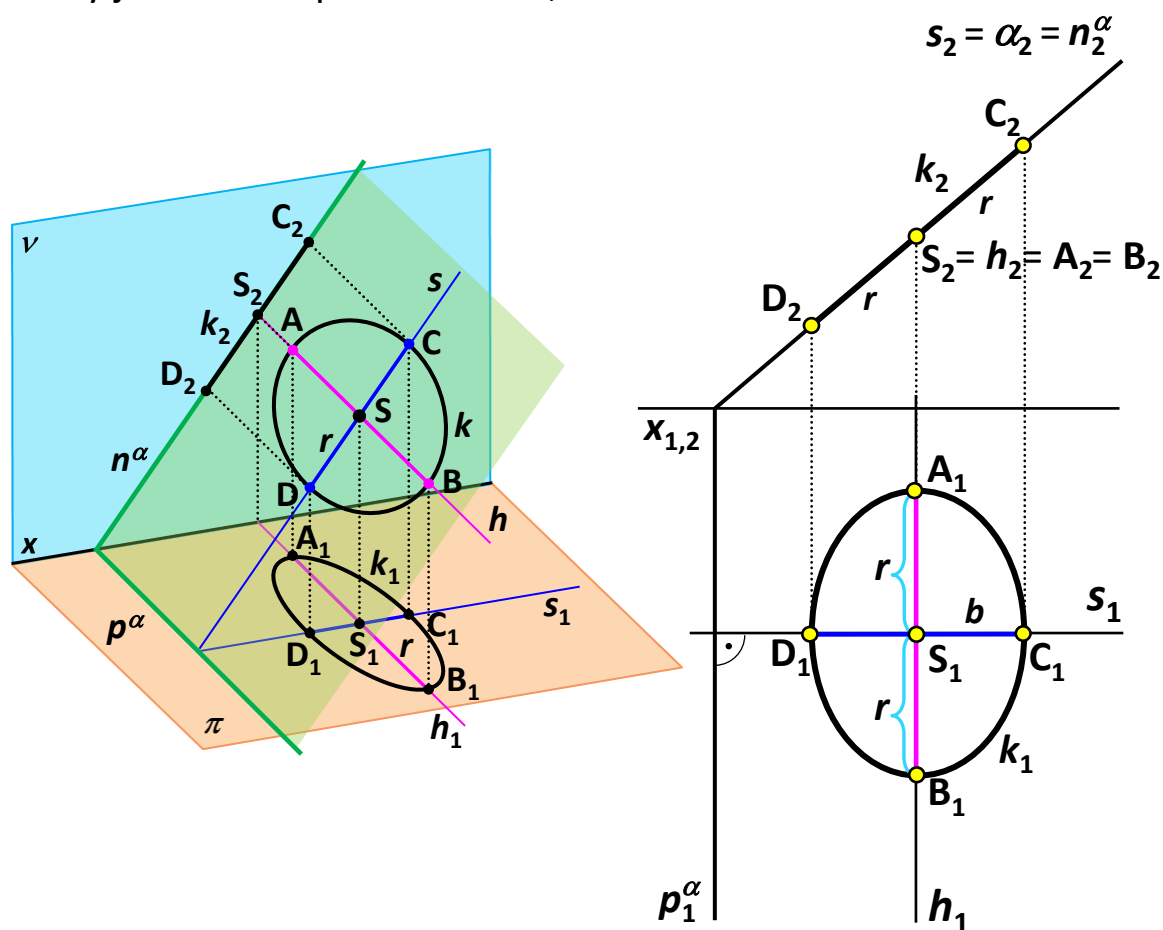
Pre priemety kružnice platí:

- pôdorys kružnice k je kružnica $k_1(S_1, r)$,
- nárys kružnice k je úsečka k_2 dĺžky $2r$.

Zobrazenie kružnice

Priemetom kružnice, ktorá leží vzhľadom na priemetňu **vo všeobecnej rovine** (s odchýlkou $\varphi \in (0, 90^\circ)$), je **elipsa**. Stred elipsy je priemetom stredu kružnice. **Hlavná os elipsy** leží na **priemete hlavnej priamky** roviny prechádzajúcej stredom kružnice. Dĺžka hlavnej polosi je $a = r$. **Vedľajšia os elipsy** leží na **priemete spádovej priamky** danej roviny a jej dĺžka je $b = r \cdot \cos \varphi$.

Príklad 10.29: V Mongeovej projekcii zobrazte kružnicu k ležiacu v rovine α , ktorá je kolmá na nárysňu. Daný je stred S a polomer $r = 2,5$ cm kružnice.



Postup:

1. Nárysom kružnice k je úsečka $k_2 = C_2D_2$ so stredom S_2 a dĺžkou $2r$, ktorá leží na $s_2 = \alpha_2 = n_2^\alpha$.
2. Pôdorysy C_1, D_1 odvodíme z nárysu, ležia na pôdoryse s_1 spádovej priamky s , $S_1 \in s_1$, $s_1 \perp p_1^\alpha$. Sú to vedľajšie vrcholy elipsy a platí: $b = |D_1S_1| = |S_1C_1|$.
3. Pôdorysom kružnice k je elipsa k_1 , ktorej hlavná os leží na hlavnej priamke h_1 , $S_1 \in h_1$, $h_1 \parallel p_1^\alpha$. Pre hlavné vrcholy A_1, B_1 platí: $A_1 \in h_1$, $B_1 \in h_1$, $|A_1S_1| = |S_1B_1| = r$.