10.3 Polohové úlohy v Mongeovej projekcii

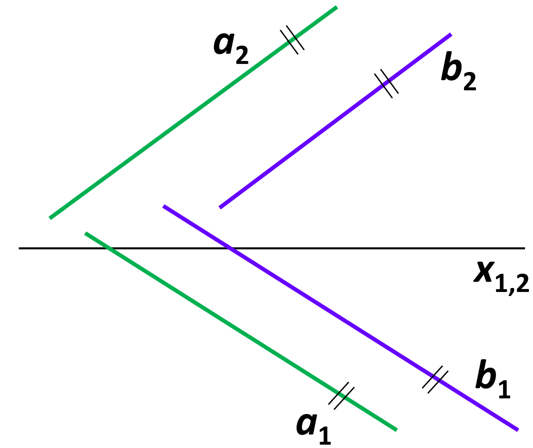
Vzájomná poloha dvoch priamok

Zobrazenie dvojice rovnobežných priamok

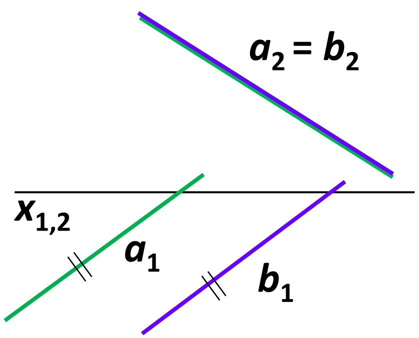
Dve **rovnobežné priamky**, ktoré majú **všeobecnú polohu** vzhľadom na priemetne a nemajú spoločnú premietaciu rovinu, sa zobrazia do rovnobežných priamok v pôdoryse aj v náryse. Je to dôsledok toho, že ich príslušné premietacie roviny sú rovnobežné.

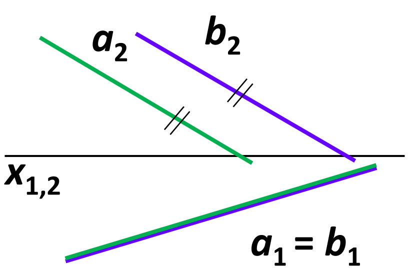
$a \parallel b \rightarrow a_1 \parallel b_1$

$\rightarrow a_2 \parallel b_2$

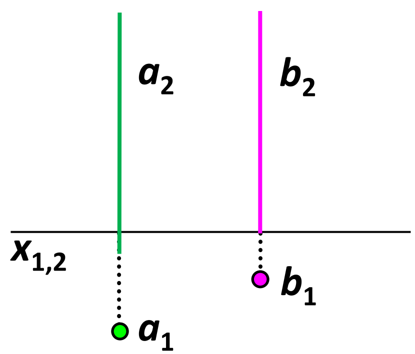


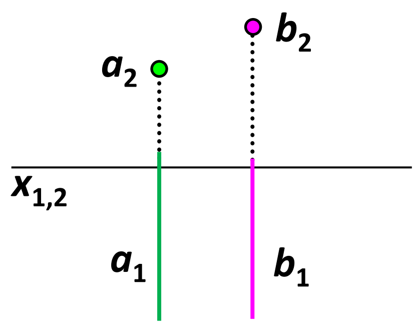
Ak rovnobežky **určujú spoločnú premietaciu rovinu** (kolmú na pôdorysňu alebo nárysňu), tak sú aj ich príslušné priemety (pôdorysy alebo nárysy) totožné.



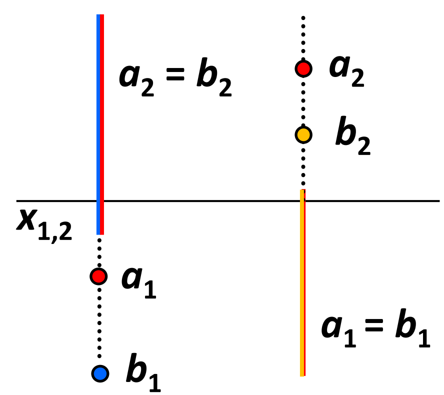


Ak sú rovnobežky **kolmé na pôdorysňu** (**nárysňu**), tak ich pôdorysom (nárysom) sú dva body a ich nárysy (pôdorysy) sú kolmé na základnicu ***x***.





Ak sú rovnobežky **kolmé na pôdorysňu** (**nárysňu**), a majú **spoločnú premietaciu rovinu**, tak sú totožné aj ich príslušné priemety (priamky).



Zobrazenie dvojice rôznobežných priamok

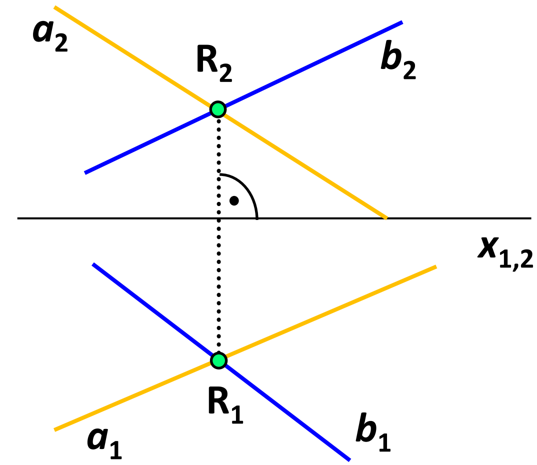
Dve **rôznobežné priamky**, vo **všeobecnej polohe** vzhľadom na priemetne, ktoré nemajú spoločnú premietaciu rovinu, sa zobrazia do dvoch rôznobežných priamok v pôdoryse aj v náryse. Priesečníky ich prvých a druhých priemetov ležia na spoločnej ordinále.

$$a \cap b = R$$

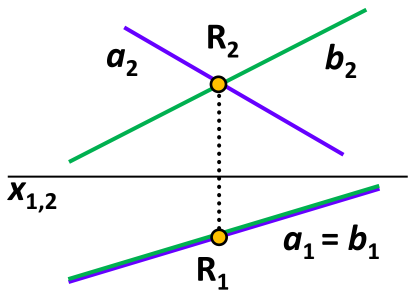
$\rightarrow\ a_1 \cap b_1 = R_1$

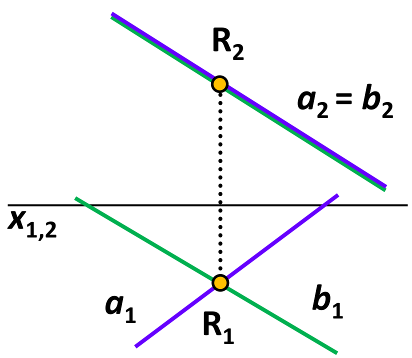
$\rightarrow\ a_2 \cap b_2 = R_2$

$\rightarrow\ R_1R_2 \perp x_{1,2}$

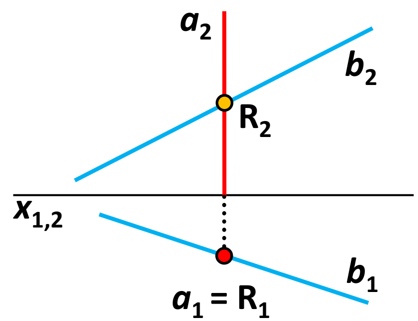


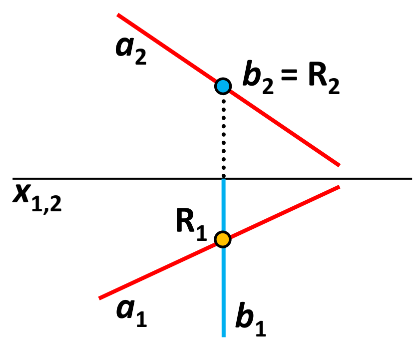
Ak sú **prvé** (**druhé**) **premietacie roviny** rôznobežiek **totožné**, tak ich pôdorysom (nárysom) sú totožné priamky.



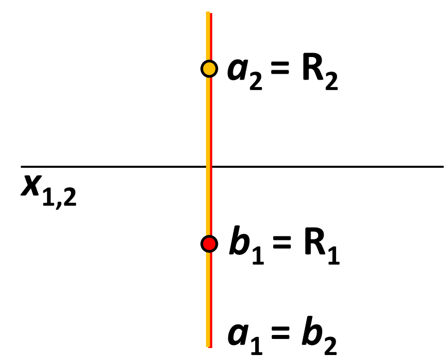


Ak je jedna z rôznobežiek **kolmá na pôdorysňu** (**nárysňu**), tak jej pôdorysom (nárysom) je bod ležiaci na pôdoryse (náryse) druhej priamky.





Rôznobežky, z ktorých **jedna je kolmá na pôdorysňu** a **druhá na nárysňu**, sa premietnu do jednej priamky kolmej na základnicu ***x***.

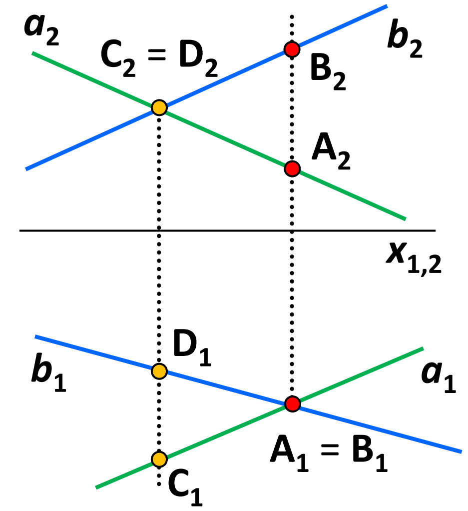


Zobrazenie dvojice mimobežných priamok

Dve **mimobežné priamky**, vo **všeobecnej polohe** vzhľadom na priemetne, sa zobrazia do dvoch rôznobežných priamok v pôdoryse aj v náryse. Priesečníky ich prvých a druhých priemetov neležia na spoločnej ordinále.

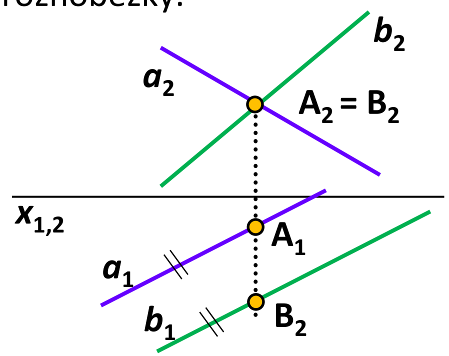
Spoločný bod pôdorysov $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}$ priamok $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ je pôdorysom dvoch rôznych bodov $\mathbf{A} \in \boldsymbol{a}$, $\mathbf{B} \in \boldsymbol{b}$.

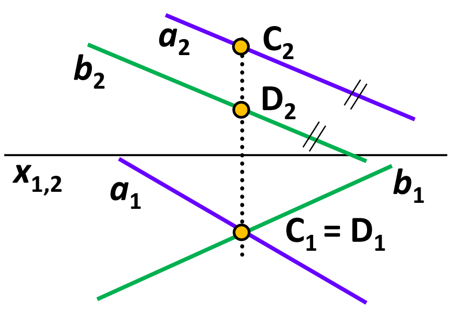
Spoločný bod nárysov $\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b_2}$ je nárysom dvoch rôznych bodov $\mathbf{C} \in \boldsymbol{a}$, $\mathbf{D} \in \boldsymbol{b}$.

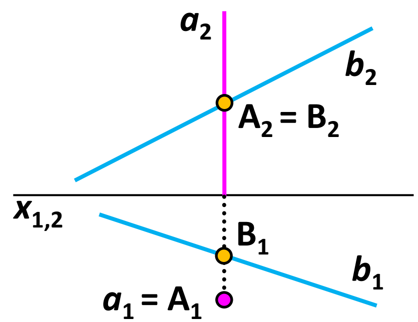


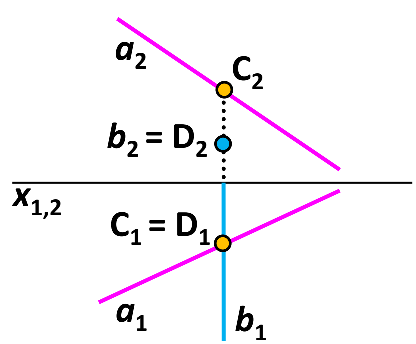
Ak sú **prvé** (**druhé**) **premietacie roviny** mimobežiek **rovnobežné**, tak ich pôdorysom (nárysom) sú dve rovnobežky a nárysom (pôdorysom) dve rôznobežky.

Ak je jedna z mimobežiek **kolmá na pôdorysňu** (**nárysňu**), tak jej pôdorysom (nárysom) je bod, ktorý neleží na pôdoryse (náryse) druhej mimobežky.

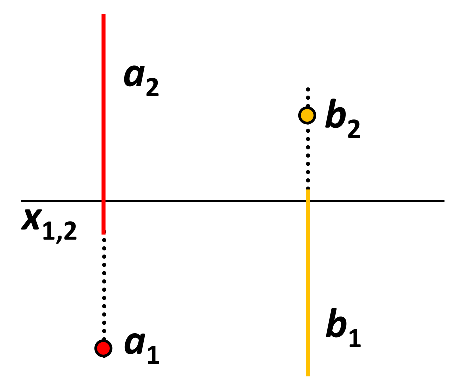






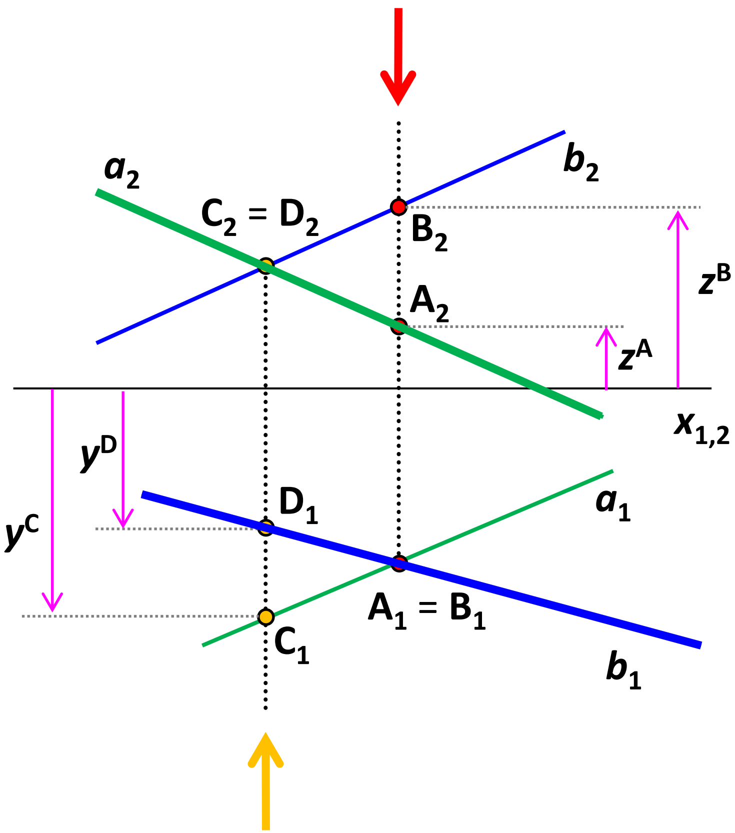


Mimobežky, z ktorých **jedna je kolmá na pôdorysňu** a **druhá** na **nárysňu**, sa premietnu nasledovne:



Určenie viditeľnosti pomocou krycích bodov

Pri zobrazení mimobežných priamok ***a*** a ***b*** v Mongeovej projekcii priesečník pôdorysov, t. j. bod $\mathbf{A_1} = \mathbf{B_1}$, a priesečník nárysov, t. j. bod $\mathbf{C_2} = \mathbf{D_2}$, neležia na jednej ordinále. Nazývame ich **krycie body** a majú význam pri určovaní viditeľnosti.



Viditeľnosť v pôdoryse:
Pôdorys je pohľad zhora, preto je viditeľný ten bod, ktorý je „vyššie“, t. j. má väčšiu ***z***-ovú súradnicu.

Z nárysov bodov **A** a **B** je zrejmé, že bod **B** je vyššie než bod **A** a „zakrýva“ ho pri pohľade zhora.

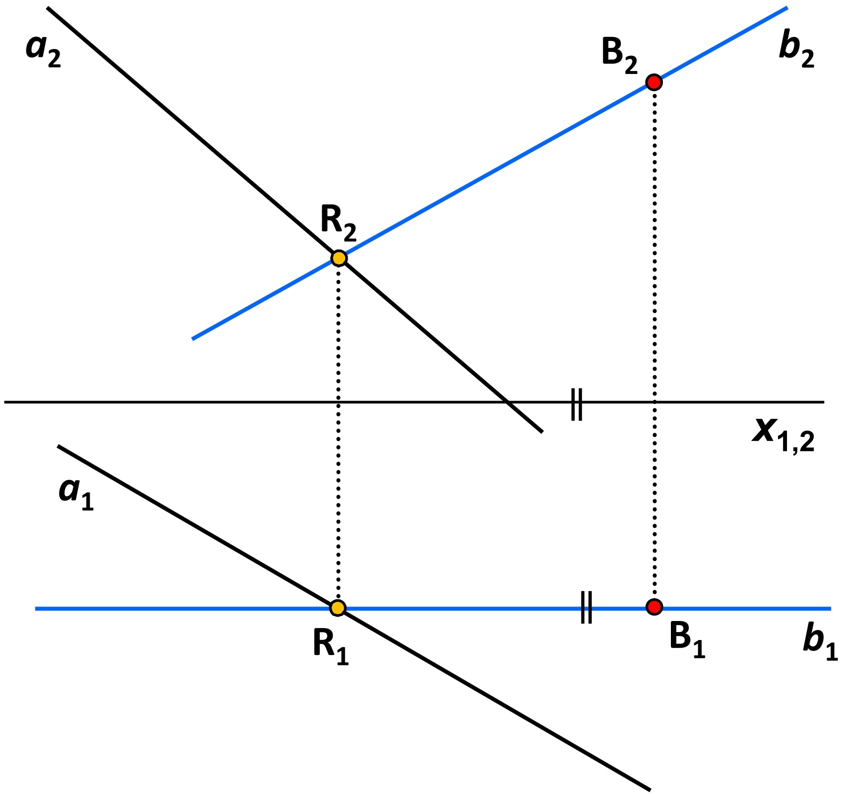
- $A_1 = B_1$ **- krycí bod**, ($A \in a$, $B \in b$)
- $z^B < z^A \rightarrow$ viditeľný je bod **B** na priamke ***b***

Viditeľnosť v náryse:
Nárys je pohľad spredu, preto je viditeľný ten bod, ktorý je „viac vpredu“, t. j. má väčšiu ***y***-ovú súradnicu.
Z pôdorysov bodov **C** a **D** je zrejmé, že bod **C** je pred bodom **D** a „zakrýva“ ho pri pohľade spredu.

- $C_2 = D_2$ **- krycí bod**, ($C \in a$, $D \in b$)
- $y^C > y^D \rightarrow$ viditeľný je bod **C** na priamke ***a***

Poznámka: *Určovanie viditeľnosti použijeme pri zobrazovaní vzájomnej polohy útvarov v priestore (napr. prienik dvoch trojuholníkov) a pri zobrazovaní telies.*

Príklad 10.9: Daná je priamka $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ a bod $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$. Zobrazte priamku $\boldsymbol{b}$, ktorá prechádza bodom **B**, je rôznobežná s priamkou $\boldsymbol{a}$ a rovnobežná s nárysňou.



Postup:

1. V prípade, že priamka je rovnobežná s nárysňou, jej pôdorys je rovnobežný so základnicou $\boldsymbol{x}_{1,2}$:

   $\boldsymbol{b}_1$; $\mathbf{B}_1 \in \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_1 \parallel \boldsymbol{x}_{1,2}$.

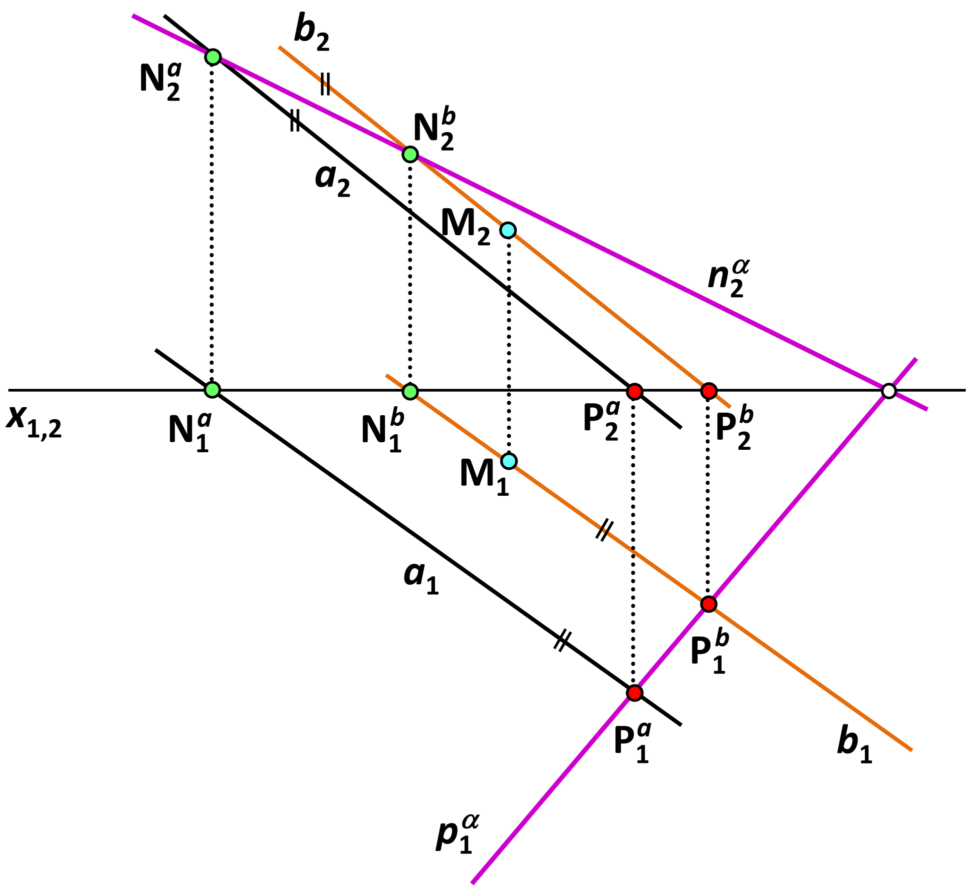
2. Je zrejmé, že ak sú priamky $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ rôznobežné, majú spoločný bod:

   $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$; $\boldsymbol{b}_1 \cap \boldsymbol{a}_1 = \mathbf{R}_1$,
   $\mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_2 \in \boldsymbol{a}_2$.

3. $\boldsymbol{b}_2$; $\boldsymbol{b}_2 = \mathbf{R}_2\mathbf{B}_2$.

Príklad 10.10: Daná je priamka $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ a bod $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$. Zobrazte stopy roviny α, ktorá je určená priamkou $\boldsymbol{a}$ a bodom **M**, $\alpha = (\boldsymbol{a}, \mathbf{M})$.

a)



Postup:

1. V rovine α zostrojíme priamku $\boldsymbol{b}$, ktorá prechádza **M** a je rovnobežná s priamkou $\boldsymbol{a}$:

   b_1; $M_1 \in b_1$, $b_1 \parallel a_1$,

   b_2; $M_2 \in b_2$, $b_2 \parallel a_2$.

2. Zostrojíme pôdorysné a nárysné stopníky priamok $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

3. Zostrojíme stopy roviny α:

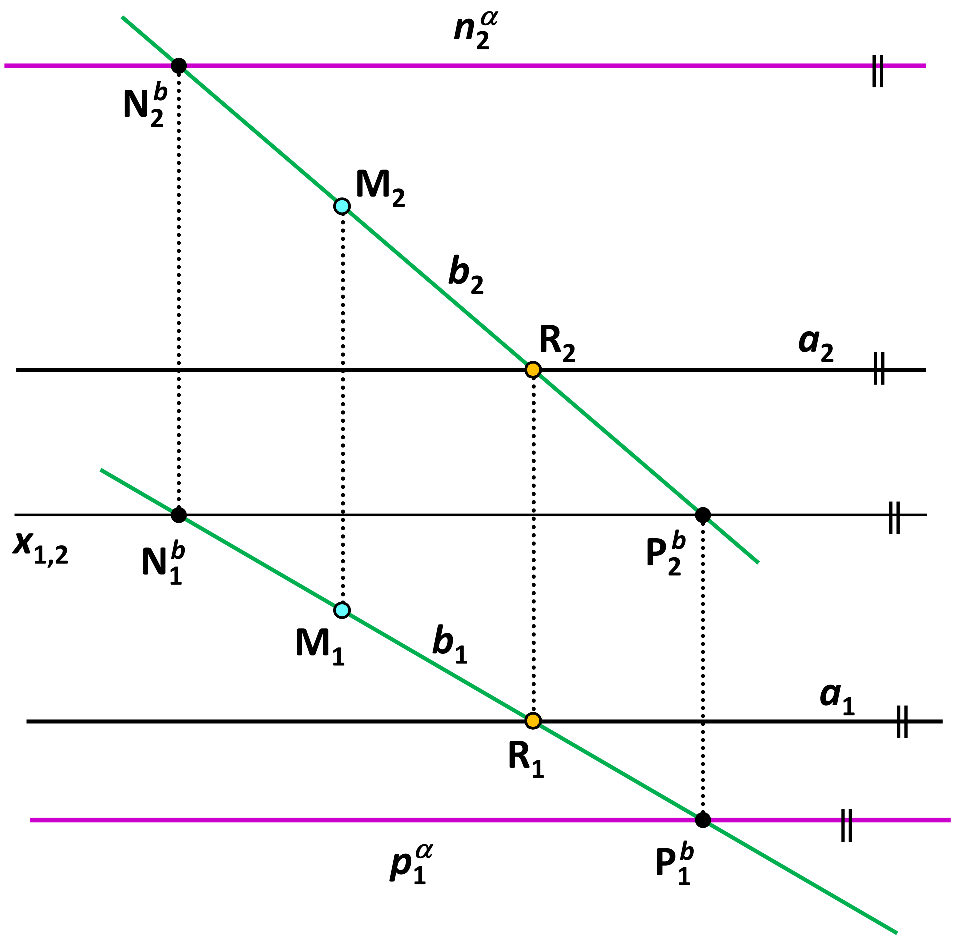
   $p_1^\alpha = P_1^a P_1^b$,

   $n_2^\alpha = N_2^a N_2^b$.

Poznámka: *Stopy roviny α sa pretínajú v spoločnom bode na základnici $x_{1,2}$.*

Príklad 10.10: Daná je priamka $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ a bod $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$. Zobrazte stopy roviny α, ktorá je určená priamkou $\boldsymbol{a}$ a bodom $\mathbf{M}$, $\alpha = (\boldsymbol{a}, \mathbf{M})$.

b)



Z polohy priamky $\boldsymbol{a}$, ktorá je rovnobežná so základnicou, je zrejmé, že rovina α, v ktorej leží, musí byť tiež rovnobežná so základnicou. Následne budú rovnobežné so základnicou aj stopy roviny α.

Postup:

1. V rovine α zostrojíme priamku $\boldsymbol{b}$, ktorá prechádza bodom $\mathbf{M}$ a je rôznobežná s priamkou $\boldsymbol{a}$:

   $\boldsymbol{b}_1$; $\mathbf{M}_1 \in \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_1 \cap \boldsymbol{a}_1 = \mathbf{R}_1$,

   $\boldsymbol{b}_2$; $\mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_2 \in \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_2 = \mathbf{M}_2\mathbf{R}_2$.

2. Zostrojíme stopníky priamky $\boldsymbol{b}$.

3. Zostrojíme stopy roviny α :

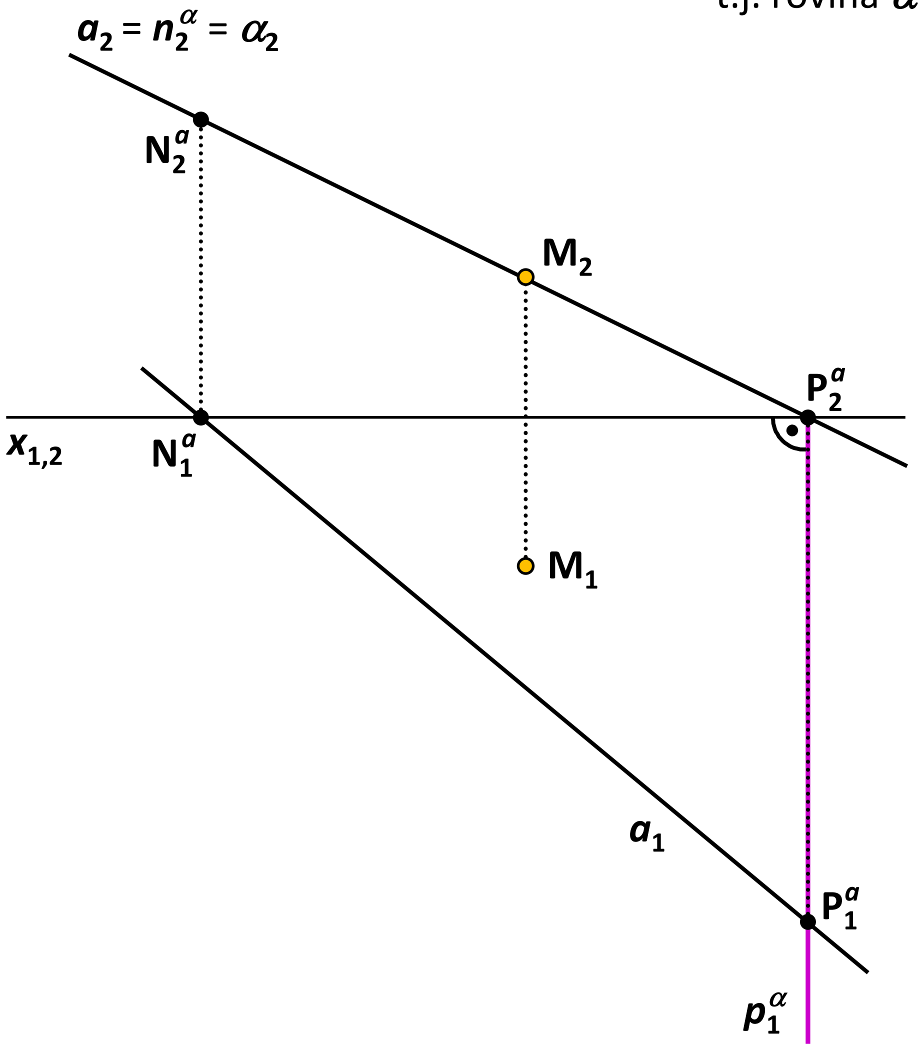
   p_1^α; $\mathbf{P}_1^b \in p_1^\alpha$, $p_1^\alpha \parallel x_{1,2}$.

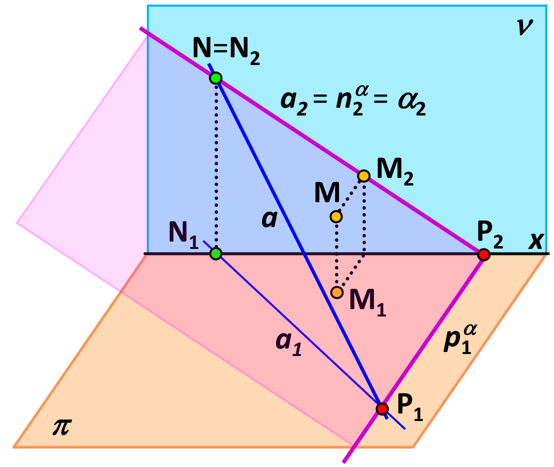
   n_2^α; $\mathbf{N}_2^b \in n_2^\alpha$, $n_2^\alpha \parallel x_{1,2}$.

Príklad 10.10: Daná je priamka $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ a bod $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$. Zobrazte stopy roviny α, ktorá je určená priamkou $\boldsymbol{a}$ a bodom $\mathbf{M}$, $\alpha = (\boldsymbol{a}, \mathbf{M})$.

c)

Podľa situácie v náryse, kde bod $\mathbf{M}_2$ inciduje s priamkou $\boldsymbol{a}_2$, je zrejmé, že bod $\mathbf{M}$ leží v 2. premietacej rovine priamky $\boldsymbol{a}$, t.j. rovina $\alpha = (\boldsymbol{a}, \mathbf{M})$ je rovina kolmá na nárysňu.





Postup:

1. Nárysná stopa aj nárys celej roviny α sú totožné s nárysom $\boldsymbol{a}_2$ priamky $\boldsymbol{a}$:

   n_2^α; $a_2 = n_2^\alpha = \alpha_2$.

2. Pôdorysná stopa roviny prechádza pôdorysným stopníkom priamky $\boldsymbol{a}$ a je kolmá na základnicu $\boldsymbol{x}$.

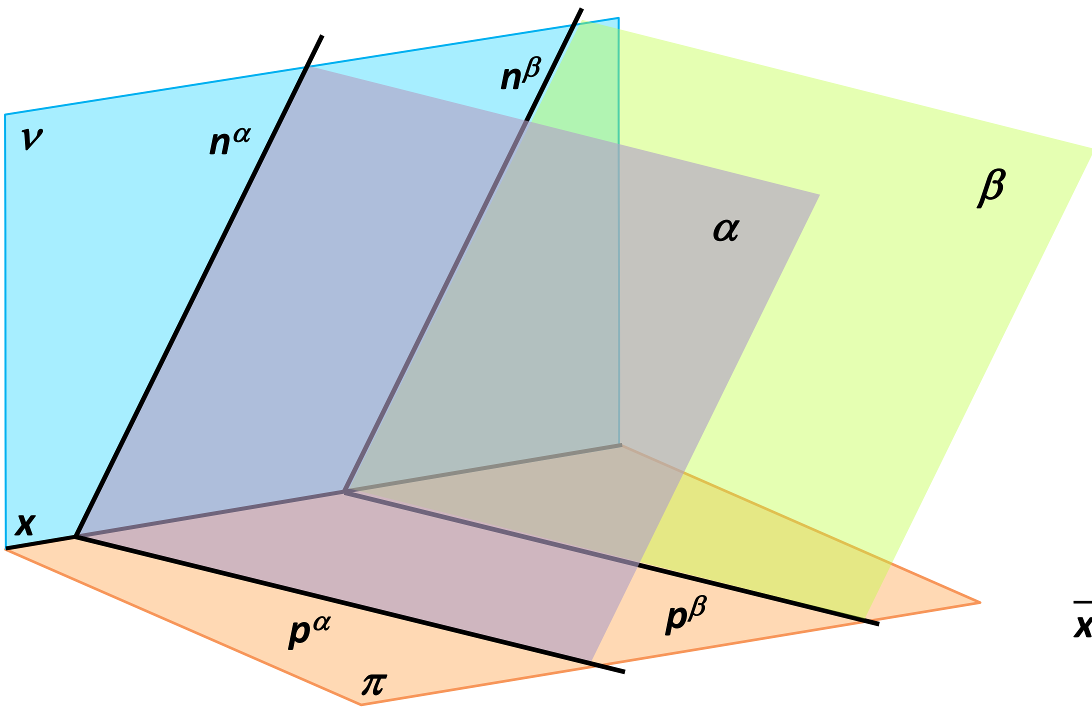
   p_1^α; $P_1^a \in p_1^\alpha$, $p_1^\alpha \parallel x_{1,2}$.

Vzájomná poloha dvoch rovín

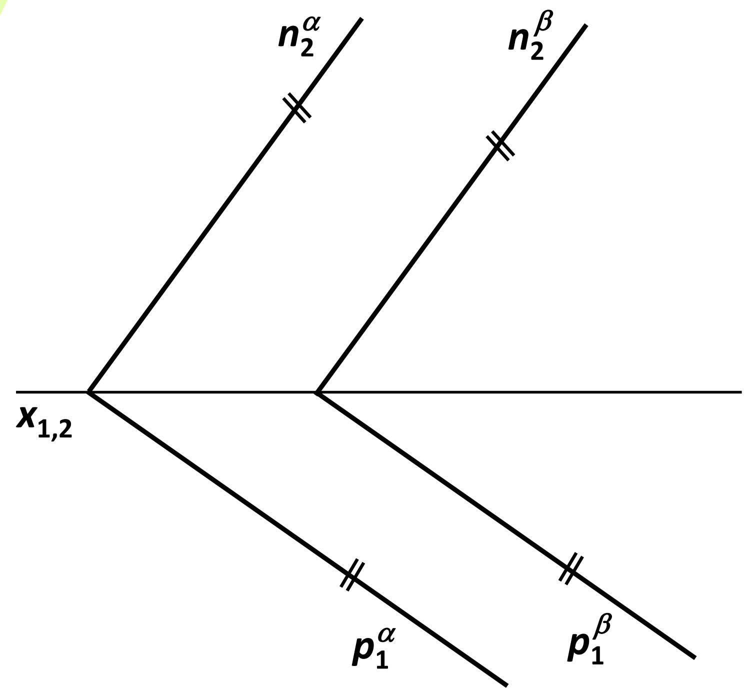
Zobrazenie dvoch rovnobežných rovín

Pri zobrazení rovnobežných rovín vychádzame z poznatku, že ak dve navzájom rovnobežné roviny pretínajú tretiu rovinu (pôdorysňu, nárysňu), tak ich priesečnice s ňou sú navzájom rovnobežné priamky.

Pre rovnobežné roviny $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ z toho vyplýva, že pôdorysná stopa $\boldsymbol{p}^{\alpha}$ bude rovnobežná s pôdorysnou stopou $\boldsymbol{p}^{\beta}$ a nárysná stopa $\boldsymbol{n}^{\alpha}$ bude rovnobežná s nárysnou stopou $\boldsymbol{n}^{\beta}$.



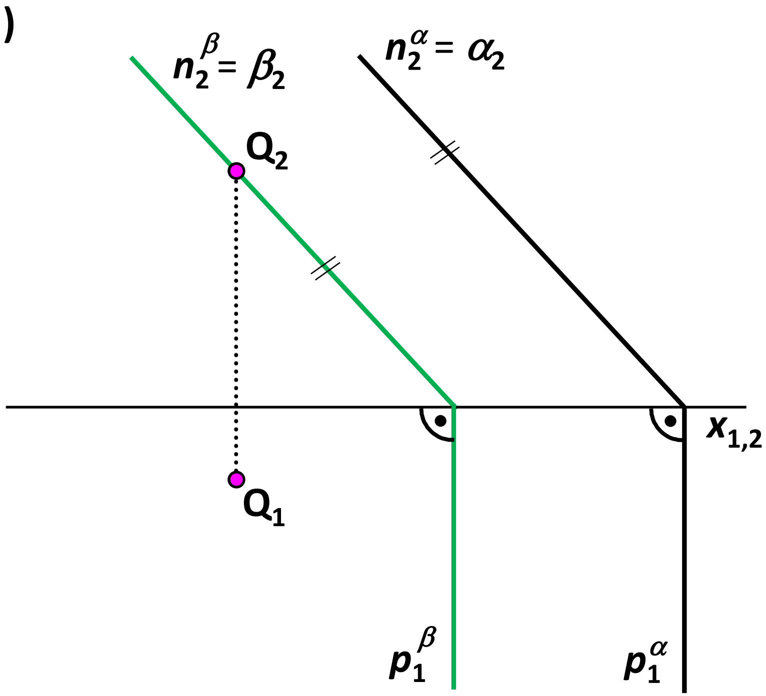
$$\alpha \parallel \beta \rightarrow \boldsymbol{p}_1^{\alpha} \parallel \boldsymbol{p}_1^{\beta},\ \boldsymbol{n}_2^{\alpha} \parallel \boldsymbol{n}_2^{\beta}$$



Poznámka: *Z rovnobežnosti pôdorysných (nárysných) stôp vyplýva, že priemety hlavných priamok 1.osnovy (2.osnovy) sú tiež navzájom rovnobežné.*

Príklad 10.11: Zobrazte stopy roviny β, ktorá je rovnobežná s rovinou α (p_1^α, n_2^α) a inciduje s bodom **Q**(Q_1, Q_2).

a)

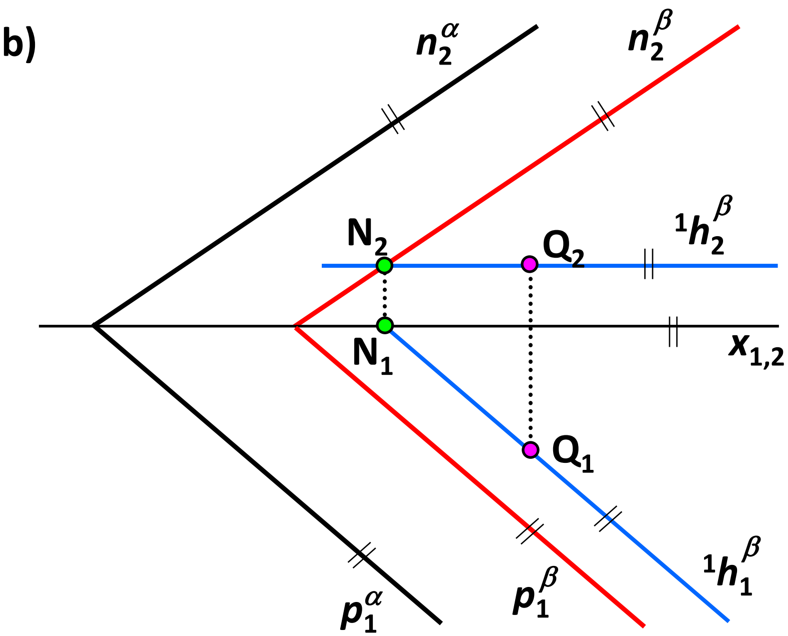


Rovina α je kolmá na nárysňu, preto bude kolmá na nárysňu aj rovina β.

Postup:

1. n_2^β; $Q_2 \in n_2^\beta$, $n_2^\beta \parallel n_2^\alpha$, $n_2^\beta = \beta_2$.
2. p_1^β; $p_1^\beta \perp x_{1,2}$.

b)



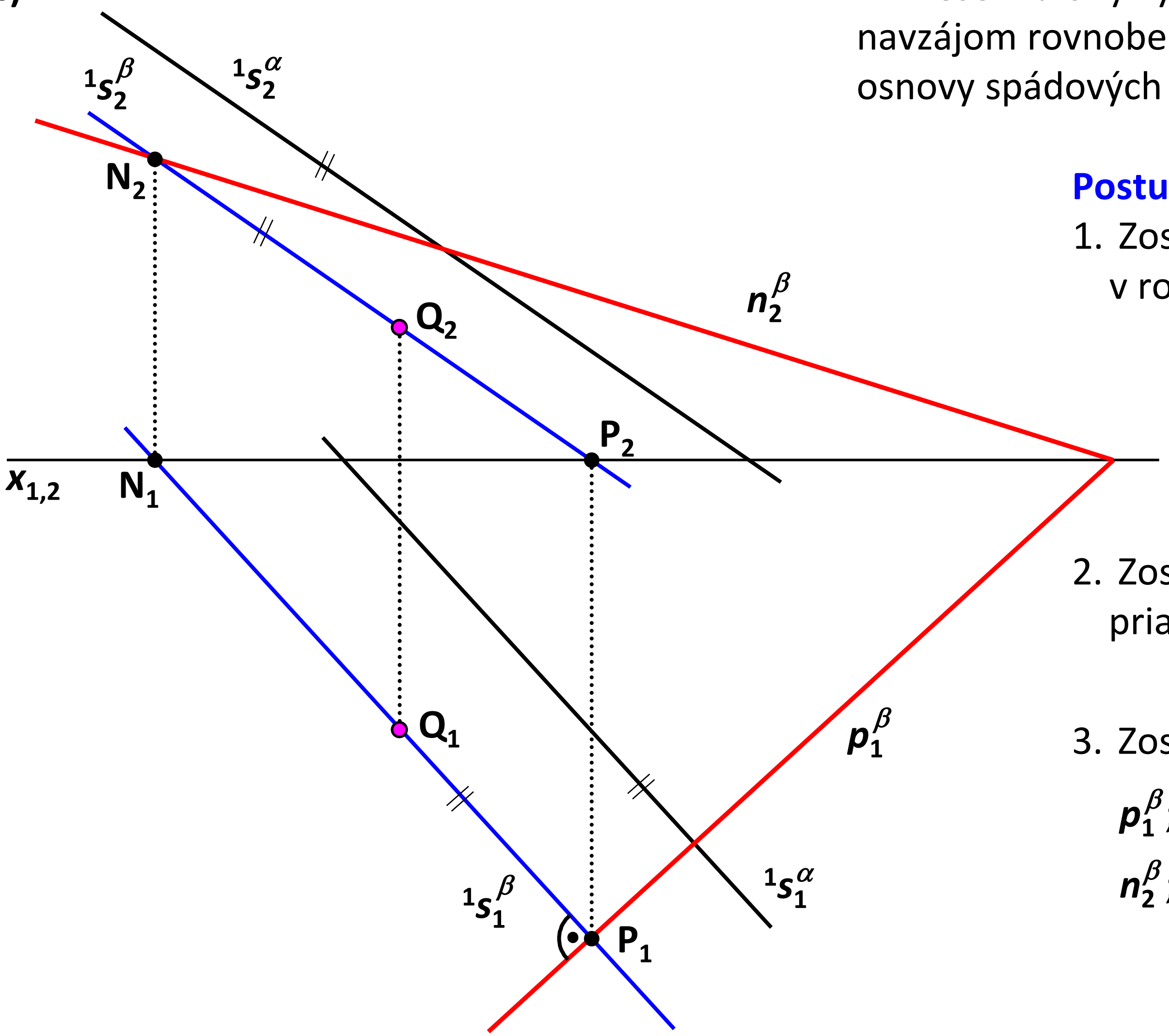
Úlohu vyriešime pomocou hlavnej priamky 1.osnovy roviny β, ktorej pôdorys je rovnobežný s pôdorysnou stopou roviny α.

Postup:

1. ${}^1h_1^\beta$; $Q_1 \in {}^1h_1^\beta$, ${}^1h_1^\beta \parallel p_1^\alpha$.
2. ${}^1h_2^\beta$; $Q_2 \in {}^1h_2^\beta$, ${}^1h_2^\beta \parallel x_{1,2}$.
3. N_1, N_2; ${}^1h_1^\beta \cap x_{1,2} = N_1$, $N_1 \rightarrow N_2 \in {}^1h_2^\beta$.
4. n_2^β; $N_2 \in n_2^\beta$, $n_2^\beta \parallel n_2^\alpha$.
5. p_1^β; $p_1^\beta \parallel p_1^\alpha$.

Príklad 10.11: Zobrazte stopy roviny β, ktorá je rovnobežná s rovinou α (${}^1s_1^\alpha$, ${}^1s_2^\alpha$) a inciduje s bodom **Q**(**Q**$_1$, **Q**$_2$).

c)



Pri riešení úlohy vychádzame z poznatku, že v navzájom rovnobežných rovinách sú aj ich príslušné osnovy spádových priamok navzájom rovnobežné.

Postup:

1. Zostrojíme spádovú priamku 1.osnovy v rovine β prechádzajúcu bodom **Q**:

   $${}^1s_1^\beta;\ Q_1 \in {}^1s_1^\beta,\ {}^1s_1^\beta \,||\, {}^1s_1^\alpha,$$

   $${}^1s_2^\beta;\ Q_2 \in {}^1s_2^\beta,\ {}^1s_2^\beta \,||\, {}^1s_2^\alpha.$$

2. Zostrojíme príslušné stopníky spádovej priamky ${}^1s_1^\beta$.

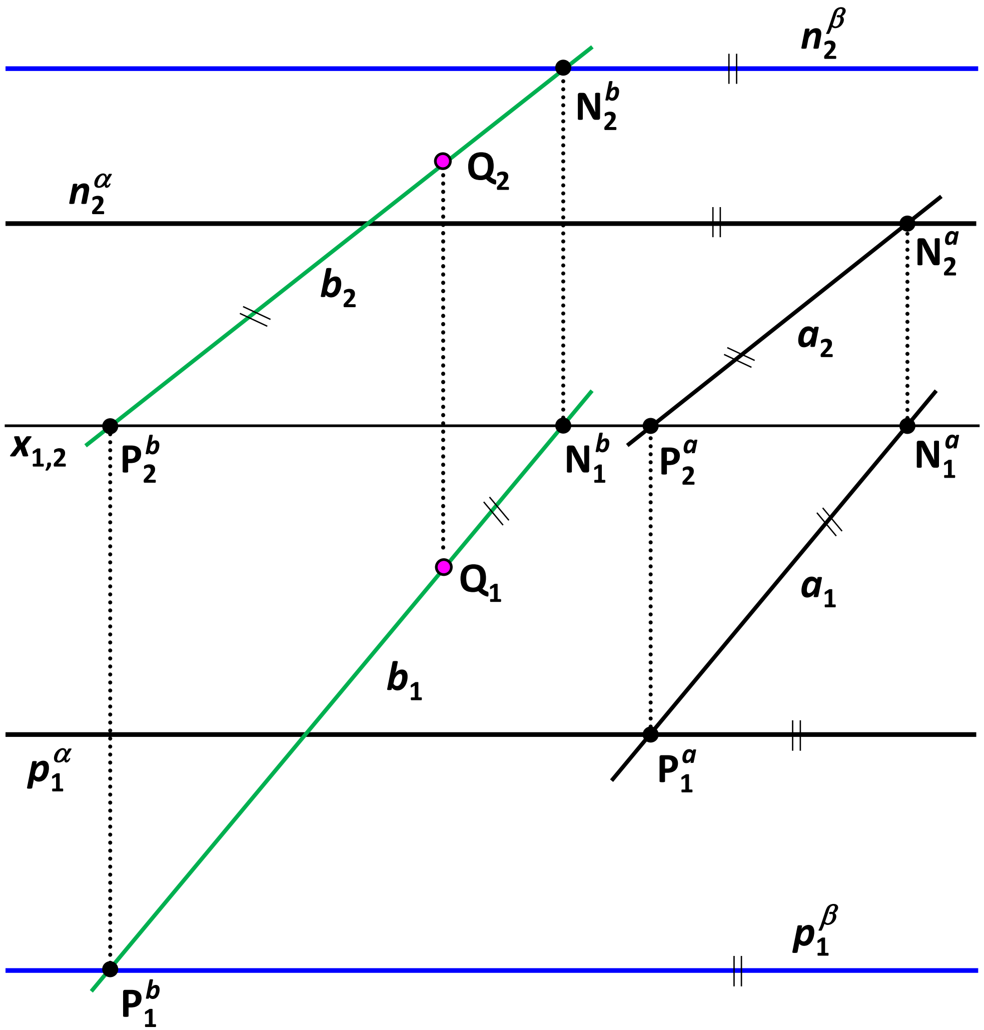
3. Zostrojíme stopy roviny β:

   $$p_1^\beta;\ P_1 \in p_1^\beta,\ p_1^\beta \perp {}^1s_1^\beta.$$

   $$n_2^\beta;\ N_2 \in n_2^\beta.$$

Príklad 10.11: Zobrazte stopy roviny β, ktorá je rovnobežná s rovinou α (p_1^α, n_2^α) a inciduje s bodom **Q**(**Q**$_1$, **Q**$_2$).

d)



V tomto prípade využijeme ľubovoľnú priamku roviny α a priamku ležiacu v rovine β, ktorá je s ňou rovnobežná a inciduje s bodom **Q**.

Postup:

1. V rovine α zostrojíme ľubovoľnú priamku ***a***. Zvolíme v pôdoryse priemet a_1. Priemet a_2 v náryse dourčíme pomocou stopníkov.

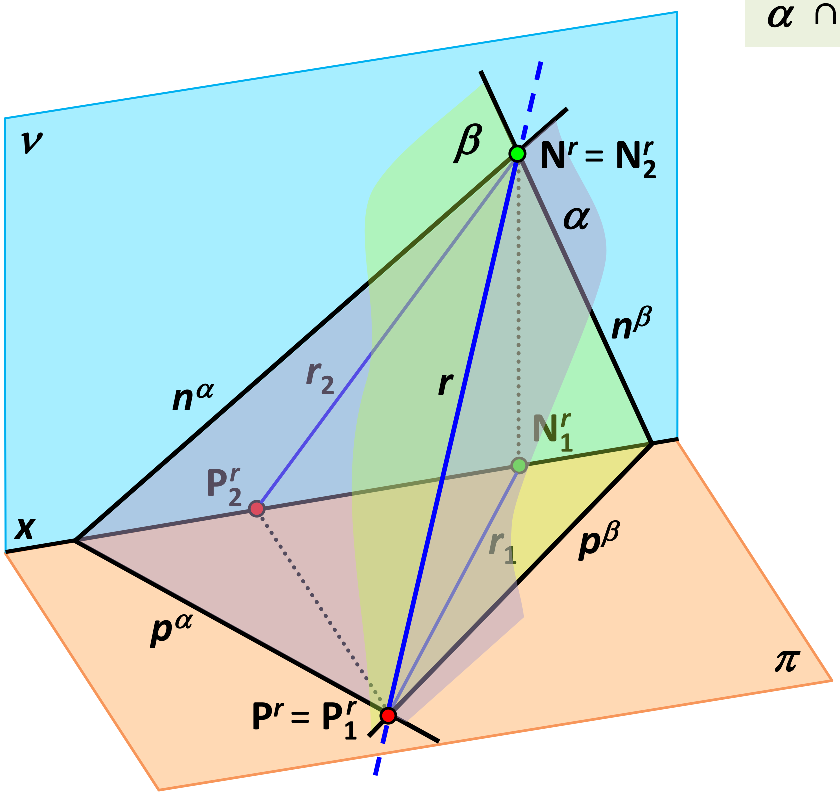
2. Bodom **Q** v rovine β zostrojíme priamku ***b***, rovnobežnú s priamkou ***a*** z roviny α. Určíme jej stopníky.

3. Stopy roviny β sú rovnobežné so stopami roviny α (resp. s osou $x_{1,2}$) a prechádzajú príslušnými stopníkmi priamky ***b***.

Zobrazenie dvoch rôznobežných rovín

Dve rôznobežné roviny majú spoločnú priamku. Na zostrojenie tejto priesečnice stačí určiť jej dva rôzne body. V prípade rovín daných stopami, môžeme za tieto dva body považovať priesečníky pôdorysných a nárysných stôp oboch rovín.

Pre rôznobežné roviny α a β je priesečník ich pôdorysných stôp p^α a p^β bod $\mathbf{P}^r$, ktorý je pôdorysným stopníkom ich priesečnice r. Priesečník nárysných stôp n^α a n^β je bod $\mathbf{N}^r$, ktorý je nárysným stopníkom priesečnice r.



$\alpha \cap \beta = r$

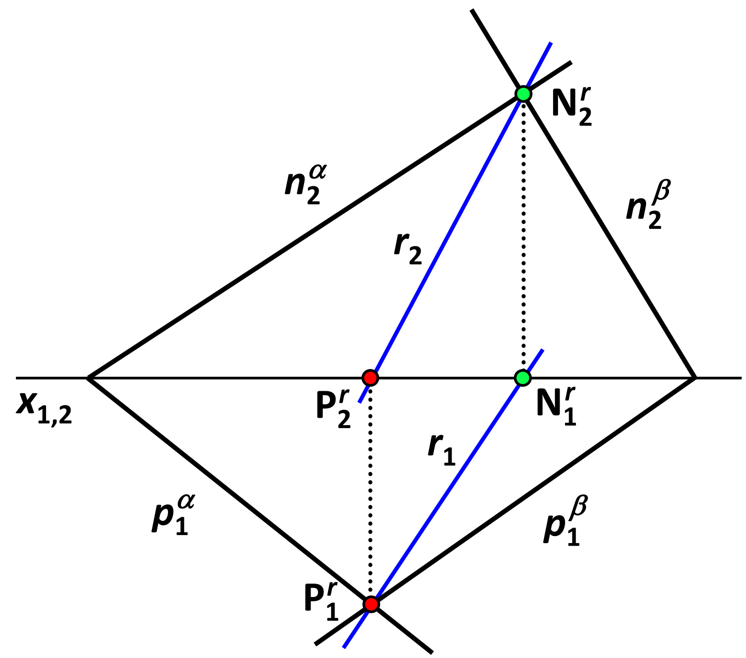
$\rightarrow p^\alpha \cap p^\beta = \mathbf{P}^r$

$\rightarrow n^\alpha \cap n^\beta = \mathbf{N}^r$

$\rightarrow r = \mathbf{P}^r\mathbf{N}^r$

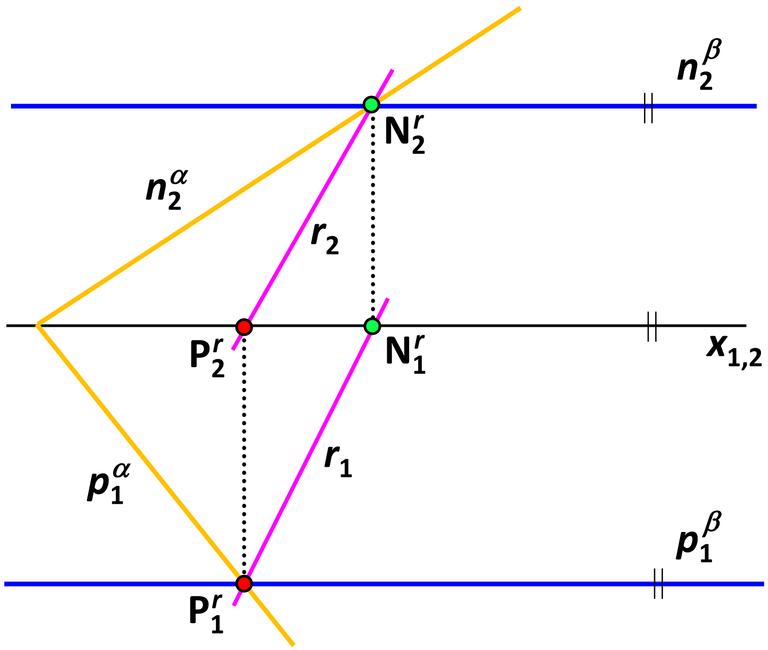
$r_1 = \mathbf{P}^r_1 \mathbf{N}^r_1$

$r_2 = \mathbf{P}^r_2 \mathbf{N}^r_2$



Príklad 10.12: Zostrojte priesečnicu rovín $\alpha\,(p_1^\alpha, n_2^\alpha)$ a $\beta\,(p_1^\beta, n_2^\beta)$.

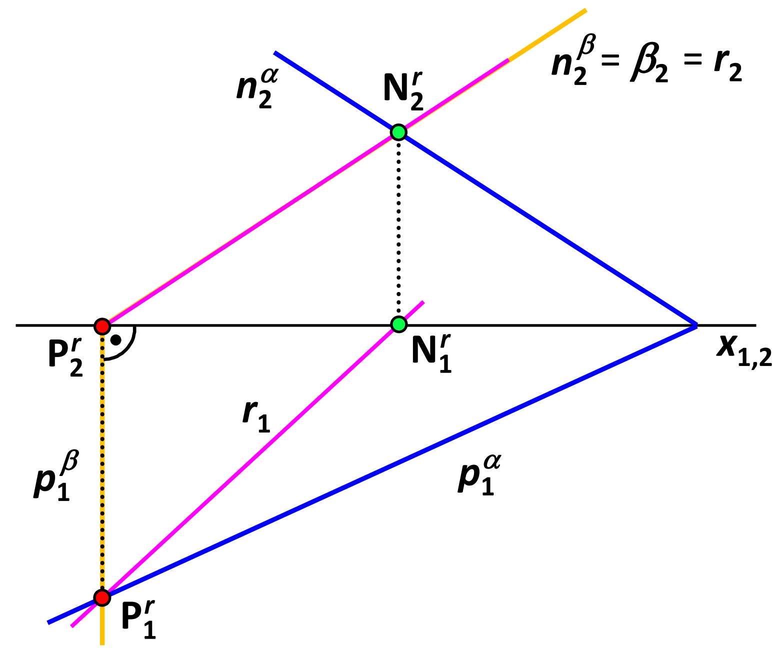
a) Rovina β je rovnobežná so základnicou.



Postup:

1. P_1^r ; $p_1^\alpha \cap p_1^\beta = P_1^r$.
2. N_2^r ; $n_2^\alpha \cap n_2^\beta = N_2^r$.
3. P_2^r, N_1^r; $P_1^r \longrightarrow P_2^r \in x_{1,2}$,
   $N_2^r \longrightarrow N_1^r \in x_{1,2}$.
4. r_1, r_2 ; $r_1 = N_1^r P_1^r$,
   $r_2 = N_2^r P_2^r$.

b) Rovina β je kolmá na nárysňu.

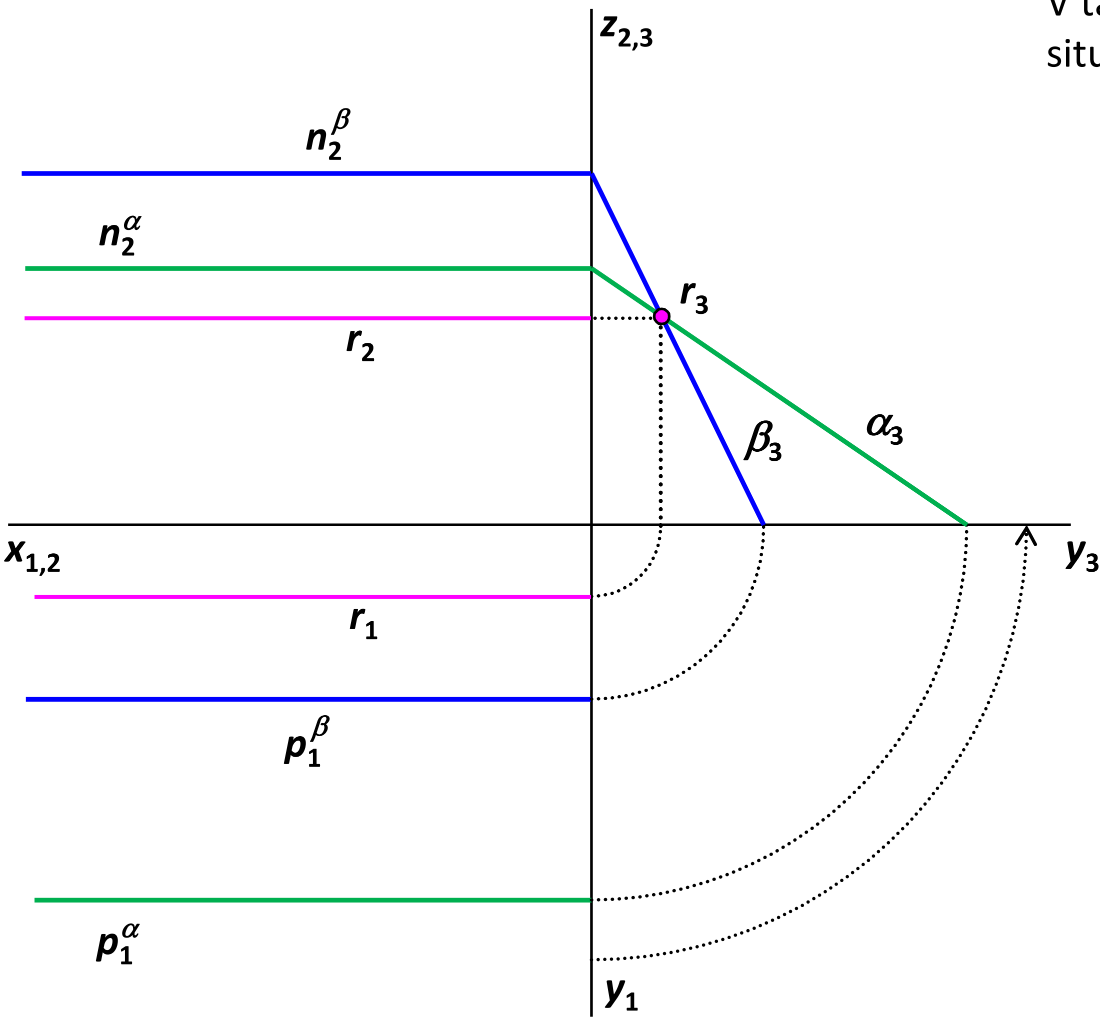


Postup:

Úlohu riešime analogicky ako v prípade **a)**. Keďže rovina β je kolmá na nárysňu, jej druhý priemet je priamka $n_2^\beta = \beta_2$. Potom aj nárys r_2 priesečnice r bude totožný s nárysnou stopou n_2^β.

Príklad 10.12: Zostrojte priesečnicu rovín $\alpha\,(p_1^{\alpha}, n_2^{\alpha})$ a $\beta\,(p_1^{\beta}, n_2^{\beta})$.

c) Obe roviny sú rovnobežné so základnicou.



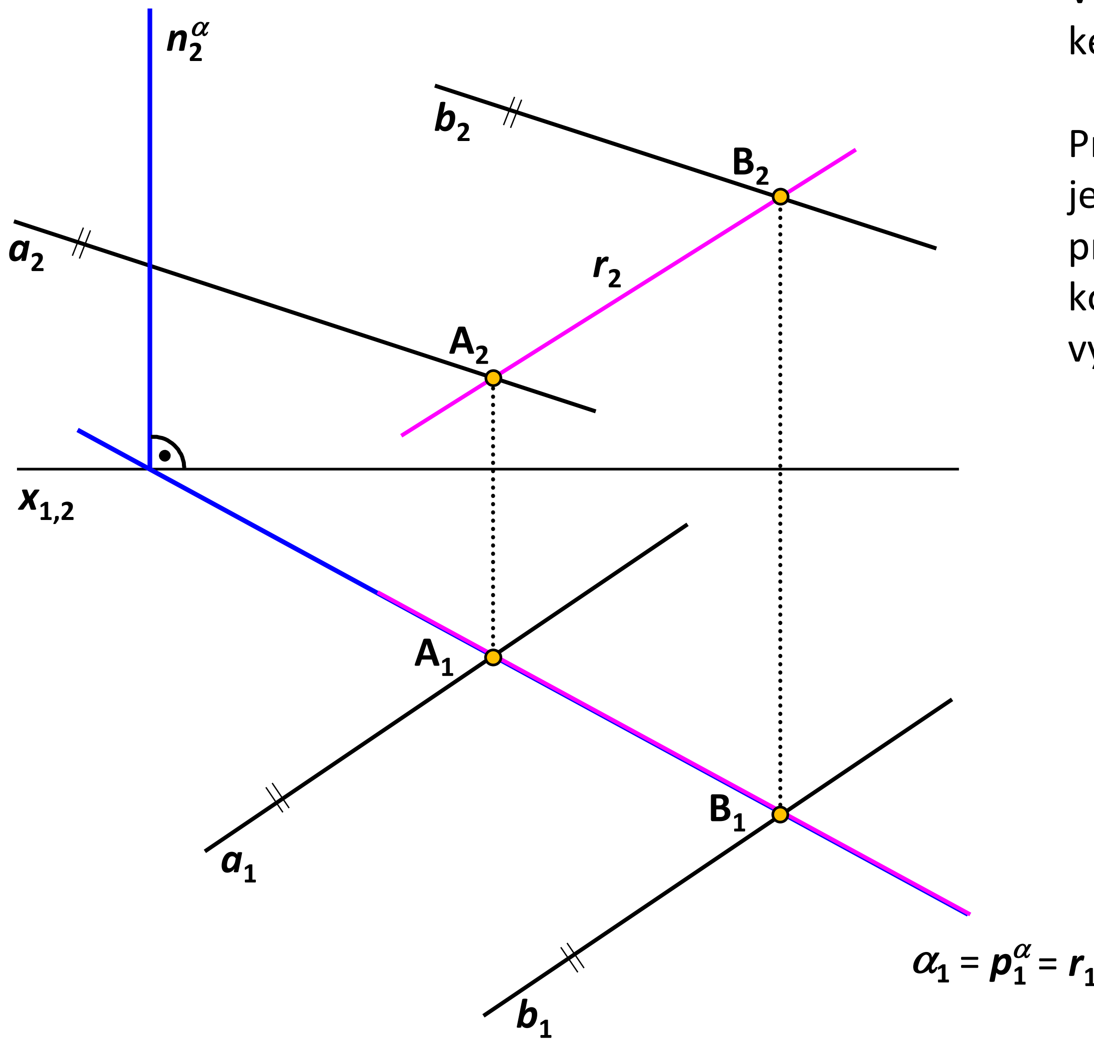
V takomto prípade je výhodné premietnuť situáciu do tretej priemetne.

Postup:

1. Keďže obe roviny sú na bokorysňu kolmé, ich tretie priemety α_3 a β_3 budú priamky.

2. Bokorys ich priesečnice r je teda bod r_3. Následne pomocou ordinál odvodíme jej pôdorys r_1 a nárys r_2. Sú to priamky rovnobežné so základnicou $x_{1,2}$.

Príklad 10.13: Zostrojte priesečnicu rovín $\alpha\,(\alpha_1)$ a $\beta = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $\alpha \perp \pi$, $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.



V tomto prípade zostrojíme priesečnicu ***r*** aj keď nepoznáme stopy roviny.

Pre rovinu α, ktorá je kolmá na pôdorysňu, je prvým priemetom a zároveň stopou priamka α_1. Nárysnú stopu vieme zostrojiť kolmo na základnicu, no nebudeme ju využívať.

Postup:

1. Pôdorys r_1 priesečnice ***r***, keďže patrí do roviny α, je totožný s priamkou α_1.
2. Priamka ***r*** zároveň leží v rovine β a pretína priamky ***a*** a ***b*** v bodoch **A** a **B**. Zostrojíme postupne ich pôdorysy a nárysy.
3. Zostrojíme nárys r_2 priamky ***r***, $r_2 = A_2B_2$.

Vzájomná poloha priamky a roviny

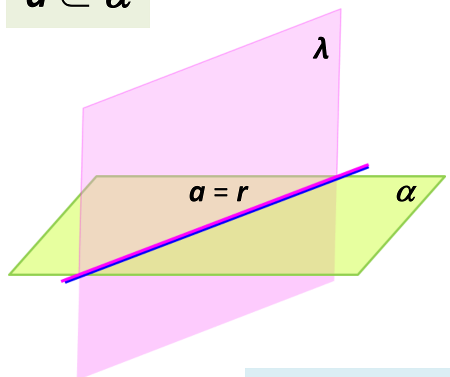
Princíp určovania vzájomnej polohy priamky a roviny

Čo sa týka vzájomnej polohy priamky a roviny, je zrejmé, že priamka môže v rovine ležať, alebo s ňou môže byť rovnobežná či rôznobežná. V poslednom prípade, majú priamka a rovina spoločný bod, priesečník.

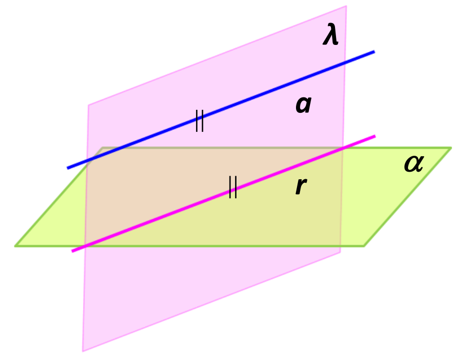
Ak priamka $\boldsymbol{a}$ ani rovina α nie sú premietacie, môžeme pri určovaní ich vzájomnej polohy uplatniť nasledujúci princíp:

1. Priamkou $\boldsymbol{a}$ vedieme rovinu $\boldsymbol{\lambda}$, ktorá je s rovinou α rôznobežná:
   - $\boldsymbol{\lambda}$; $\boldsymbol{a} \subset \boldsymbol{\lambda}$.
2. Určíme priesečnicu $\boldsymbol{r}$ roviny $\boldsymbol{\lambda}$ a roviny α :
   - $\boldsymbol{r}$; $\boldsymbol{\lambda} \cap \alpha = \boldsymbol{r}$.
3. Podľa vzájomnej polohy priamok $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{r}$ určíme vzájomnú polohu priamky $\boldsymbol{a}$ a roviny α :
   - $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} \;\rightarrow\; \boldsymbol{a} \subset \alpha$
   - $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{r} \;\rightarrow\; \boldsymbol{a} \parallel \alpha$
   - $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{r} = \mathbf{R} \;\rightarrow\; \boldsymbol{a} \cap \alpha = \mathbf{R}$

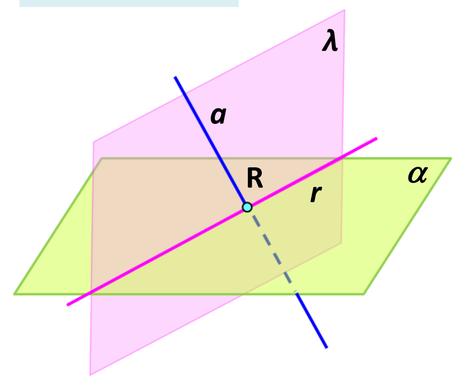
$\boldsymbol{a} \subset \alpha$



$\boldsymbol{a} \parallel \alpha$



$\boldsymbol{a} \cap \alpha = \mathbf{R}$



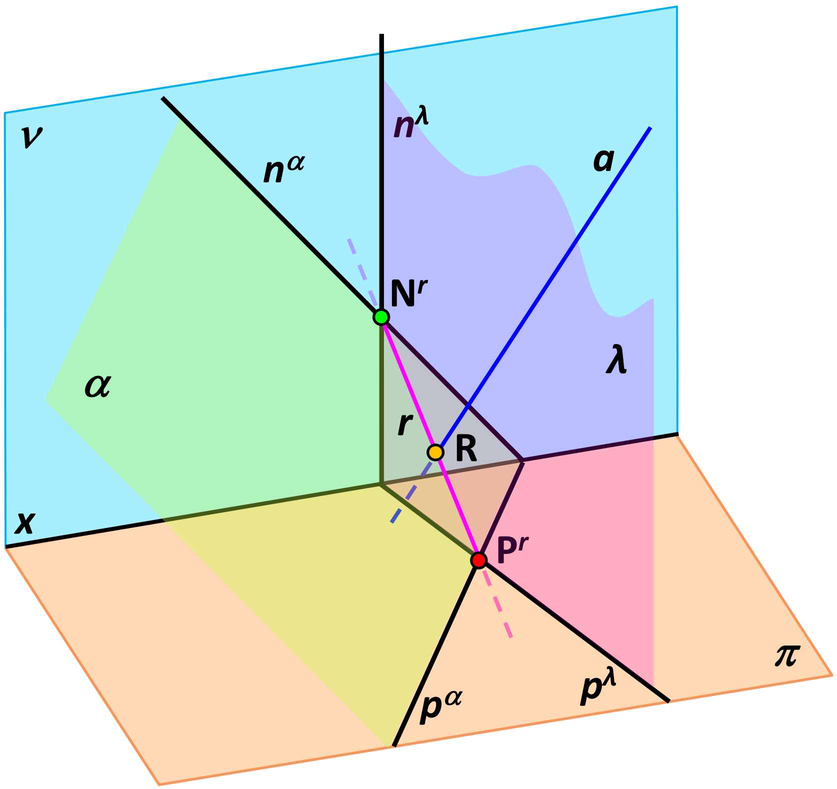
Poznámka: *Rovinu* $\boldsymbol{\lambda}$ *volíme vhodne tak, aby konštrukcia priesečnice* $\boldsymbol{r}$ *bola čo najjednoduchšia (zvyčajne ako premietaciu rovinu priamky* $\boldsymbol{a}$*, teda kolmo na pôdorysňu alebo nárysňu).*

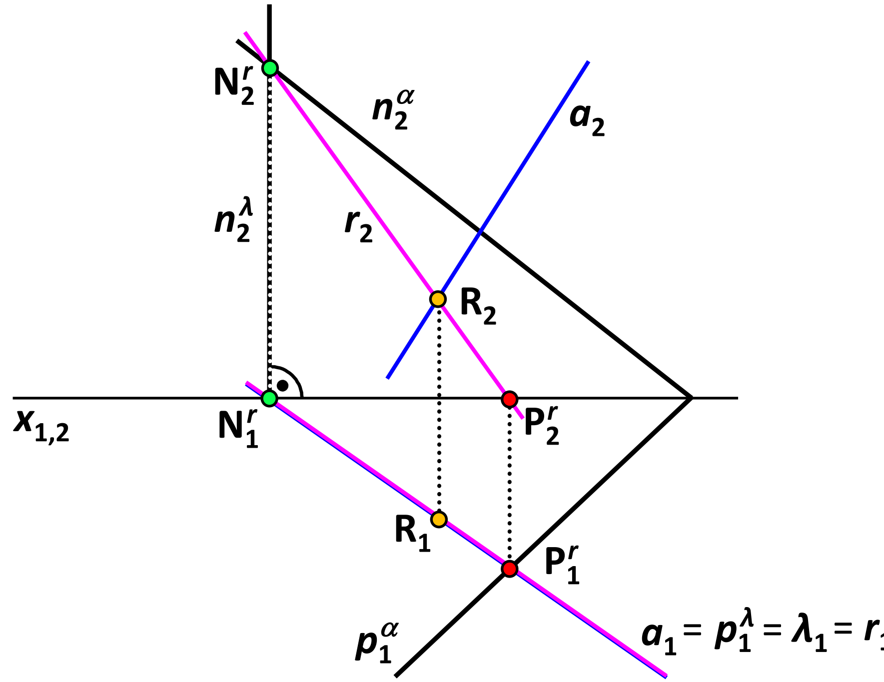
Poznámka: *Tento postup môžeme aplikovať vo všetkých zobrazovacích metódach.*

Priesečník priamky s rovinou – metóda krycej priamky

Príklad 10.14: Zostrojte priesečník priamky $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2})$ a roviny $\alpha\,(\boldsymbol{p_1^{\alpha}},\, \boldsymbol{n_2^{\alpha}})$.

Pri riešení v Mongeovej projekcii aplikujeme princíp vysvetlený na predchádzajúcej strane.





Postup:

1. $\boldsymbol{\lambda};\ \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\lambda} \perp \pi$ $\quad \rightarrow\ \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{p_1^{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda_1},$ $\boldsymbol{n_2^{\lambda}} \perp \boldsymbol{x_{1,2}}.$

2. $\boldsymbol{r};\ \alpha \cap \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{r}$ $\quad \rightarrow\ \boldsymbol{r_1} = \mathbf{P_1^{\mathit{r}}}\mathbf{N_1^{\mathit{r}}},$ $\boldsymbol{r_2} = \mathbf{P_2^{\mathit{r}}}\mathbf{N_2^{\mathit{r}}}.$

3. $\mathbf{R};\ \boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{r} = \mathbf{R}$ $\quad \rightarrow\ \mathbf{R_2} \in \boldsymbol{a_2} \cap \boldsymbol{r_2},$ $\mathbf{R_2} \rightarrow \mathbf{R_1} \in \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{r_1}.$

$\rightarrow \boldsymbol{a} \cap \alpha = \mathbf{R}$

Poznámka: *Keďže pri takto zvolenej rovine* $\boldsymbol{\lambda}$ *sú pôdorysy priamok* ***a*** *a* ***r*** *totožné,* $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{r_1}$*, hovoríme, že priamka* ***r*** *je* ***krycia priamka*** *priamky* ***a****. Tento postup hľadania prieniku priamky a roviny preto nazývame* ***metóda krycej priamky****.*

Priesečník priamky s rovinou – metóda krycej priamky

Príklad 10.14: Zostrojte priesečník priamky $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2})$ a roviny $\alpha\,(p_1^\alpha, n_2^\alpha)$.

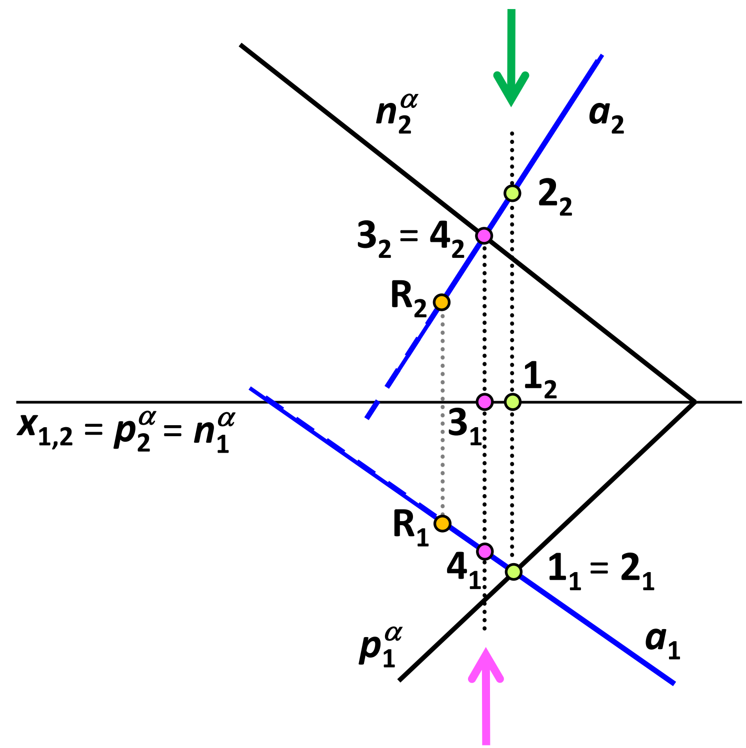
4. Na záver určíme viditeľnosť priamky ***a*** vzhľadom na rovinu α. Postupujeme analogicky ako na strane 6.

Viditeľnosť v pôdoryse:
Ako krycí bod uvažujeme bod, kde sa zdanlivo pretínajú priamky p_1^α a a_1:

- $1_1 = 2_1$ **- krycí bod**, ($1 \in \alpha$, $2 \in a$),
- $z^1 < z^2 \rightarrow$ viditeľný je bod **2** na priamke ***a***,
  $\rightarrow$ t. j., viditeľná je polpriamka **R2**.

Viditeľnosť v náryse:
Ako krycí bod uvažujeme bod, kde sa zdanlivo pretínajú priamky n_2^α a a_2:

- $3_2 = 4_2$ **- krycí bod**, ($3 \in \alpha$, $4 \in a$),
- $y^3 < y^4 \rightarrow$ viditeľný je bod **4** na priamke ***a***,
  $\rightarrow$ t. j., viditeľná je polpriamka **R4**.

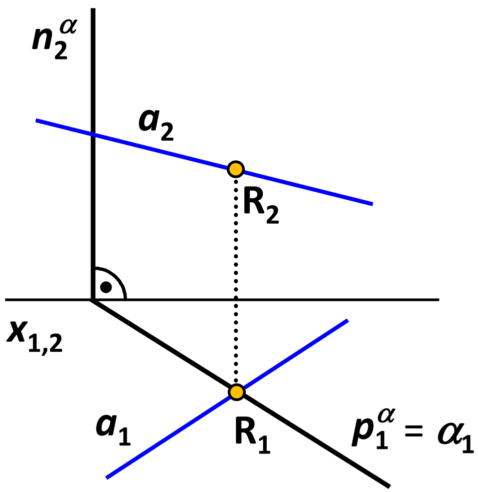


Priesečník priamky s rovinou – špeciálne prípady

Za špeciálne považujeme prípady, keď je priamka alebo rovina premietacia, t. j. kolmá na priemetňu.

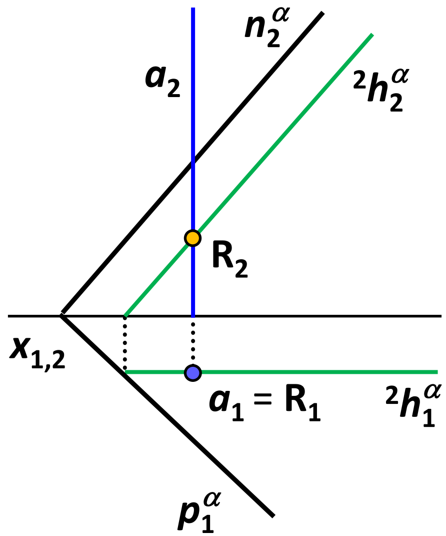
Príklad 10.15: Zostrojte priesečník priamky $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ a roviny $\alpha\,(\boldsymbol{p}_1^{\alpha},\, \boldsymbol{n}_2^{\alpha})$.

a) $\alpha \perp \pi$



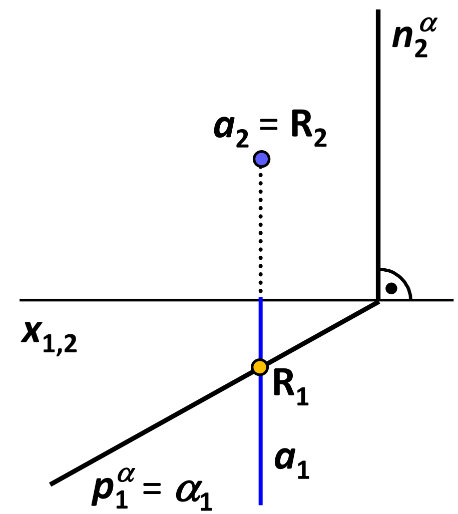
Postup:
Keďže v pôdoryse sa rovina α premieta do priamky α_1, priesečník $\mathbf{R}_1$ určíme ako prienik priamok $\boldsymbol{a}_1$ a α_1. Nárys $\mathbf{R}_2$ odvodíme pomocou ordinály.

b) $\boldsymbol{a} \perp \pi$



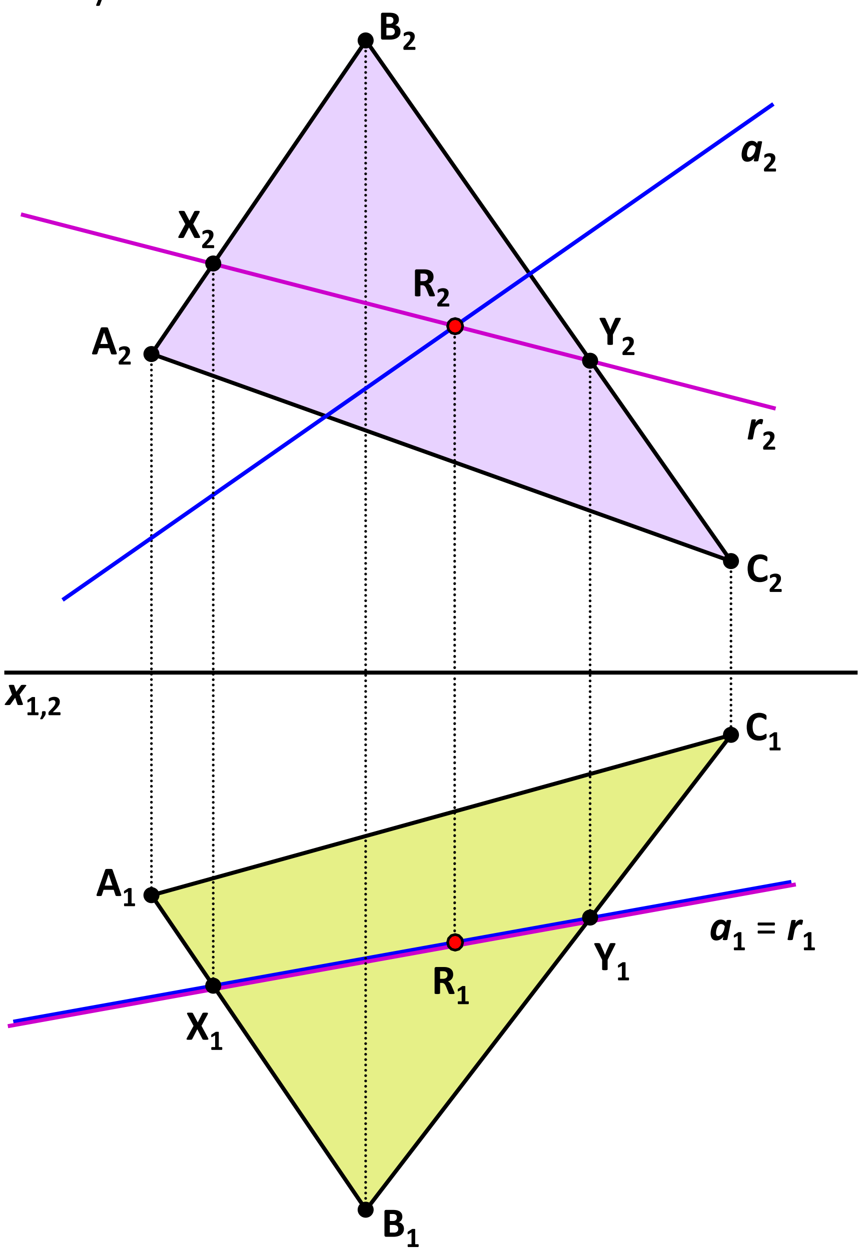
Postup:
Keďže pôdorysom priamky $\boldsymbol{a}$ je bod $\boldsymbol{a}_1$, je zrejmé, že pôdorys $\mathbf{R}_1$ priesečníka **R** je s ním totožný. Jeho nárys $\mathbf{R}_2$ určíme pomocou hlavnej priamky roviny α (v tomto prípade druhej osnovy), ktorá ním prechádza.

c) $\alpha \perp \pi,\ \boldsymbol{a} \perp \nu$

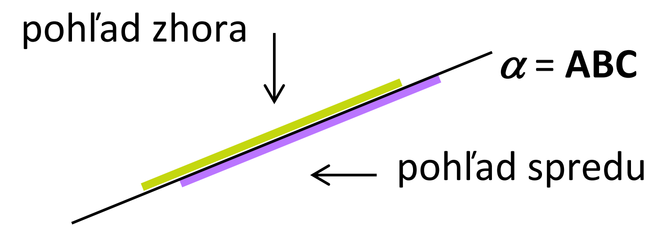


Postup:
Pôdorys $\mathbf{R}_1$ je opäť prienikom priamok $\boldsymbol{a}_1$ a α_1. Jeho nárys $\mathbf{R}_2$ je totožný s bodom $\boldsymbol{a}_2$, ktorý je nárysom priamky $\boldsymbol{a}$.

Príklad 10.16: Zostrojte priesečník priamky $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ s trojuholníkom **ABC**, ktorý je daný svojím pôdorysom a nárysom.



Z dôvodu názornosti môžeme farebne odlíšiť plochu trojuholníka pri pohľade zhora a spredu:



Postup:

Použijeme metódu krycej priamky:

1. $\boldsymbol{\lambda}$; $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\lambda} \perp \pi$

2. $\boldsymbol{r}$; $\alpha \cap \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{r}$ $\quad \rightarrow$ $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{r}_1$ - **krycia priamka**

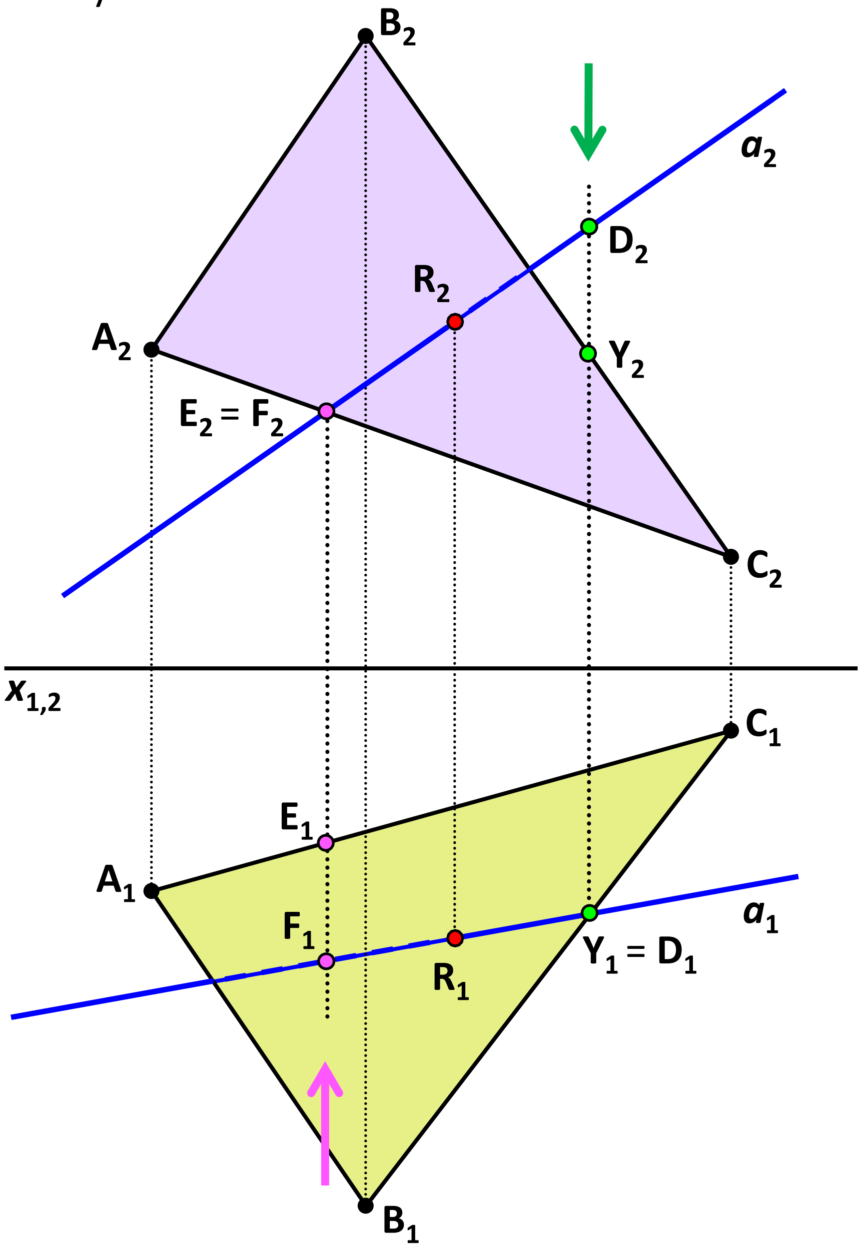
   Je zrejmé, že ak priamka $\boldsymbol{r}$ patrí aj do roviny trojuholníka **ABC**, má spoločné body **X** a **Y** s priamkami **AB** a **BC**:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{X_1};\ \boldsymbol{r}_1 \cap \mathbf{A_1B_1} = \mathbf{X_1}, & \mathbf{X_1} \rightarrow \mathbf{X_2} \in \mathbf{A_2B_2}, \\ \mathbf{Y_1};\ \boldsymbol{r}_1 \cap \mathbf{B_1C_1} = \mathbf{Y_1}, & \mathbf{Y_1} \rightarrow \mathbf{Y_2} \in \mathbf{B_2C_2}, \end{array}\right. \rightarrow \boldsymbol{r}_2 = \mathbf{X_2Y_2}.$$

3. **R**; $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{r} = \mathbf{R}$ $\rightarrow \mathbf{R_2} = \boldsymbol{a}_2 \cap \boldsymbol{r}_2$,
   $\mathbf{R_2} \rightarrow \mathbf{R_1} \in \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{r}_1$.

$\rightarrow \boldsymbol{a} \cap \alpha = \mathbf{R}$

Príklad 10.16: Zostrojte priesečník priamky $a(a_1,a_2)$ s trojuholníkom **ABC**, ktorý je daný svojím pôdorysom a nárysom.



4. Na záver určíme viditeľnosť priamky a vzhľadom na trojuholník **ABC**.

Viditeľnosť v pôdoryse:
Ako krycí bod uvažujeme bod, kde sa zdanlivo pretínajú priamky a_1 a B_1C_1:

- $Y_1 = D_1$ **- krycí bod**, ($Y \in BC$, $D \in a$),
- $z^Y < z^D \rightarrow$ viditeľný je bod **D** na priamke a,

  $\rightarrow$ t. j., viditeľná je polpriamka **RD**.

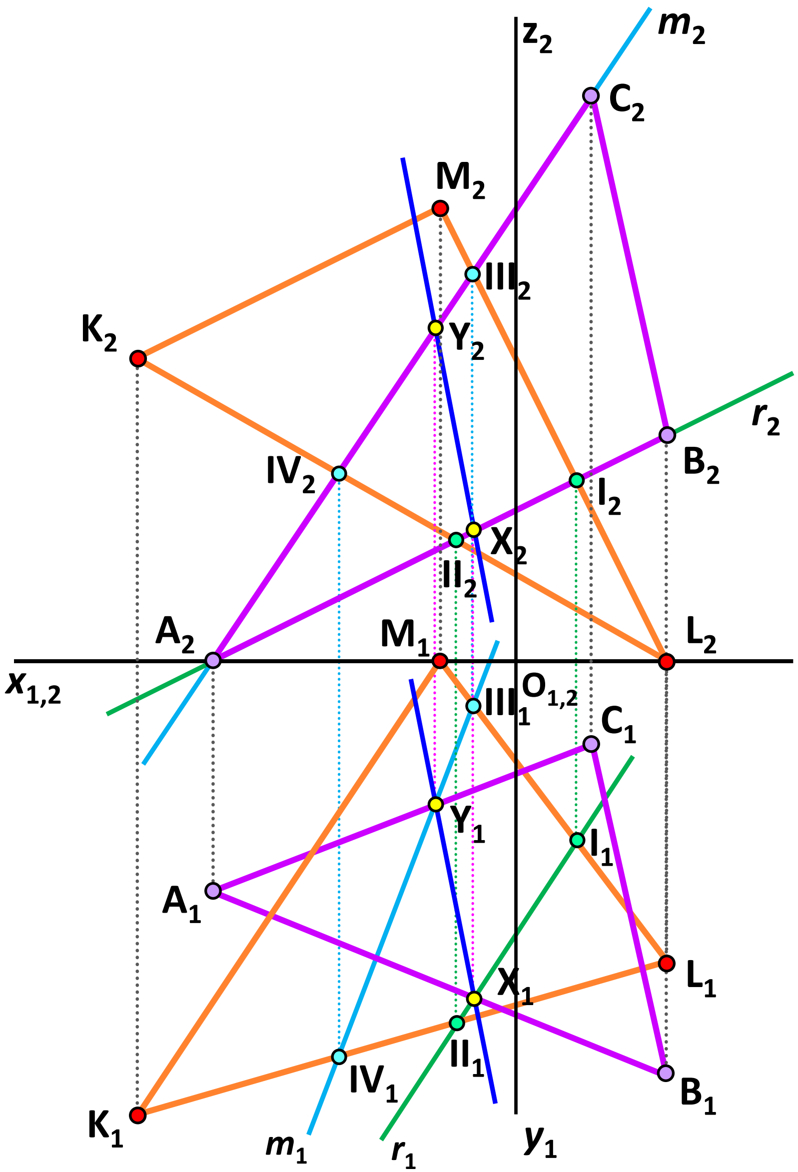
Viditeľnosť v náryse:
Ako krycí bod uvažujeme bod, kde sa zdanlivo pretínajú priamky a_2 a A_2C_2:

- $E_2 = F_2$ **- krycí bod**, ($E \in AC$, $F \in a$),
- $y^E < y^F \rightarrow$ viditeľný je bod **F** na priamke a,

  $\rightarrow$ t. j., viditeľná je polpriamka **RF**.

Poznámka: *Základnú konštrukciu priesečníka priamky s rovinou využívame najmä pri určovaní prieniku mnohouholníkov ležiacich v rôznych rovinách.*

Príklad 10.17: Zostrojte prienik trojuholníkov **ABC** a **KLM**, **A**[4;3;0], **B**[-2;5,5;3], **C**[-1;1;7,5], **K**[5;6;4], **L**[-2;4;0], **M**[1;0;6].



V nákresni si zvolíme začiatok súradnicovej sústavy $\mathbf{O_{1,2}}$ a zostrojíme príslušné priemety trojuholníkov **ABC** a **KLM**.

Pri riešení úlohy opakovane aplikujeme postup ako pri hľadaní prieniku priamky a trojuholníka (Príklad 10.16).

Postup:

Pomocou **metódy krycej priamky** nájdeme postupne priesečníky priamok **AB** a **AC** s trojuholníkom **KLM** :

1. $\boldsymbol{\lambda}$; $\mathbf{AB} \in \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \perp \nu$,
2. r_2; $r_2 = A_2B_2$,

   I_2; $r_2 \cap L_2M_2 = I_2$, $\quad I_2 \rightarrow I_1 \in L_1M_1$,

   II_2; $r_2 \cap K_2L_2 = Y_2$, $\quad II_2 \rightarrow II_1 \in K_1L_1$, $\quad \rightarrow r_1 = I_1II_1$.
3. X_1; $X_1 = A_1B_1 \cap r_1$,

   X_2; $X_1 \rightarrow X_2 \in A_2B_2 = r_2$.

   $\rightarrow \mathbf{AB} \cap \Delta\, \mathbf{KLM} = \mathbf{X}$
4. Analogickým postupom zostrojíme priesečník **Y** priamky **AC** s trojuholníkom **KLM**.
5. Následne zostrojíme priamku **XY**, ktorá je prienikom rovín trojuholníkov **ABC** a **KLM**. **Úsečka XY** je časť priesečnice, ktorá je spoločná pre obidva trojuholníky. Nazývame to **priesek trojuholníkov**.

Príklad 10.17: Zostrojte prienik trojuholníkov **ABC** a **KLM**, **A**[4;3;0], **B**[-2;5,5;3], **C**[-1;1;7,5], **K**[5;6;4], **L**[-2;4;0], **M**[1;0;6].

6. Následne určíme viditeľnosť prieseku trojuholníkov **ABC** a **KLM**.

Viditeľnosť v náryse:
Budeme určovať, či platí možnosť 1 alebo 2.

Určíme najprv **viditeľnosť priamky AC** vzhľadom na trojuholník **KLM**.

Ako krycí bod uvažujeme bod, kde sa zdanlivo pretínajú priamky A_2C_2 a L_2M_2 :

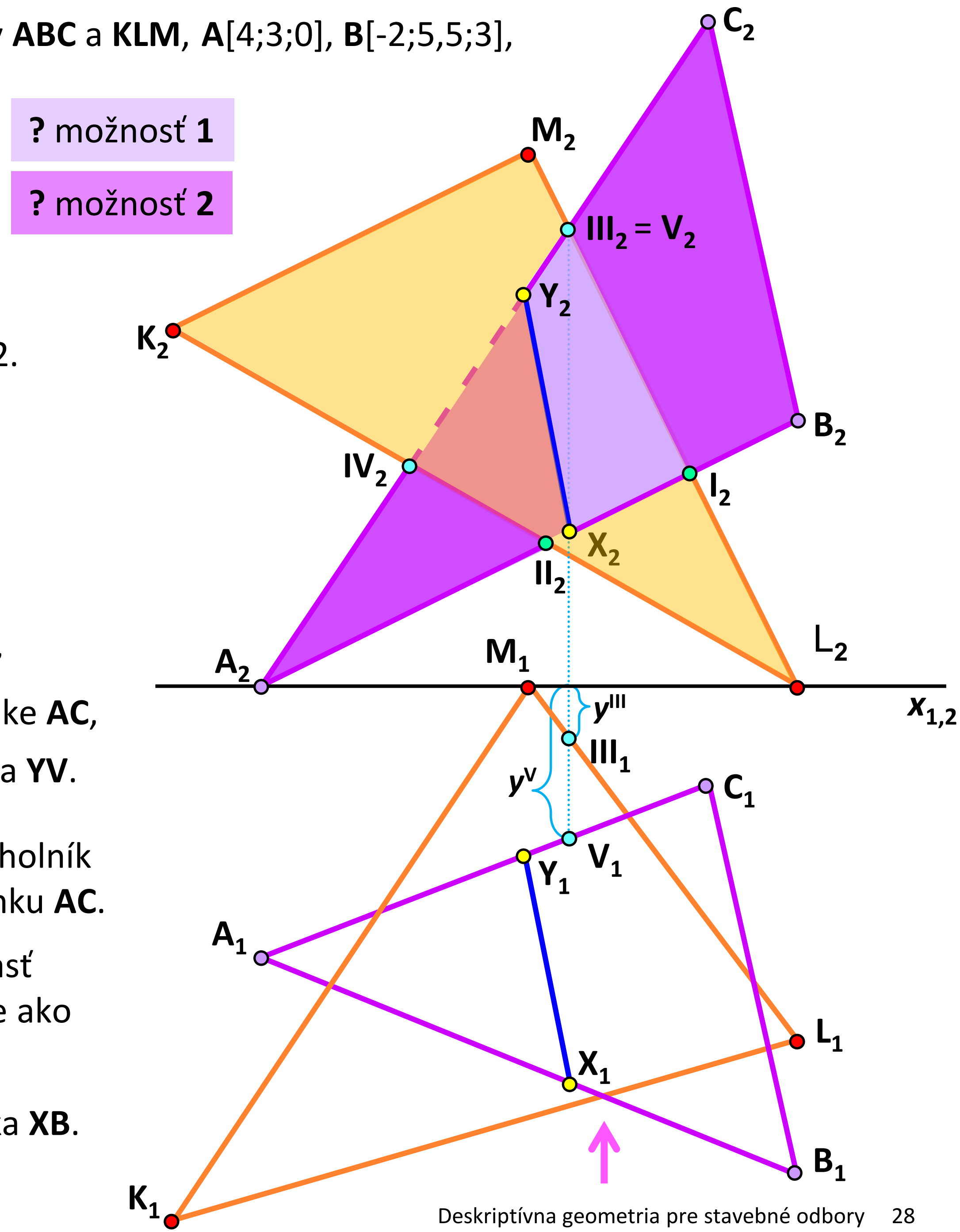
- **$III_2 = V_2$ - krycí bod**, (**III** $\in$ **LM**, **V** $\in$ **AC**),
- $y^{III} < y^{V} \rightarrow$ viditeľný je bod **V** na priamke **AC**,

  $\rightarrow$ t. j., viditeľná je polpriamka **YV**.

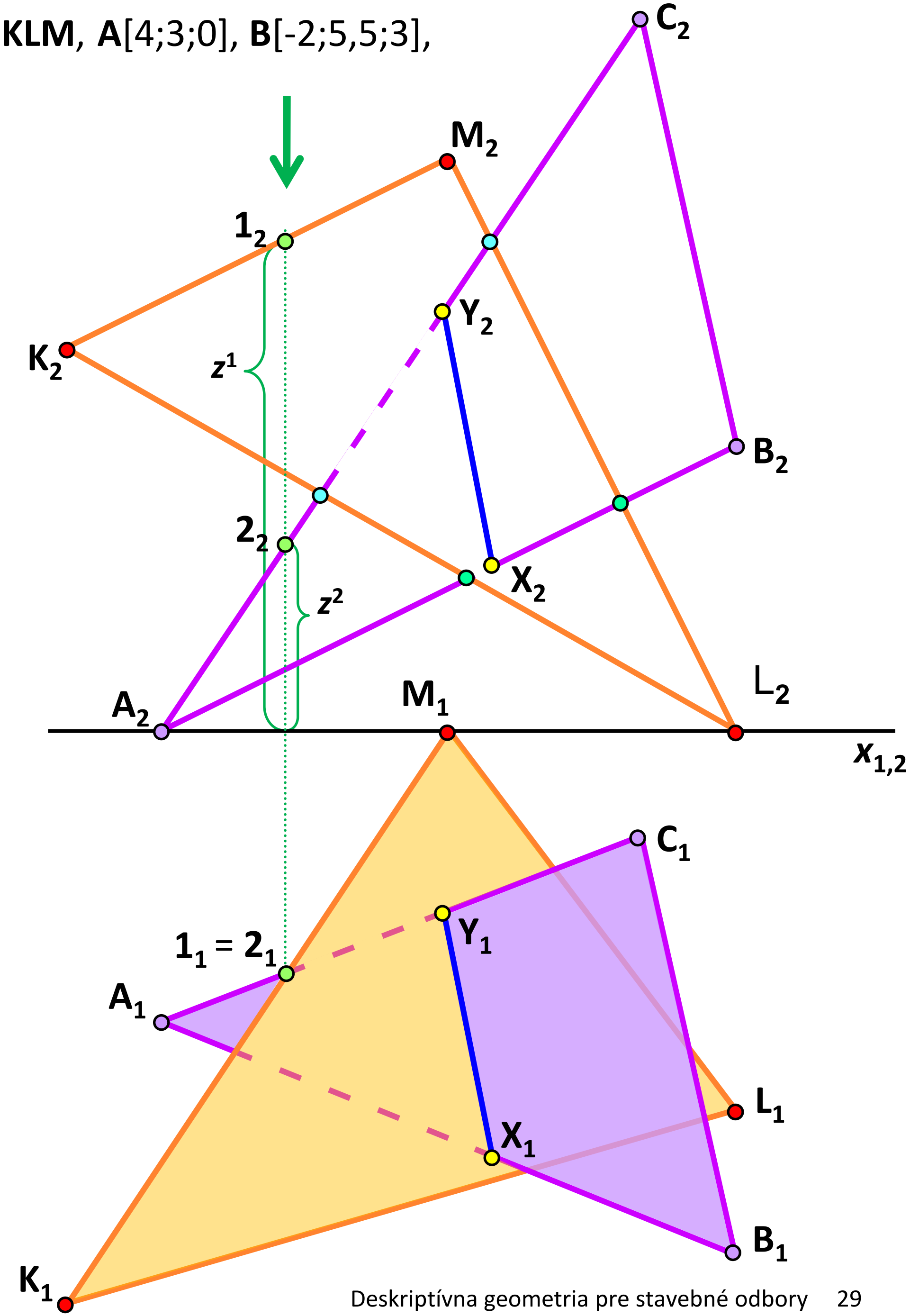
Viditeľnosť priamky AB vzhľadom na trojuholník **KLM** by sme určili analogicky ako pre priamku **AC**.

Je však zrejmé, že viditeľná (neviditeľná) časť priamky **AB** musí ležať v rovnakej polrovine ako viditeľná (neviditeľná) časť priamky **AC**.

$\rightarrow$ t. j., viditeľná je polpriamka **XB**.



Príklad 10.17: Zostrojte prienik trojuholníkov **ABC** a **KLM**, **A**[4;3;0], **B**[-2;5,5;3], **C**[-1;1;7,5], **K**[5;6;4], **L**[-2;4;0], **M**[1;0;6].



Viditeľnosť v pôdoryse:

Určíme najprv **viditeľnosť priamky AC** vzhľadom na trojuholník **KLM**.

Ako krycí bod uvažujeme bod, kde sa zdanlivo pretínajú priamky $\mathbf{K_1M_1}$ a $\mathbf{A_1C_1}$:

- $\mathbf{1_1 = 2_1}$ **- krycí bod**, (**1** $\in$ **KM**, **2** $\in$ **AC**),
- $z^2 < z^1 \rightarrow$ viditeľný je bod **1** na priamke **KM**,

  $\rightarrow$ t. j., viditeľná je polpriamka **YC**, a úsečka **Y2** je neviditeľná.

Určenie **viditeľnosti priamky AB** vzhľadom na trojuholník **KLM** je opäť analogické ako v predchádzajúcom postupe.

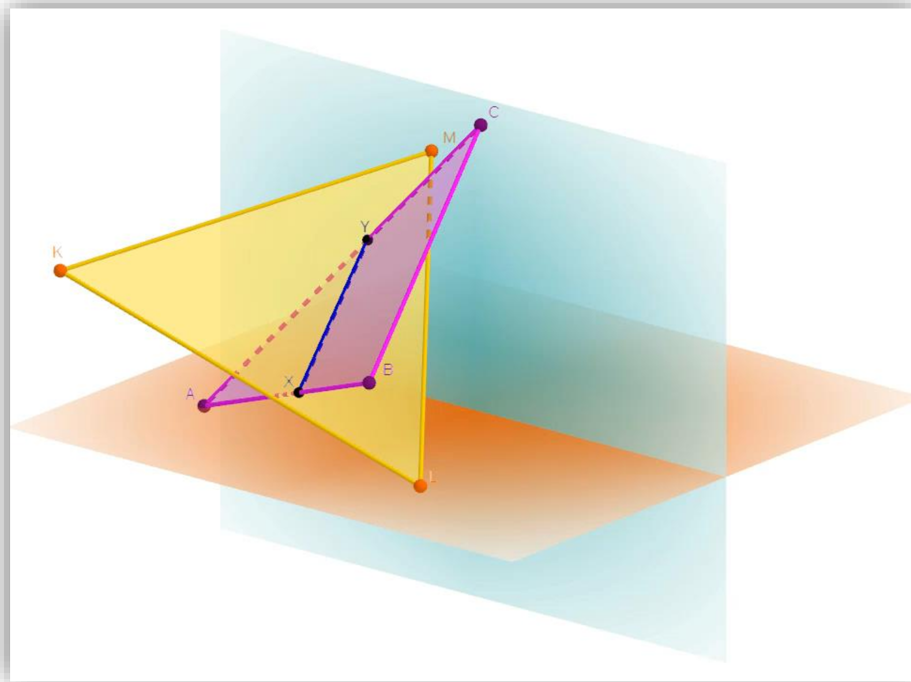
Teda, že viditeľná (neviditeľná) časť priamky **AB** musí ležať v rovnakej polrovine ako viditeľná (neviditeľná) časť priamky **AC**.

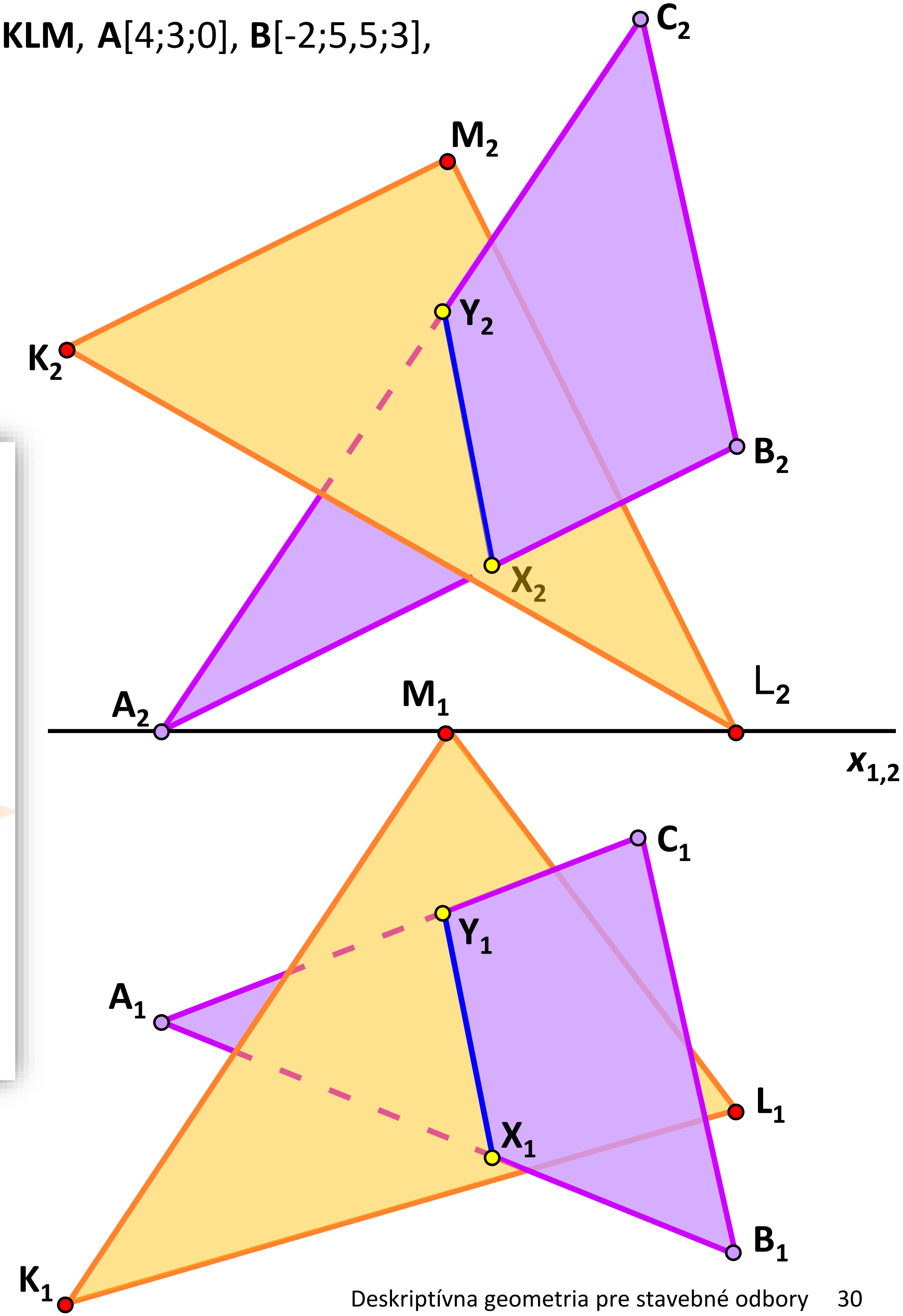
$\rightarrow$ t. j., viditeľná je polpriamka **XB**.

Príklad 10.17: Zostrojte prienik trojuholníkov **ABC** a **KLM**, **A**[4;3;0], **B**[-2;5,5;3], **C**[-1;1;7,5], **K**[5;6;4], **L**[-2;4;0], **M**[1;0;6].

Zhrnutie

Po prejdení myškou na obrázok sa objaví panel na spustenie videa.





Príklad 10.18: Zostrojte prienik trojuholníkov **ABC** a **KLM**, **A**[4;3;0], **B**[-2;5,5;3], **C**[-1;1;7,5], **K**[5;6;4], **L**[-2;4;0], **M**[1;0;6].

Anaglyf